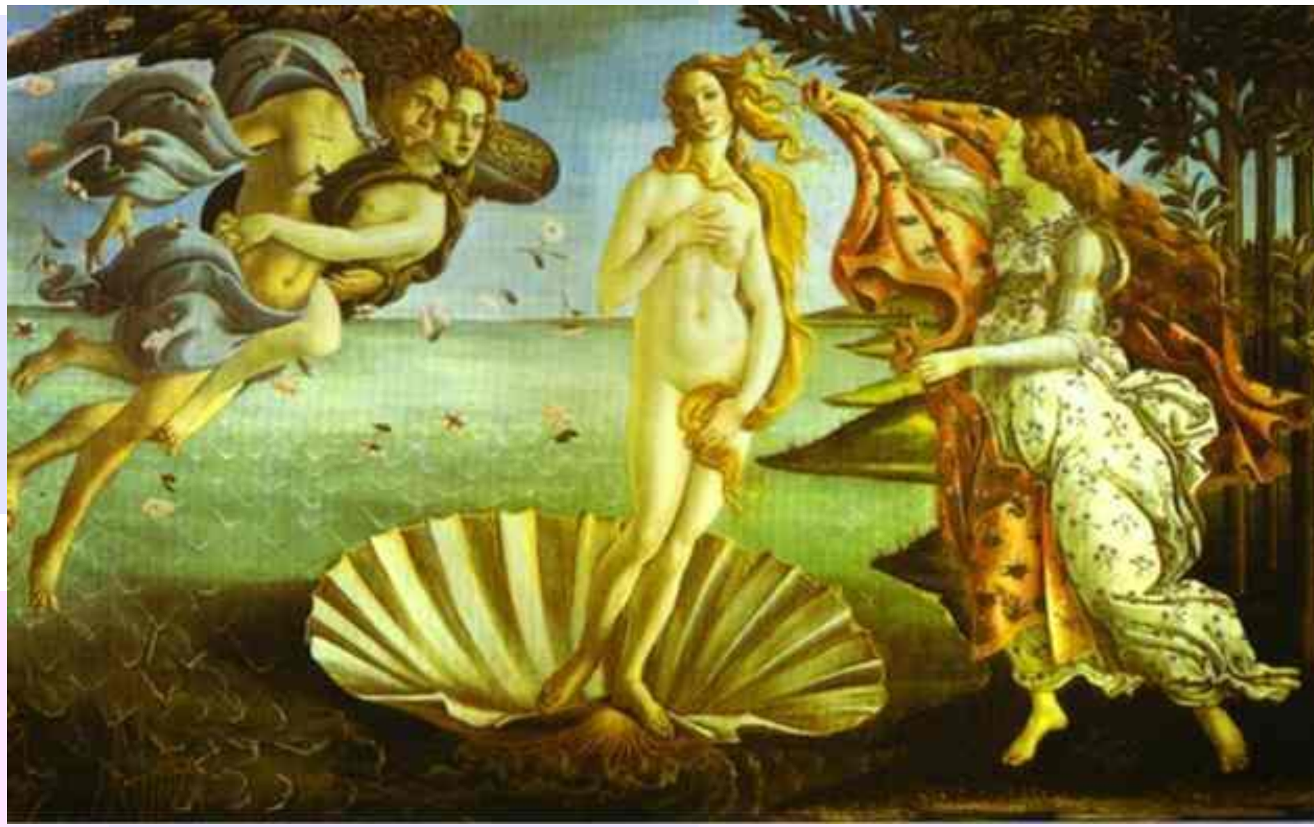
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 14
Corriente Eléctrica-II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Resumen medios materiales
- Ejemplo
- Corriente de Convección
- Ecuación de Continuidad
- Condiciones de borde para J



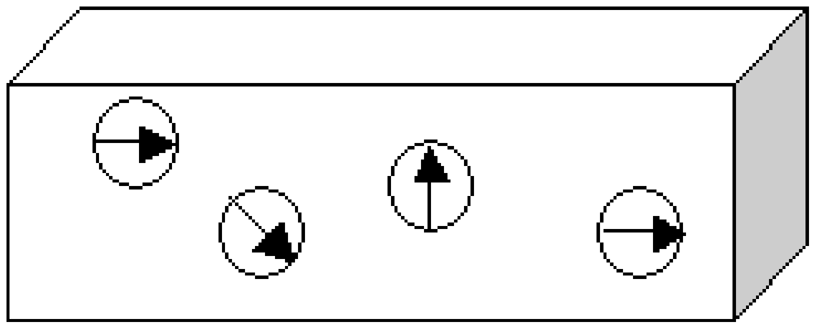
El Nacimiento de Venus, Alessandro Boticelli

Resumen medios materiales

Dieléctricos

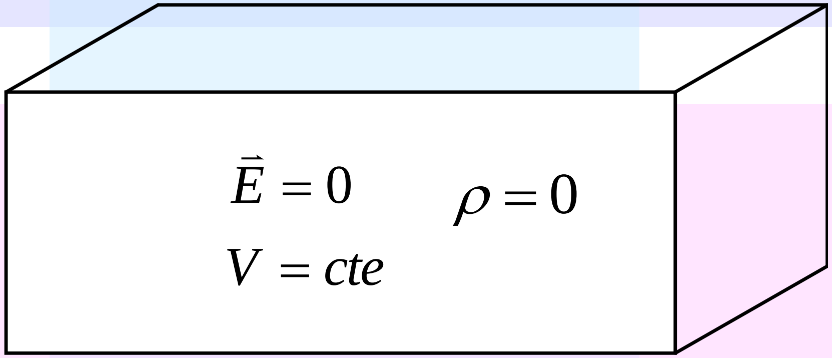
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$



