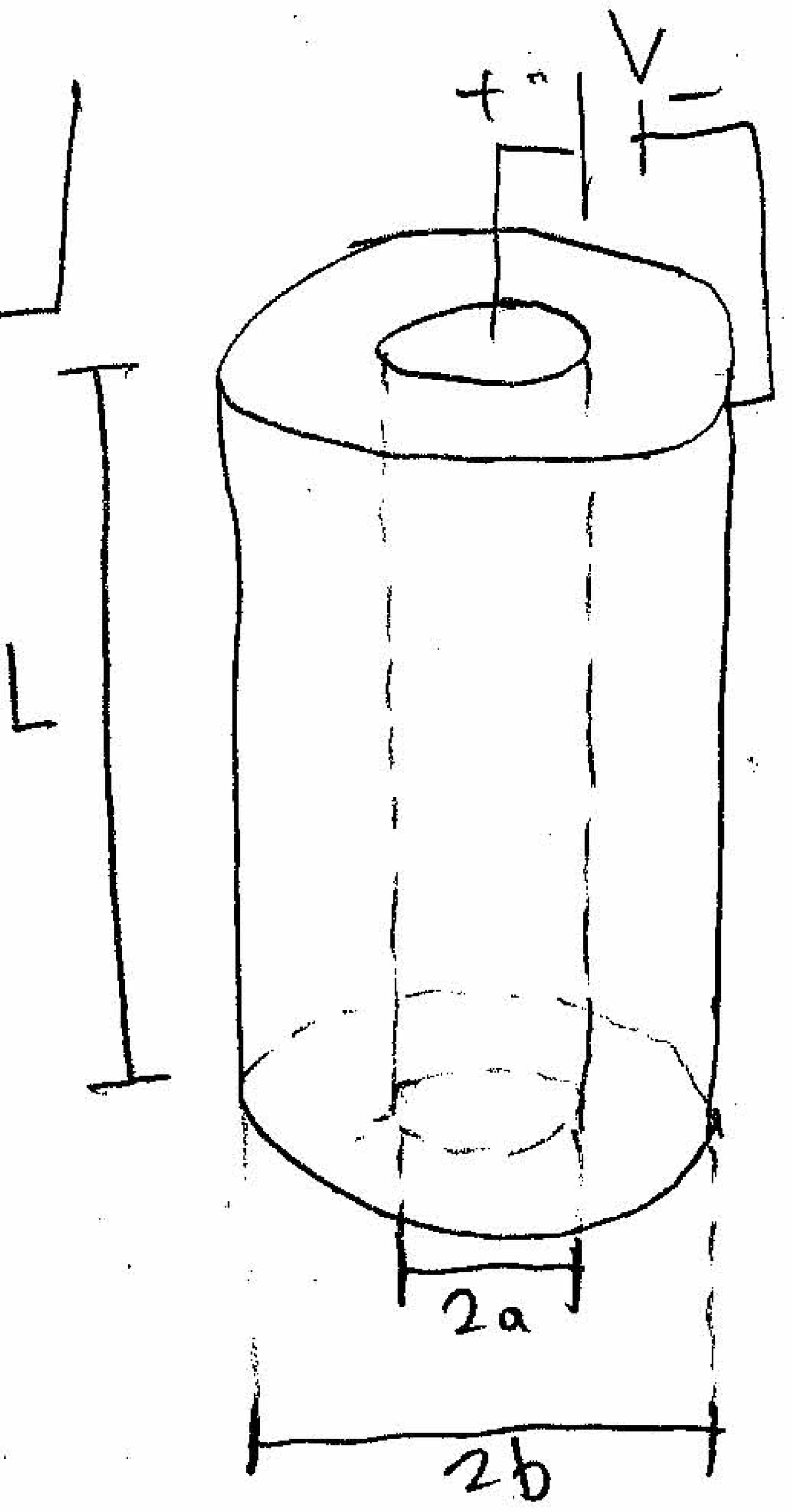
