FI2002 Electromagnetismo

Pauta Ejercicio 1, primavera 2010

Autor: Sebastián Fehlandt

Pregunta

Considere un sistema formado por un disco macizo de radio R y altura b, cargado con una densidad de carga ρ_0 [C/m^3], según se muestra en la Figura 1. El centro del disco es atravesado por un alambre de radio a, el cual también está cargado con una densidad de carga en volumen ρ_0 [C/m^3].

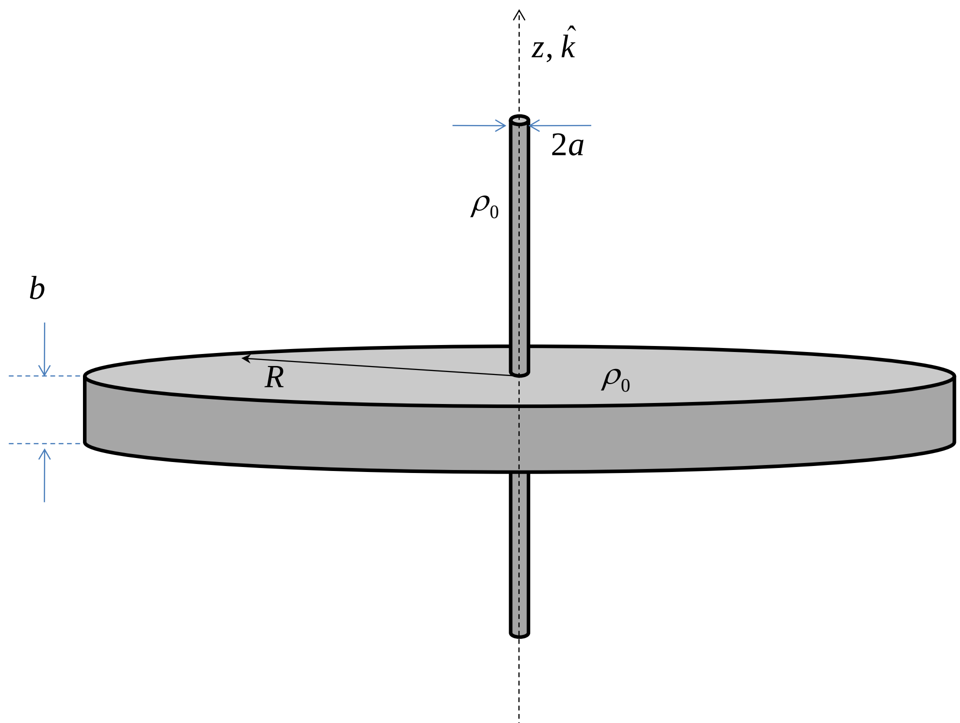

Figura 1

Suponiendo que R>>a, se pide:

a) Estimar el campo en todo el interior del alambre.
b) Estimar el campo para un punto a una distancia 2a del eje z sobre el disco.
c) Calcular la diferencia de potencial entre las caras del disco para un punto ubicado en la periferia de alambre.

Pauta

Primero que nada hay que analizar lo que se pide. Se pide calcular el campo eléctrico para puntos al interior del alambre, luego a una distancia de $2a$ desde el eje, y luego la diferencia de potencial entre las caras del disco, a una distancia de a desde el eje.

Luego es posible observar que como el radio del disco es mucho mayor que el radio del alambre $R \gg a$, los puntos en los que se calculará el campo son radios menores, iguales o solo del doble de a, por lo que el borde del disco sigue estando bastante alejado de estos puntos. O dicho de otra forma el campo se calculará sólo para radios $r \ll a$. Por lo tanto es posible despreciar los efectos de borde del disco considerando el disco como un plano infinito de grosor b.

Es importante notar que ésta hipótesis no es válida par alturas muy grandes, ya que al alejarse del disco el efecto producido por los bordes de éste es importante. Sin embargo es una buena aproximación para alturas $h \ll R$.