Conductores

- Equilibrio electrostático



$$\vec{E} = 0 \qquad \rho = 0$$

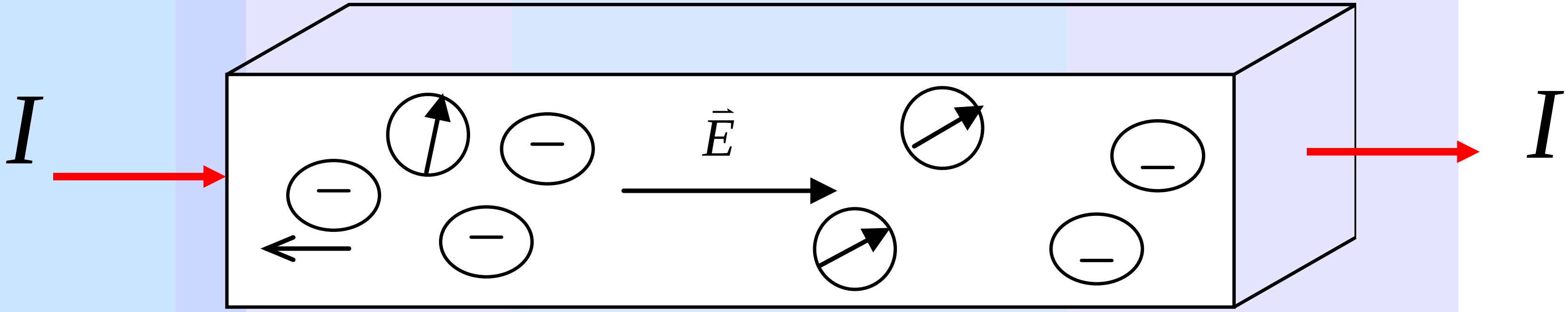
$$V = cte$$

Sólo hay carga superficial

Resumen medios materiales

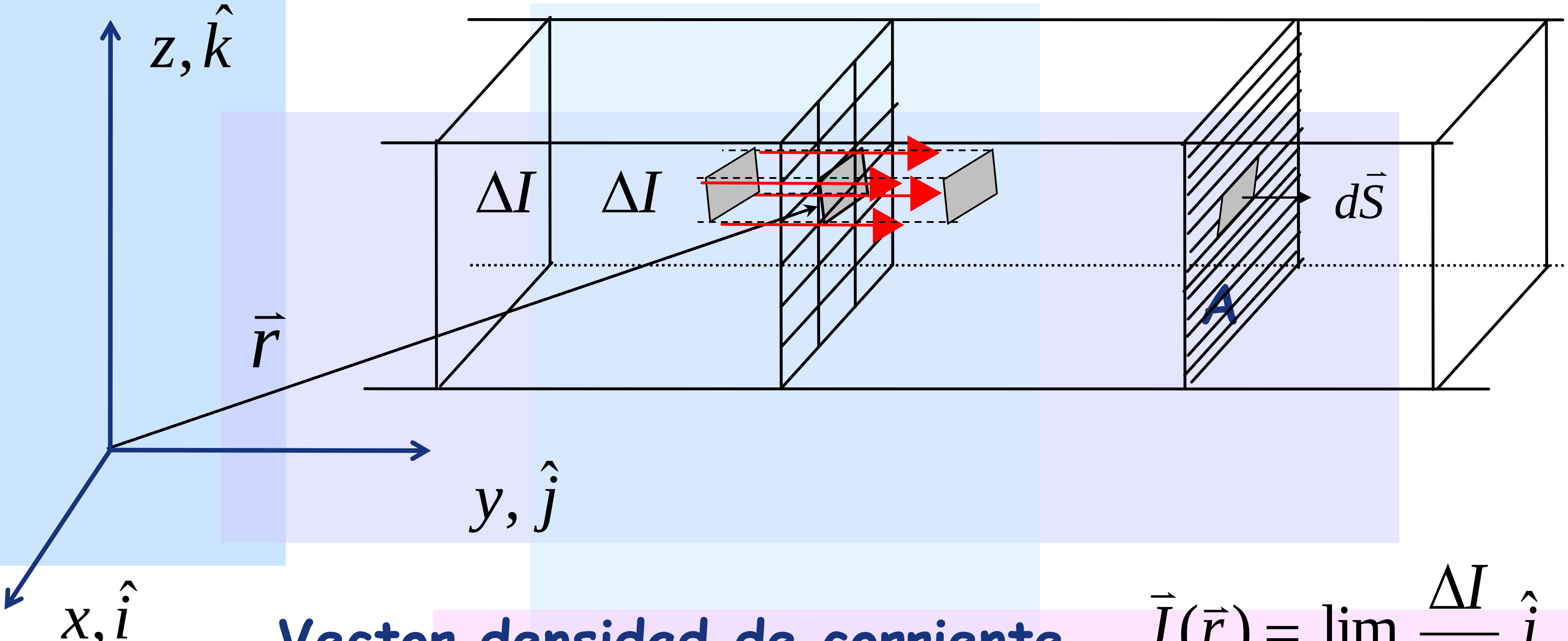
Conductores

- Equilibrio dinámico



- Carga total por unidad de volumen es nula
- Puede haber dipolos y carga libre simultáneamente
- Material se caracteriza por g y ε

Densidad de Corriente

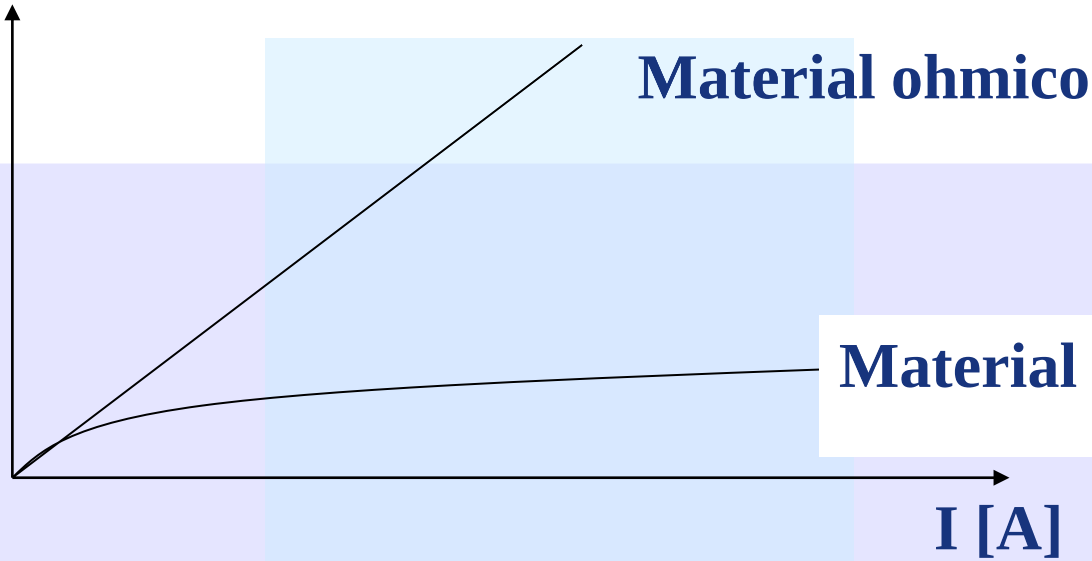


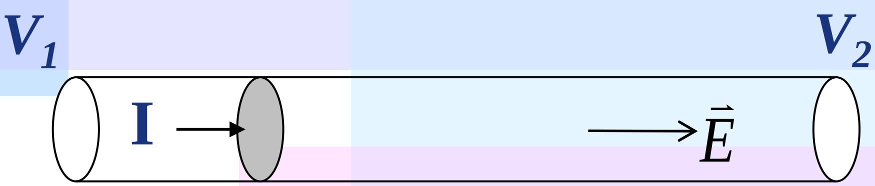
Vector densidad de corriente $$\vec{J}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}\,\hat{j}$$

Corriente a través de A $$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Ley de Ohm

