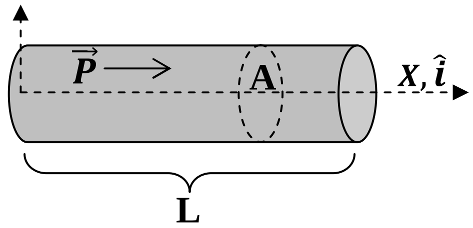
FI 2002-1 Electromagnetismo, Primavera 2010

Pauta Control 1

P2. Una varilla de material dieléctrico de longitud L y sección A posee un vector de polarización paralelo al eje x, según se muestra en la Figura:



El vector polarización tiene la forma $\vec{P} = (ax^2 + b)\hat{\imath}$, con a y b constantes. Se pide:

a) Encontrar la densidad de carga de polarización en volumen y superficial del material. (2 pts)
b) Demuestre que la carga total de polarización es nula. (2 ptos)
c) Suponga ahora que $\vec{P} = P_0\hat{\imath}$. Se pide estimar el potencial producido por el material para una distancia $x >> L$. (2 ptos)

P3. La cohesión en los cristales iónicos se debe a las fuerzas eléctricas de atracción entre iones positivos y negativos. Considere un modelo unidimensional de un cristal de NaCl que consiste en una línea recta infinita en la cual están dispuestos los iones. En dicha línea los iones positivos de Na se encuentran alternados con los iones de Cl.

Considerando que la distancia entre iones vecinos es a y que los iones positivos tienen carga $+e$ y los iones negativos tienen carga $-e$, se pide calcular una expresión para la energía que se debe entregar a un ion positivo de Na para sacarlo de su lugar y llevarlo hasta una distancia muy grande (el infinito). Exprese su resultado en función de e y a.

Hint: Suponga que el potencial en el infinito es nulo. Además, puede ser de utilidad el siguiente dato: $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ (6 ptos)

P2.

a) Primero recordamos que $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ y $\rho_b = -\nabla\vec{P}$. Dada la dirección del vector polarización, la densidad superficial de carga sobre el manto del alambre será nula, al tener su vector normal una dirección radial.

$$\sigma_b|_{x=0} = b\hat{\imath} \cdot (-\hat{\imath}) = -b$$
$$\sigma_b|_{x=L} = (aL^2 + b)\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = aL^2 + b$$
$$\rho_b = -2ax$$

b) $Q_{total} = Q_\sigma + Q_\rho$

$$= A\left(aL^2 + b - b\right) + A\int_0^L (-2ax)dx = A\left(aL^2 + b - b\right) - 2aL^2A = 0$$

c) Por la forma del vector polarización, que tiene divergencia nula, sólo habrá densidades de carga en las superficies de las tapas del alambre, con valores $-P_0$ y P_0 para $x = 0$ y $x = L$, respectivamente.

Como nos situamos en $x >> L$, pero no nos dicen nada de cómo se comparan el valor $R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ con x , consideramos el sistema como un disco de dipolos de momento dipolar $p = P_0 L$ y escribiendo el potencial eléctrico de un dipolo $V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$:

$$dV = \frac{P_0 L \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dA = \frac{P_0 L \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\rho d\rho d\phi = \frac{P_0 L}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{(\frac{L}{2}+x)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + \rho^2}}\rho d\rho d\phi$$

$$= \frac{P_0 L}{4\pi\varepsilon_0(\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + \rho^2)}\frac{(\frac{L}{2}+x)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + \rho^2}}\rho d\rho d\phi$$

$$= \frac{P_0 L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\frac{L}{2}+x)}{(\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + \rho^2)^{3/2}}\rho d\rho d\phi$$

$$\Rightarrow V = \frac{P_0 L}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{(\frac{L}{2}+x)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + \rho^2}})$$

Otras aproximaciones correctamente justificadas se tomarán en cuenta.

P3. La diferencia de potencial entre dos puntos, multiplicada por la carga transportada entre ellos nos da la energía requerida (el trabajo) para mover la carga.

$$W = +e\, V|_{r=0}^{\infty} = 0 - +e\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i(r)}\Bigg|_{r=0} = - +e\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^i e}{\sqrt{r^2 + (ia)^2}}\Bigg|_{r=0} =$$

$$= - +e\ \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i e}{\sqrt{r^2 + (ia)^2}}\Bigg|_{r=0} = -\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}$$

$$= - - \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln(1+1) = \frac{e^2 \ln 2}{2\pi\varepsilon_0 a}$$