Luego es posible suponer que el disco se comporta como un plano infinito y utilizar Gauss para calcular el campo eléctrico producido por éste. Para esto es posible separar el problema y calcular el campo del disco y del alambre por separado y luego utilizando el principio de superposición sumarlos. Esto no habría sido posible si a zona común a ambas distribuciones no hubiera tenido el doble de carga, ya que al tratar de separarlas habría quedado un disco con un agujero, o un alambre con un corte.

a) Disco: Para calcular el campo producido por el disco, consideramos un cilindro de radio r y altura $h > b$, de tal forma que el cilindro contenga partes de ambas caras del disco. De esta forma se tiene por Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Donde, como dijimos anteriormente suponemos el disco como un plano infinito, por lo que el campo será perpendicular a la superficie y dependerá solo de la altura z. Por lo que el campo queda $\vec{E} = E(z)\hat{k}$ para $z > 0$ y $\vec{E} = E(z)(-\hat{k})$ para $z < -b$.

Así mismo el diferencia de superficie queda: $\overrightarrow{dS} = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \hat{k}$ para la superficie superior y $\overrightarrow{dS} = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot (-\hat{k})$ para la inferior. Para el manto el diferencia de superficie queda según $\hat{r}$, por lo que el producto punto con el campo lo anula.

De esta forma la integral de flujo queda

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{0,0}^{2\pi,r} E(z)\, r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \hat{k} \cdot \hat{k} + \iint_{0,0}^{2\pi,r} E(z)\, r \cdot dr \cdot d\theta \hat{k} \cdot (-\hat{k})(-\hat{k}) = 2E(z) \cdot 2\pi \int_0^r r \cdot dr$$

$$\oint\!\!\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 2\pi \cdot E(z) \cdot r^2$$

Y la carga encerrada por el cilindro corresponde a:

$$Q_{enc} = \oint\!\!\oint\!\!\oint \rho_0 \cdot dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\int_0^{b} \rho_0 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz = \pi\rho_0 b r^2$$

Luego igualando se tiene:

$$\frac{2\pi\rho_0 b r^2}{\varepsilon_0} = \pi \cdot E(z) \cdot r^2$$

De donde se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{E_D}(z) = \dfrac{\rho_0 b}{2\varepsilon_0}\hat{k} \quad , \quad z > 0 \\[2ex] \vec{E}_D(z) = -\dfrac{\rho_0 b}{2\varepsilon_0}\hat{k} \quad , \quad z < -b \end{array}}$$

Ahora para zonas al interior del disco se tiene que la carga encerrada va variando, por lo que utilizando dos cilindros coaxiales y del mismo radio, uno sobre el otro, con la tapa inferior del superior y la tapa superior del inferior justo en el punto donde se quiere calcular el campo, se tiene que por Gauss la parte de arriba del disco ejercerá un campo que cumple:

$$\oint\!\!\oint \overrightarrow{E_1} \cdot \overrightarrow{dS} = 2\pi \cdot E_1(z) \cdot r^2 = \frac{\pi\rho_0 z r^2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

De donde se tiene:

$$\overrightarrow{E_1}(z) = \frac{\rho_0 z}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Notar que la dirección de este campo la da el signo de z, ya que es negativo. De forma similar el cilindro de abajo ejercerá uno de:

$$\overrightarrow{E_2}(z) = \frac{\rho_0 (b+z)}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Luego por superposición, el campo en un punto z al interior del disco queda:

$$\boxed{\vec{E}_D(z) = \frac{\rho_0 (b+2z)}{2\varepsilon_0}\hat{k} \quad , \qquad -b \leq z \leq 0}$$

Notar que en la mitad del disco, es decir, cuando $z = -b/2$, el campo es nulo.

Alambre: Para calcular el campo producido por el alambre nuevamente utilizamos Gauss, para esto consideramos un cilindro de altura arbitraria h, y radio r correspondiente al punto en el que queremos calcular el campo. Notar que ésta variable es completamente arbitraria ya que luego se cancelará al calcular la carga encerrada e igualar.