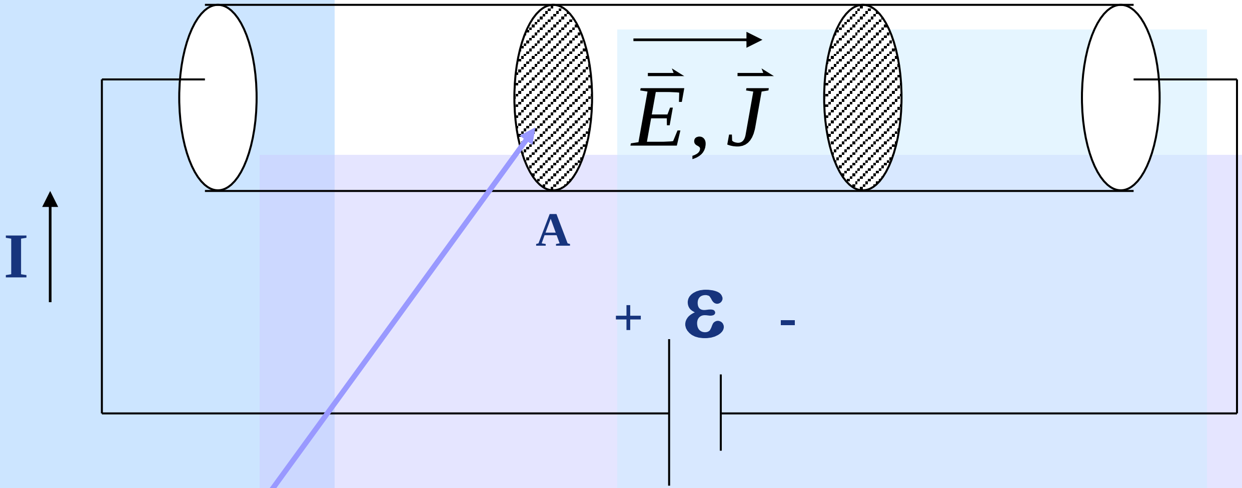
$V = V_1 - V_2 [v]$





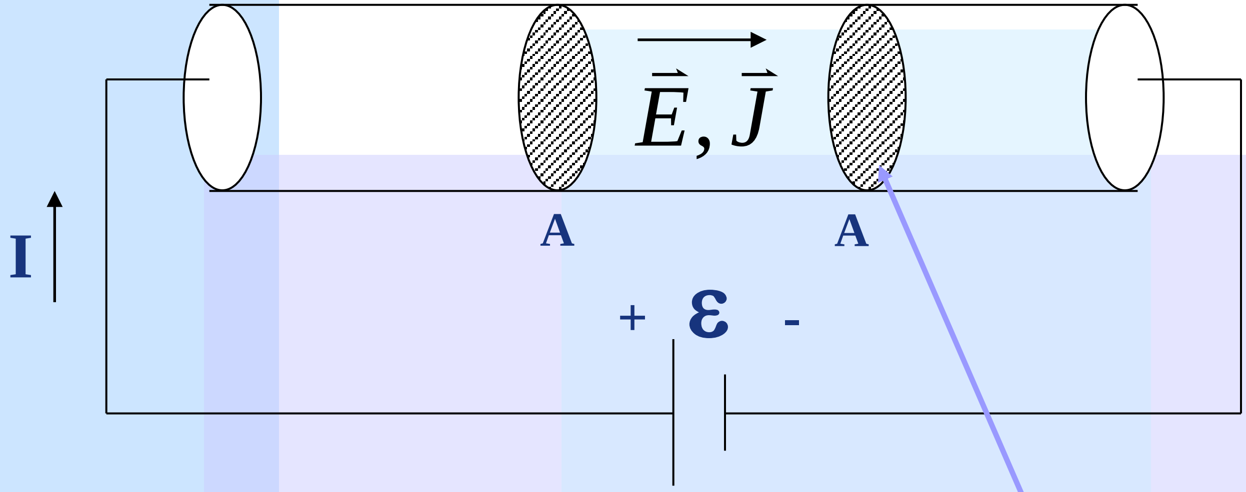
$$\vec{J} = g\,\vec{E} \qquad \Rightarrow \Delta V = RI \qquad R = \rho \times \frac{l}{A}$$

Efecto Joule



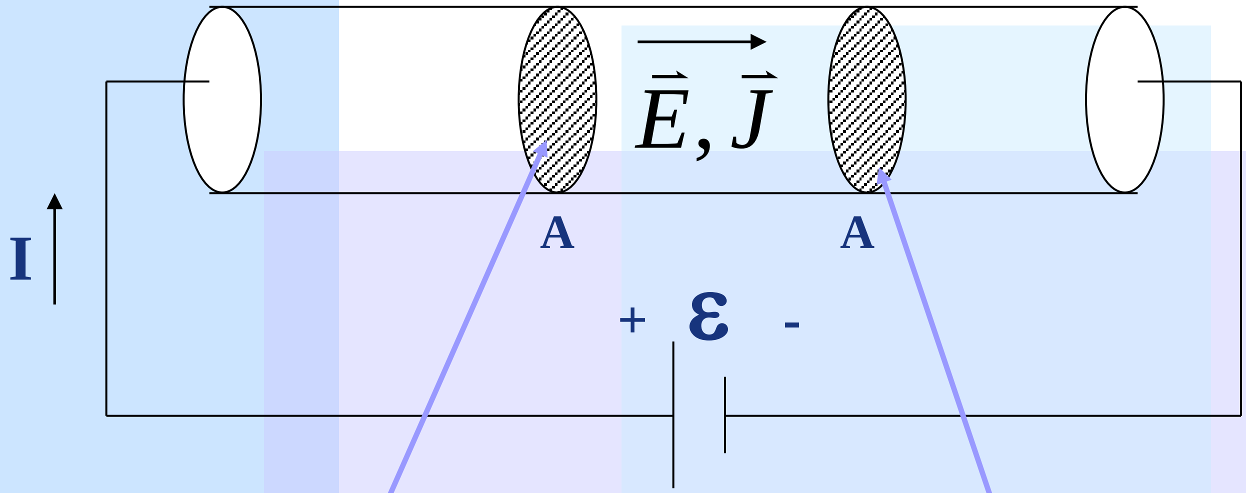
$$U_1 = \Delta Q_1 \cdot V_1$$ **energía de la carga en el disco 1**