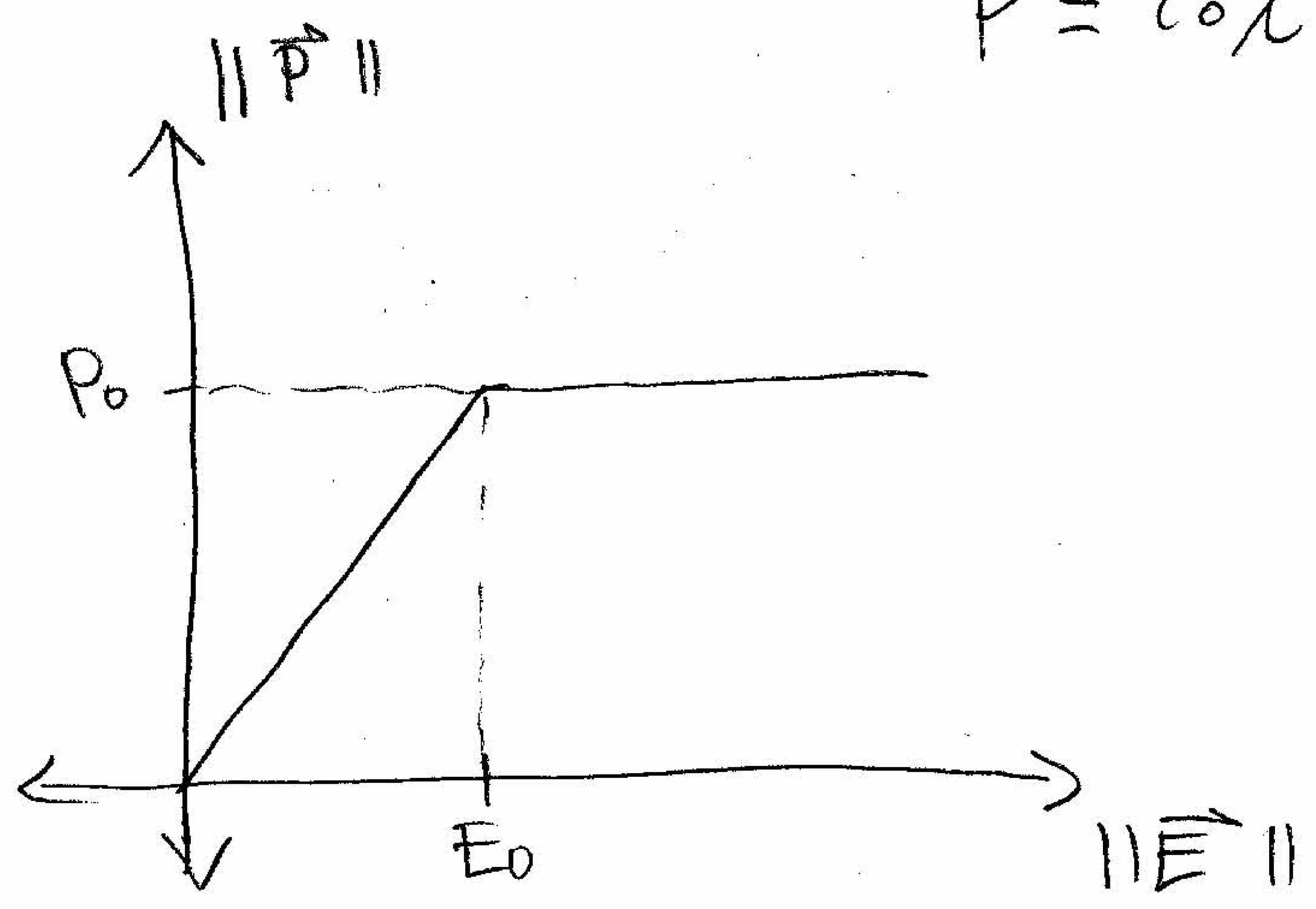
P1





