FI2002 Electromagnetismo

Pauta Pregunta 1 Control 1, primavera 2010

Autor: Sebastián Fehlandt

1. Pregunta

Un cable coaxial de sección circular $c+h$ tiene un dieléctrico compuesto entre sus dos conductores. El conductor interior tiene un radio exterior a y está rodeado por una cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica ε_1 y de radio exterior b. A continuación hay otra cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica ε_2 y de radio exterior c. Si se establece una diferencia de potencial V_0 entre los conductores, calcule el vector de polarización y las densidades de carga inducidas en los dos medios dieléctricos.

2. Pauta

Llamemos σ_1 a la densidad de carga superficial del cilindro de radio exterior a y σ_2 a la del conductor de radio interior c.

Primero calculamos el campo eléctrico en función de la densidad de carga σ_1 debiendo separar el cálculo para los diferentes dieléctricos.

Para a<r<b:

$$\oint D_1 dS = Q$$

$$D_1 2\pi r L = 2\pi a L \sigma_1$$

$$D_1 = \frac{a\sigma_1}{r}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{D_1} = \frac{a\sigma_1}{r}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{a\sigma_1}{\varepsilon_1 r}\hat{r}$$

Para b<r<c:

$$\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E_2} = \frac{a\sigma_1}{\varepsilon_2 r}\hat{r}$$

Ahora busquemos el valor de σ_1

$$\Delta V = -\int E dl$$

$$\Rightarrow V(a) - V(c) = -\int_b^a E_1 dr - \int_c^b E_2 dr$$

$$V_0 = -\int_b^a E_1 dr - \int_c^b E_2 dr$$

$$V_0 = -\left[\int_b^a \frac{a\sigma_1}{\varepsilon_1 r} dr + \int_c^b \frac{a\sigma_1}{\varepsilon_2 r} dr\right]$$

$$V_0 = -a\sigma_1\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\int_b^a \frac{1}{r} dr + \frac{1}{\varepsilon_2}\int_c^b \frac{1}{r} dr\right]$$

$$V_0 = -a\sigma_1\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{b}{c}\right)\right]$$

$$V_0 = a\sigma_1\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{V_0}{a\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]}$$

Ya que conocemos el valor de σ_1, calculemos el vector de polarización y densidades de carga inducidas.

$$\overrightarrow{P_i} = (\varepsilon_i - \varepsilon_0)\overrightarrow{E_i}$$

$$\rho_i = -\nabla \cdot P_i = -\frac{1}{r}\left(\frac{\delta(rP_i)}{\delta r}\right) = 0 \quad para\ i = 1,2$$

$$\sigma_{P_i} = P_i(R)\hat{n}$$

$$\sigma_{P_i} = P_i(R) = (\varepsilon_i - \varepsilon_0)\frac{a\sigma_1}{R\varepsilon_i} \quad para\ radio\ exterior$$

$$\sigma'_{P_i} = P_i(R) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_i)\frac{a\sigma_1}{R\varepsilon_i} \quad para\ radio\ interior$$

Para a<r<b:

$$\vec{P_1} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E_1}$$

$$\vec{P_1} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{a\sigma_1}{r\varepsilon_1}\hat{r}$$

$$\rho_1 = 0$$

$$\sigma_{P1} = P_1(b) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{a\sigma_1}{b\varepsilon_1}$$

$$\sigma'_{P_1} = P_1(a) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$$

Para b<r<c:

$$\vec{P_2} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\vec{E_2}$$

$$\vec{P_2} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{a\sigma_1}{r\varepsilon_2}\hat{r}$$

$$\rho_2 = 0$$

$$\sigma_{P_2} = P_2(c) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{a\sigma_1}{c\varepsilon_2}$$

$$\sigma'_{P_2} = P_2(b) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\frac{a\sigma_1}{b\varepsilon_2}$$

Distribución de Puntaje:

- $\overrightarrow{D_1}$ 0,5 ptos
- $\overrightarrow{D_2}$ 0,5 ptos
- $\overrightarrow{E_1}$ 0,5 ptos
- $\overrightarrow{E_2}$ 0,5 ptos
- $\overrightarrow{P_1}$ 0,5 ptos
- $\overrightarrow{P_2}$ 0,5 ptos
- ρ_{P_1} 0,5 ptos
- ρ_{P_2} 0,5 ptos
- σ_{P_1} 0,5 ptos
- σ'_{P_1} 0,5 ptos
- σ_{P_2} 0,5 ptos
- σ'_{P_2} 0,5 ptos