Efecto Joule



$$U_2 = \Delta Q_2 V_2$$ **energía de la carga en el disco 2**

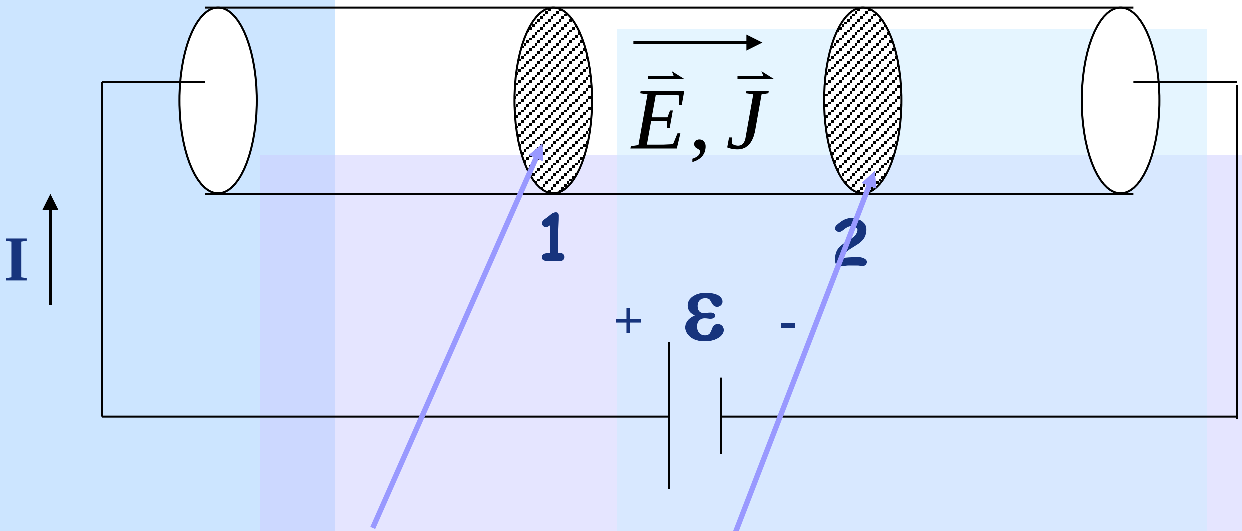
Efecto Joule



Diferencia de energía entre 1 y 2

$$\Delta U = \Delta Q_1 V_1 - \Delta Q_2 V_2$$

Efecto Joule



$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

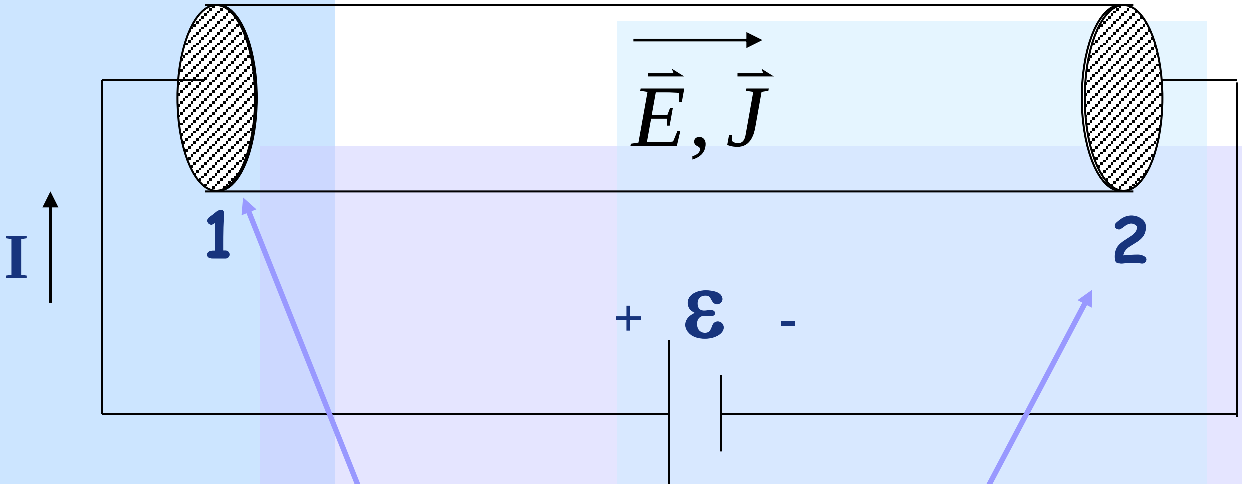
$$\Delta U = \Delta Q\left(V_1 - V_2\right)$$

Potencia es la derivada de la Energia

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\left(V_1 - V_2\right)$$

$$P = I\left(V_1 - V_2\right)$$

Efecto Joule



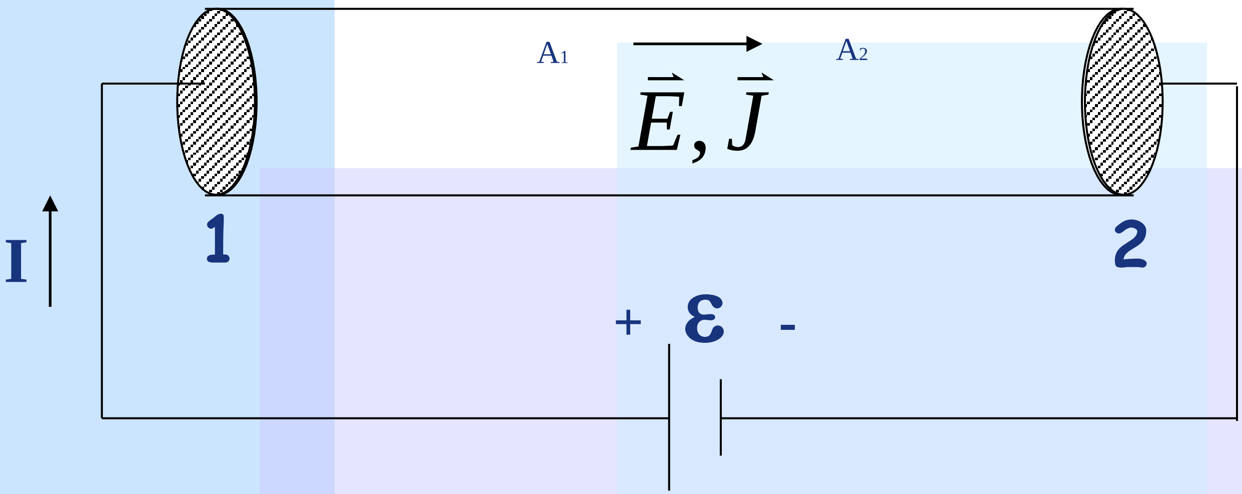
- Calor disipado
- Fem proporciona energía

Potencia es diferencia de potencial por corriente

$$\Rightarrow P = I\Delta V$$

$$\therefore P = \varepsilon \times I$$

Efecto Joule



$$\Delta V = RI \qquad \Rightarrow P = I \cdot R \cdot I = RI^2 \quad \text{ó} \quad P = \frac{\Delta V^2}{R}$$