$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

a) ¿V_0 tq se alcanza la saturación?

b) Det $\vec{E}$ y $\vec{D}$ $\forall$ V.

Sol: La ecuación de Poisson dice: $\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0}$

Donde ρ_t es la densidad de carga total, la cual considera tanto la carga libre como la carga de polarización. Sin embargo cuando se tiene un medio material uniforme la constante dieléctrica de éste será constante y por lo tanto no habrá densidad de carga de polarización en volumen (demúestrelo), por lo que la ecuación de Laplace se cumple. Como en este caso el medio material efectivamente es homogéneo se cumple la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Dada la simetría del problema suponemos que $V(\vec{r})$ solo depende de r:

$$V(\vec{r}) = V(r) \Rightarrow \nabla^2 V(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad \left(\text{En coordenadas esféricas}\right)$$

$$\Rightarrow r \cdot \frac{dV}{dr} = cte \equiv A \Rightarrow \frac{dV(r)}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow V(r) = A \cdot \ln(r) + B$$

Ahora determinamos A (Como veremos luego B es irrelevante):

$$V = V(a) - V(b) = A \cdot \ln(a) - A\ln(b) = A\ln(a/b)$$

$$\Rightarrow A = \frac{V}{\ln(a/b)} \Rightarrow V(r) = \frac{V}{\ln(a/b)} \cdot \ln(r) + B$$

Calculamos $\vec{E} = -\nabla V(r) = \frac{-\partial V}{\partial r} \cdot \hat{r} = \frac{-V}{\ln(a/b)\cdot r} \cdot \hat{r} = \frac{V}{\ln(b/a)\cdot r} \cdot \hat{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{V}{r\ln(b/a)} \cdot \hat{r}}$$

Para que el material esté completamente saturado se requiere:

$\|\vec{E}(r)\| \geq E_0 \quad \forall r \in [a,b]$, o equivalentemente (dado que $\vec{E}(r)$ es mínimo en $r=b$): $\|\vec{E}(b)\| \geq E_0$. Tomamos la condición límite, e imponemos que se cumpla a potencial $V=V_0$:

$$E_0 = \|\vec{E}(b)\| = \frac{V_0}{b\ln(b/a)} \Rightarrow \boxed{V_0 = bE_0 \ln(b/a)}$$

b) De la parte anterior tenemos que: $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{V \cdot \hat{r}}{r\ln(b/a)}, \ \forall V}$

Para calcular $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, analizamos por casos:

- $V \geq V_0$: En este caso el material está saturado (pues $\vec{E}$ es creciente con V), de esta forma:

$\|\vec{P}\| = P_0$, y como $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{P} \parallel \vec{E}$, tenemos que:

$$\vec{P} = P_0 \cdot \hat{r} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + P_0 \hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \left[\frac{\varepsilon_0 V}{r\ln(b/a)} + P_0\right]\hat{r} \quad \text{para} \quad V \geq V_0}$$

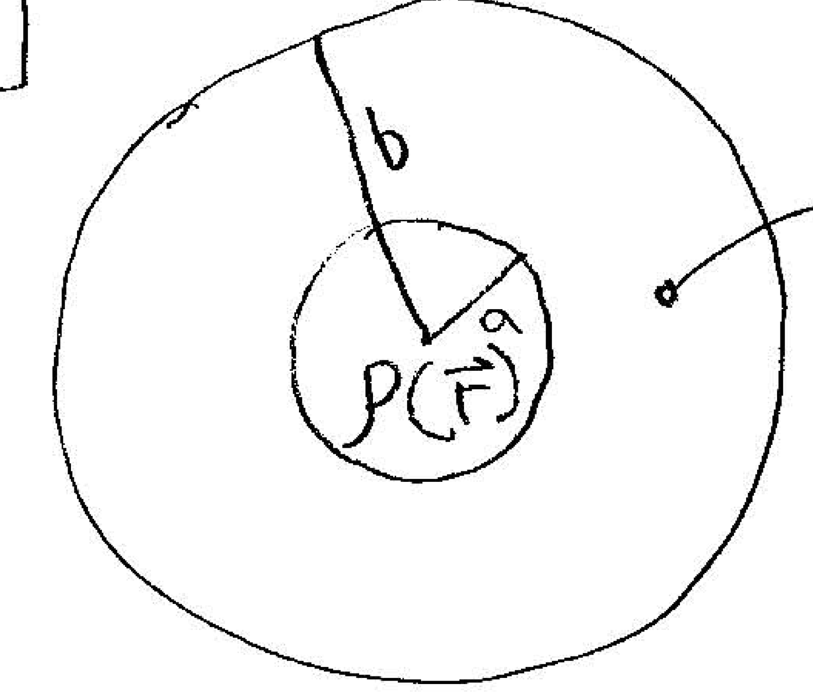
- $V \leq V_0$: En este caso nos encontramos en la zona lineal:

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. De la curva tenemos que: $\vec{P} = \frac{P_0}{E_0} \cdot \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{E_0}\right)\vec{E} = \left(\frac{\varepsilon_0 E_0 + P_0}{E_0}\right)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{(\varepsilon_0 E_0 + P_0)V}{E_0 \ln(b/a)\, r} \cdot \hat{r}, \quad V \leq V_0}$$

P2 ε_0



$$\begin{cases} \vec{P_i} = 5\cdot 10^{-20}\,[Cm]\cdot\hat{r} \\ g(\vec{r}) = K\cdot r^2 \end{cases}$$

$\rho(\vec{r}) = K\cdot r$ [moléculas/cm^3]

a) ¿ $\vec{P}$?

b) ¿ $\vec{D}$, $\vec{E}$? espacio

c) ¿ ΔV? entre casquetes

Sol: a) La definición de vector de Polarización es: $\vec{P} = \lim_{\Delta V\to 0} \dfrac{\sum_i \vec{P_i}}{\Delta V}$

es decir, es una densidad de momentos dipolares.