Como el alambre es infinito, el campo no dependerá de la altura y, suponiendo una distribución uniforme de carga, tampoco del ángulo. Luego el campo tendrá la forma $\vec{E} = E(r)\hat{r}$.

Luego para calcular la integral de flujo, sabemos que las tapas son paralelas al campo, por lo que el producto punto de su vector normal con éste se cancela, sobreviviendo así solo el manto, en este caso el diferencial de superficie es $\overrightarrow{dS} = r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \hat{r}$

Con lo que la integral de flujo queda:

$$\oint\!\!\!\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{0,0}^{2\pi,h} E(r)\, r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \hat{r} \cdot \hat{r} = 2\pi r h E(r)$$

Y la carga encerrada para un radio $r < a$ es decir al interior del alambre será:

$$Q_{enc} = \oint\!\!\!\oint\!\!\!\oint \rho_0 \cdot dV = \iiint_{0\,0\,0}^{2\pi\, r\, h} \rho_0 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz = \pi \rho_0 h r^2$$

Luego igualando se tiene:

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi \rho_0 h r^2}{\varepsilon_0} = 2\pi r h E(r) = \oint\!\!\!\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Con lo que

$$\boxed{\vec{E}_A(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\hat{r} \quad , \quad r < a}$$

Luego por el principio de superposición, se tiene que el campo total al interior del alambre corresponde a:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \vec{E}_A(r) + \vec{E}_D(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(r \cdot \hat{r} + b\hat{k}\right) \ , \quad z > 0 \\ \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(r \cdot \hat{r} - b\hat{k}\right) \ , \quad z < -b \\ \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[r \cdot \hat{r} + (b + 2z)\hat{k}\right], -b < z < 0 \end{cases}}$$

b) En este caso lo único que cambia es el campo producido por el alambre. La integral de flujo es la misma, sin embargo la carga encerrada cambia ya que solo hay carga hasta el radio a. Quedando de esta forma:

$$Q_{enc} = \pi\rho_0 h a^2$$

Luego igualando:

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi\rho_0 h a^2}{\varepsilon_0} = 2\pi r h E(r) = \oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}$$

De donde:

$$\vec{E}_A(r) = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} \quad , \quad r > a$$

Luego, nuevamente por el principio de superposición el campo total para $z > 0$ es:

$$\vec{E}(r,z) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{r}\cdot\hat{r} + b\hat{k}\right)$$

Luego evaluando en $z = 2a$ se tiene:

$$\boxed{\vec{E}(2a,z) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{4}\hat{r} + b\hat{k}\right)}$$

c) Recordamos que la diferencia de potencial es trabajo por unidad de carga, luego para calcular el trabajo para mover la carga entre las caras del disco es igual a la diferencia de potencial entre ellas multiplicada por el valor de dicha carga:

$$\Delta W = q\cdot\Delta V$$

En este caso $\overrightarrow{dl} = dz\cdot\hat{k}$, por lo que el producto punto entre éste y la componente en $\hat{r}$ del campo es nulo. Luego la diferencia de potencial al llevar la carga q desde la cara inferior a la superior es:

$$\Delta V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\int_{-b}^{0}\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[r\cdot\hat{r} + (b+2z)\hat{k}\right]\cdot dz\cdot\hat{k} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\int_{0}^{-b}(b+2z)\,dz$$
$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(-b^2 + \frac{2b^2}{2}\right) = 0$$

Luego $\Delta W = 0$, lo que tiene sentido ya que el campo producido por el disco es completamente simétrico con respecto a la superficie que corta el disco.

Distribución de Puntaje:

- Cálculo del campo para el interior del alambre (solo considerando el alambre) 1 pto
- Cálculo del campo para el exterior del alambre (solo considerando el alambre) 1 pto
- Cálculo del campo del disco para $z>0$ 1pto
- Cálculo del campo del disco para $z<-b$ 1pto
- Cálculo del campo del disco para $-b<z<0$ 1pto
- Cálculo del trabajo 1 pto