- Calor disipado (metal se calienta)
- Fem proporciona energía

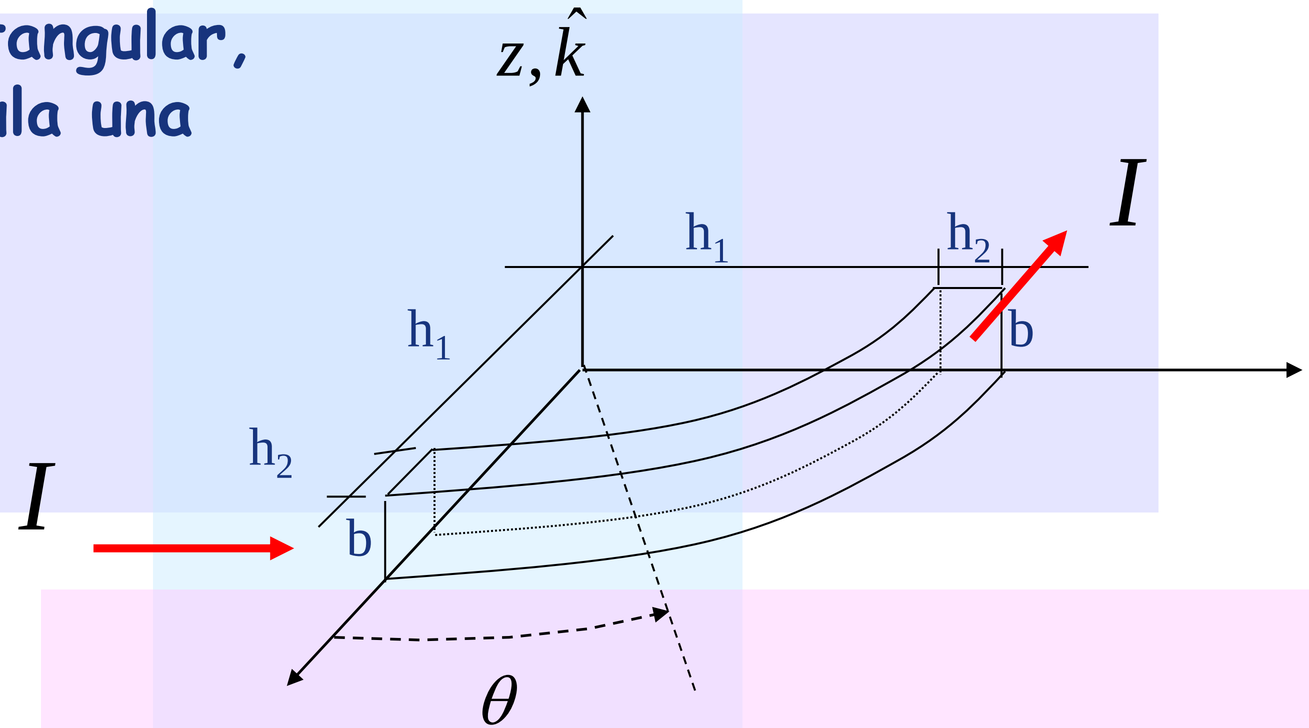
$$P = \frac{\varepsilon^2}{R}$$

Ejemplo

Una barra de cobre pandeada de conductividad *g* y sección rectangular, por la cual circula una corriente I

$$R = ?$$

$$P = ?$$

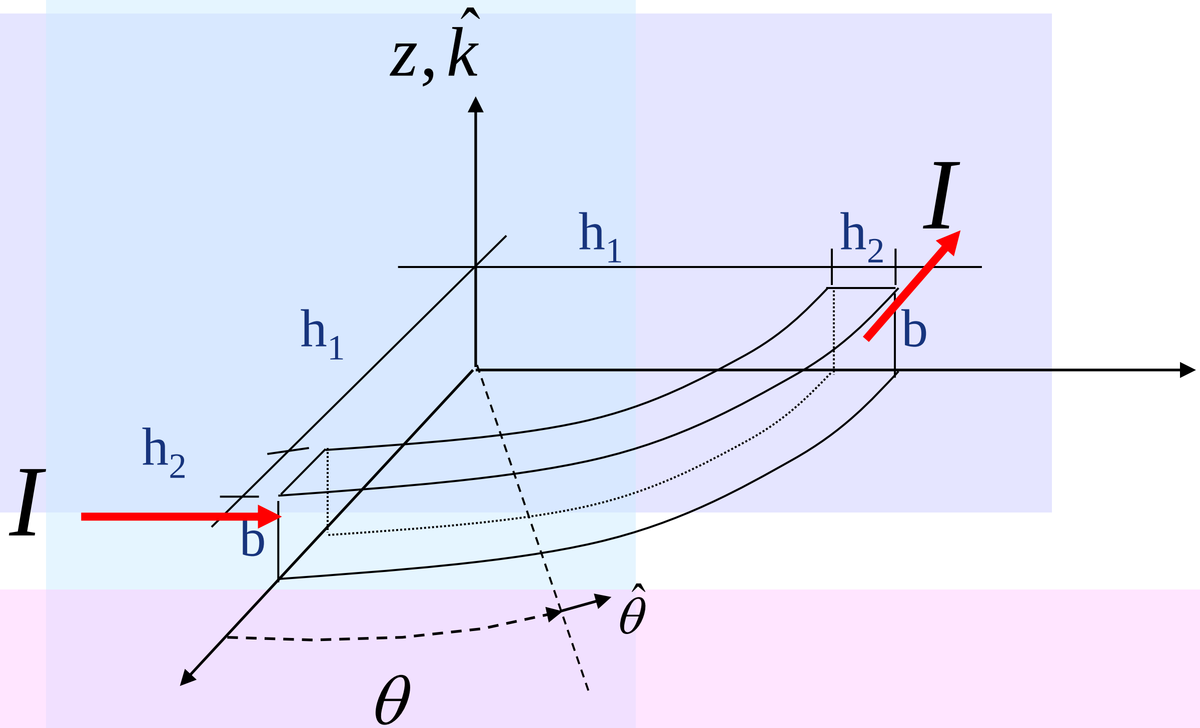


Ejemplo

Vector densidad de corriente

$$\vec{J}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{\theta}$$

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Suponemos que la corriente se distribuye en forma uniforme

$$\Rightarrow \quad \vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{bh_2} \hat{\theta}$$

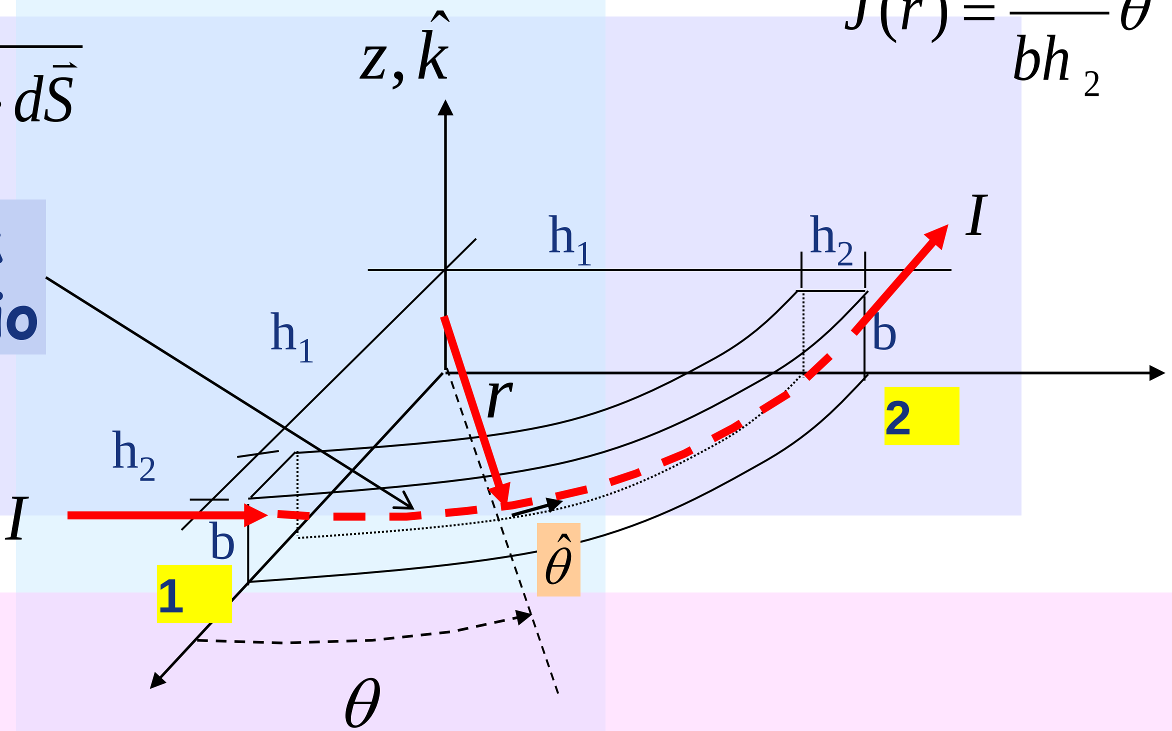
Ejemplo

Resistencia

$$R = \frac{\int_1^2 \frac{\vec{J}}{g} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{bh_2}\hat{\theta}$$