$\Rightarrow \quad \vec{P}(\vec{r}) = \vec{P_i}\cdot g(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\vec{P}(r) = 5\cdot 10^{-20}\cdot K r^2\cdot\hat{r}\ [C/m^2]}$

b) Analizamos por casos, calculando los $\vec{D}$ por Gauss: Considerando una superficie esférica de radio r, la carga encerrada es:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho(\vec{r})\cdot r^2 \operatorname{Sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = 4\pi K\int_0^r r^3 dr = \frac{4\pi K\cdot r^4}{4} = \begin{cases} \pi K a^4, & r \geq a \\ \pi K r^4, & r \leq a \end{cases}$$

Dada la simetría de $\rho(\vec{r})$ podemos suponer que $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ de esta forma

$\vec{E} = \dfrac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0} = E(r)\cdot\hat{r}$, pues $\vec{D}$ y $\vec{P}$ son paralelos a $\hat{r}$

- $r < a$: Aplicando la ley de Gauss se tiene:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(r) r^2 d\theta\, d\phi = 4\pi r^2 D(r) = Q = \pi K\cdot r^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{K r^2}{4}\cdot\hat{r},\quad r < a}$$

Y como estamos fuera del medio material, la permitividad eléctrica es la del vacío. Luego:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{K r^2}{4\varepsilon_0}\hat{r},\quad r < a}$$

• $a < r < b$: Nuevamente por Gauss: $\pi K \cdot a^4 = 4\pi r^2 D(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{Ka^4}{4r^2} \cdot \hat{r} \quad , \quad a < r < b}$$

En este caso $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{K}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^4}{4r^2} + r^2 \cdot 5 \cdot 10^{-20}\right) \cdot \hat{r} \quad , \quad a < r < b}$$

• $r > b$: En este caso utilizamos la condición de borde sobre $\vec{D}$:
$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_\ell$. Como no hay carga en la interfaz: $\sigma_L = 0$
$\Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \vec{D_1} = \vec{D_2}$, pues por la simetría del problema asumimos que $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ $\forall r$. Luego $\vec{D}$ es el mismo calculado anteriormente. Ojo que solo se puede asegurar esto en la interfaz, sin embargo si aplicamos Gauss llegamos a que las expresiones para $\vec{D}(r)$ son iguales, pues la carga encerrada es la misma.

Así: $\boxed{\vec{D}(r) = \dfrac{Ka^4}{4r^2} \cdot \hat{r} \quad , \quad r > b}$

Y como estamos fuera del material: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{Ka^4}{4\varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} \quad , \quad r > b}$

$$\therefore \boxed{\vec{D}(r) = \begin{cases} \dfrac{Kr^2}{4}\hat{r} & , \ r \leq a \\ \dfrac{Ka^2}{4r^2}\hat{r} & , \ r \geq a \end{cases} \quad , \quad \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Kr^2}{4\varepsilon_0}\hat{r} & , \ r < a \\ \dfrac{K}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{a^4}{4r^2} + r^2 \cdot 5 \cdot 10^{-20}\right) \cdot \hat{r} & , \ a < r < b \\ \dfrac{Ka^4}{4\varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} & , \ r > b \end{cases}}$$

Nota: La igualdad en los límites de $\vec{D}(r)$ se justifica con la Condición de borde para $\vec{D}$.

c) $\Delta V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, donde $\vec{E}$ corresponde al del medio material.

$$\Rightarrow \Delta V = -\int_a^b \frac{K}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^4}{4r^2} + 5\cdot 10^{-20}\right)\hat{r} \cdot dr\,\hat{r} = \frac{-K}{\varepsilon_0}\left[-\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{r}\Big|_a^b + 5\cdot 10^{-20}\cdot r\Big|_a^b\right]$$

$$= \frac{+K}{\varepsilon_0}\left[\frac{a^4}{4}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + 5\cdot 10^{-20}(a-b)\right]$$

$$= \frac{K}{\varepsilon_0}\left[\frac{a^4(a-b)}{4ab} + 5\cdot 10^{-20}(a-b)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{K(a-b)}{\varepsilon_0}\left[\frac{a^3}{4b} + 5\cdot 10^{-20}\right]}$$