Tomando trayectoria 1-2 en el radio medio



$$r = h_1 + \frac{h_2}{2} \Rightarrow$$

$$d\vec{l} = r\, d\theta\, \hat{\theta}$$

$$\int_1^2 \frac{\vec{J}}{g} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{gbh_2} r \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo

Resistencia $R = \dfrac{\displaystyle\int_1^2 \frac{\vec{J}}{g}\cdot d\vec{l}}{\displaystyle\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}}$

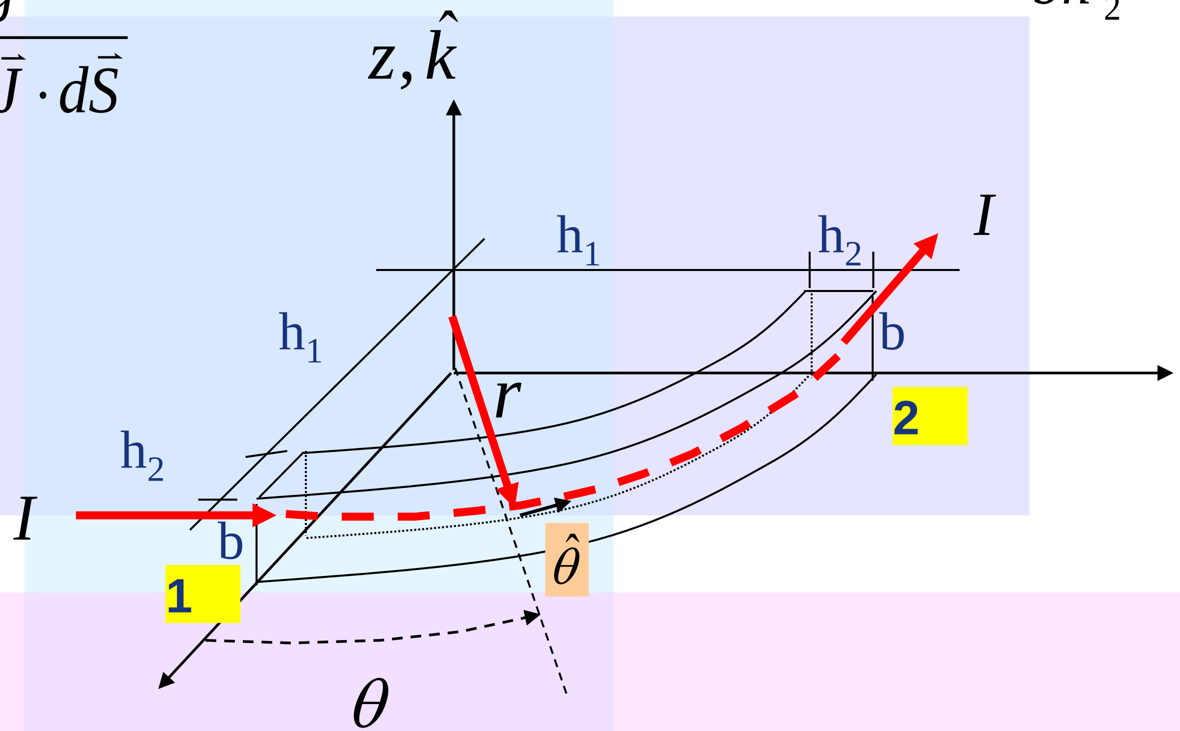
$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{bh_2}\hat{\theta}$$

$$\int_1^2 \frac{\vec{J}}{g}\cdot d\vec{l} = \frac{I}{gbh_2} r \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = I$$

$$\Rightarrow R = \frac{\dfrac{I}{gbh_2} r \dfrac{\pi}{2}}{I}$$

$$\therefore R = \frac{\pi}{2gbh_2}\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)$$



Ejemplo

Resistencia

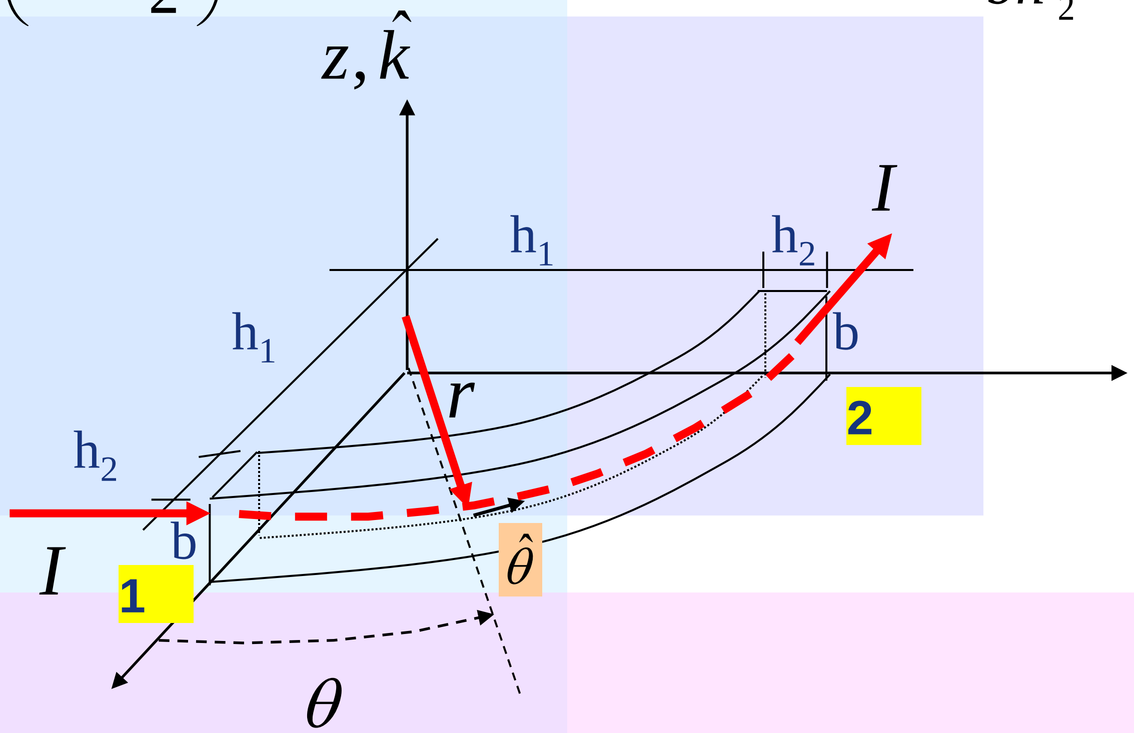
$$R = \frac{\pi}{2gbh_2}\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{bh_2}\hat{\theta}$$

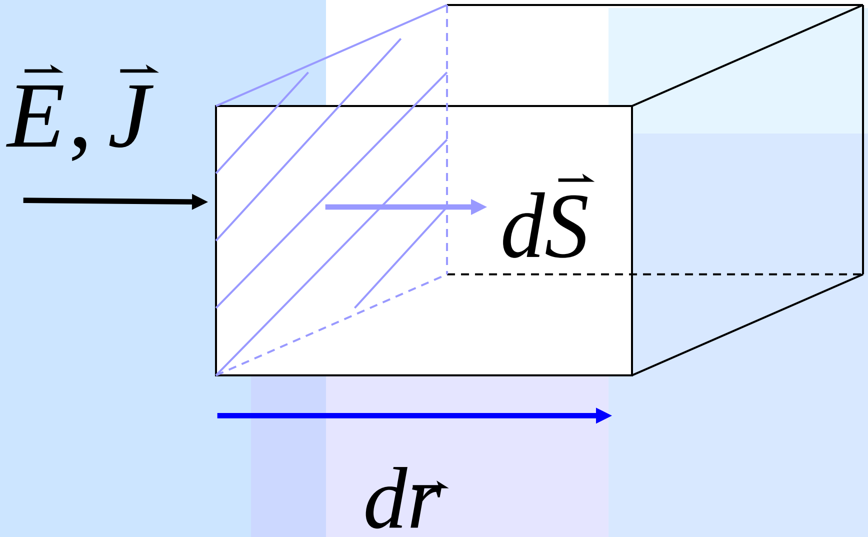
Potencia disipada

$$P = RI^2$$

$$\boxed{P = \frac{\pi}{2gbh_2}\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)I^2}$$



Efecto Joule en Términos del Campo



$$dP = I\Delta V$$

$$dP = \underbrace{\left(\vec{J}\cdot d\vec{S}\right)}_{I}\cdot\underbrace{\left(\vec{E}\cdot d\vec{r}\right)}_{\Delta V}$$

Se cumple $d\vec{s}\cdot d\vec{r} = dv \quad \Rightarrow dP = \vec{J}\cdot\vec{E}\cdot d\vec{s}\cdot d\vec{r}$

$$\Rightarrow dP = \vec{J}\cdot\vec{E}\cdot dv$$

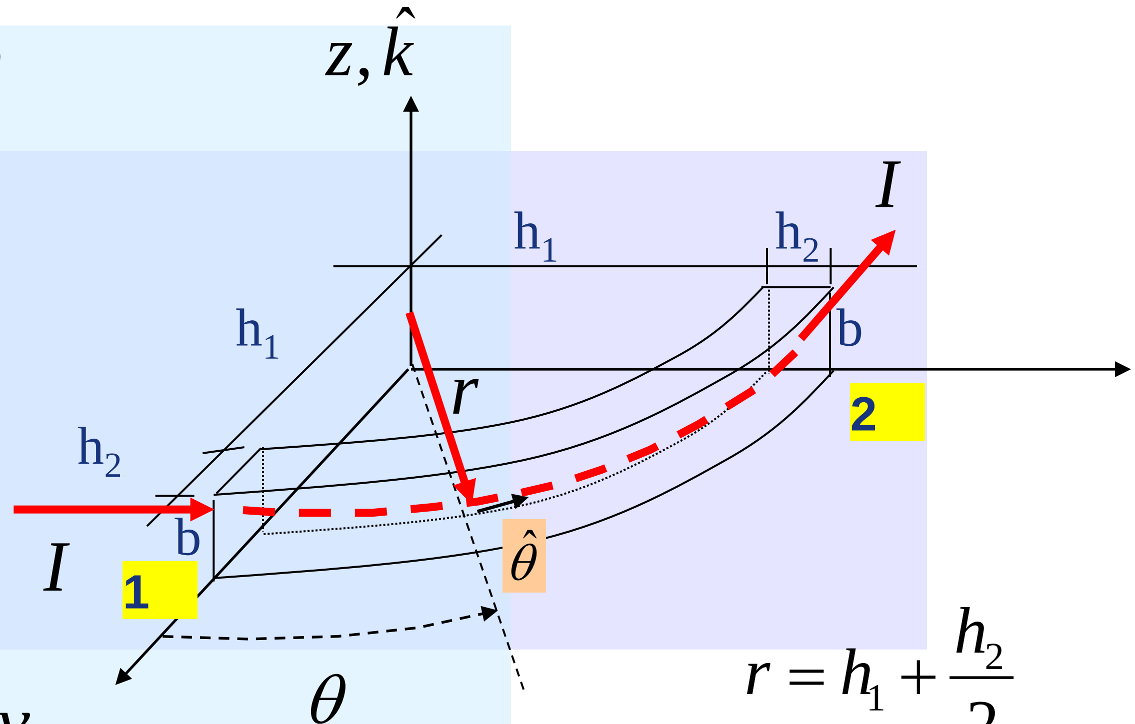
$$\therefore \quad P = \iiint_{\Omega} \vec{J}\cdot\vec{E}\, dv$$

Potencia disipada en volumen Ω

Ejemplo

Densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}) = \dfrac{I}{bh_2}\hat{\theta}$

Campo $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{I}{gbh_2}\hat{\theta}$



$r = h_1 + \dfrac{h_2}{2}$

Potencia disipada

$$P = \iiint_\Omega \vec{J} \cdot \vec{E}\, dv$$

$$P = \iiint_\Omega \frac{I}{bh_2}\hat{\theta} \cdot \frac{I}{gbh_2}\hat{\theta} dv$$

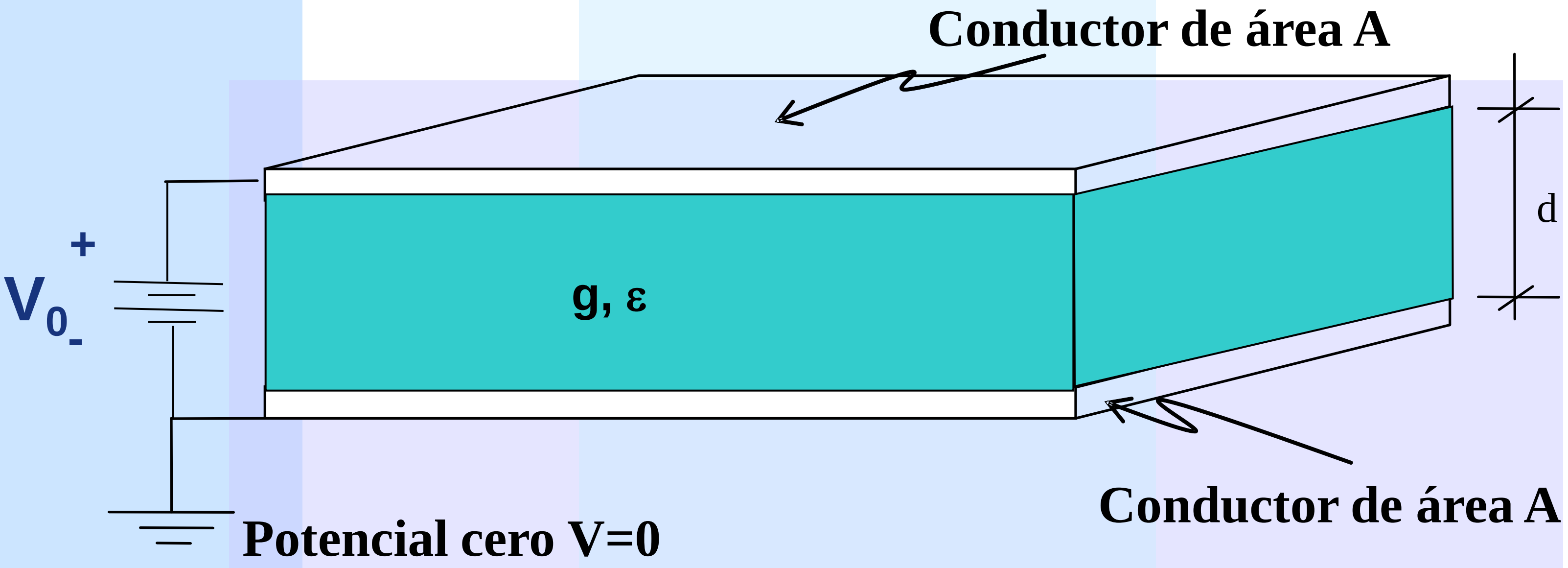
$$P = \frac{I}{bh_2} \cdot \frac{I}{gbh_2} \iiint_\Omega dv = \frac{I^2}{g(bh_2)^2} bh_2 \frac{2\pi r}{4}$$

$$\boxed{P = \frac{\pi}{2gbh_2}\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) I^2}$$

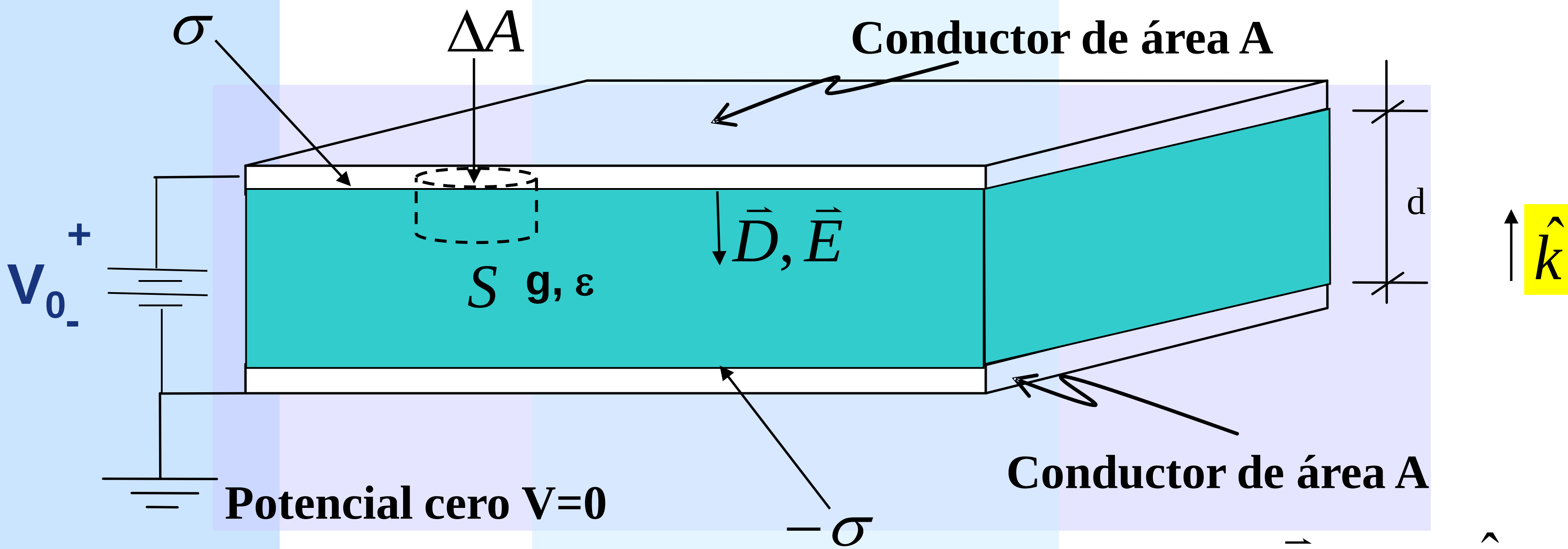
Aspectos prácticos del efecto Joule

- Calentamiento indeseado de máquinas eléctricas
- Calentamiento de artefactos produce un aumento innecesario de consumo
- Produce pérdidas de energía en general
- Está relacionado a la eficiencia energética general
- La eficiencia energética es un tema país

Ejemplo


Conductor de área A
d
+
V_0
-
g, ε
Conductor de área A
Potencial cero V=0

Ejemplo



$$\oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_T$$

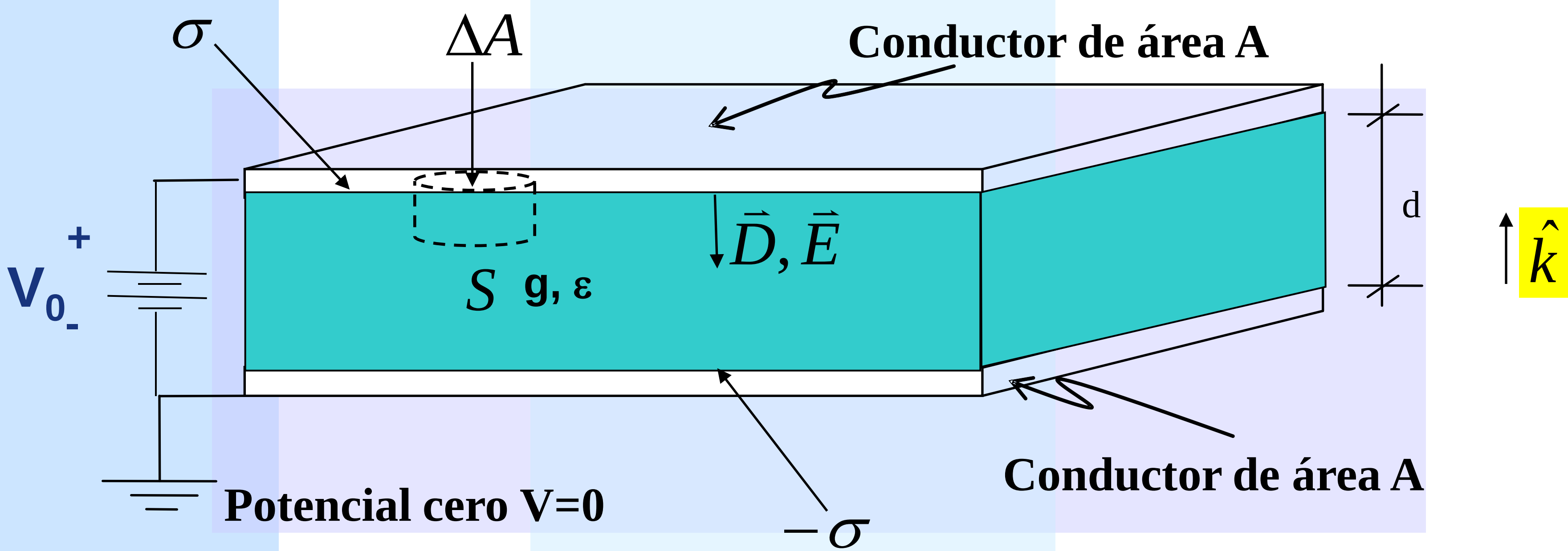
$$\begin{cases} Q_T = \sigma \Delta A \\ \oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = D\Delta A \end{cases}$$

$$\vec{D} = -\sigma \hat{k}$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$$

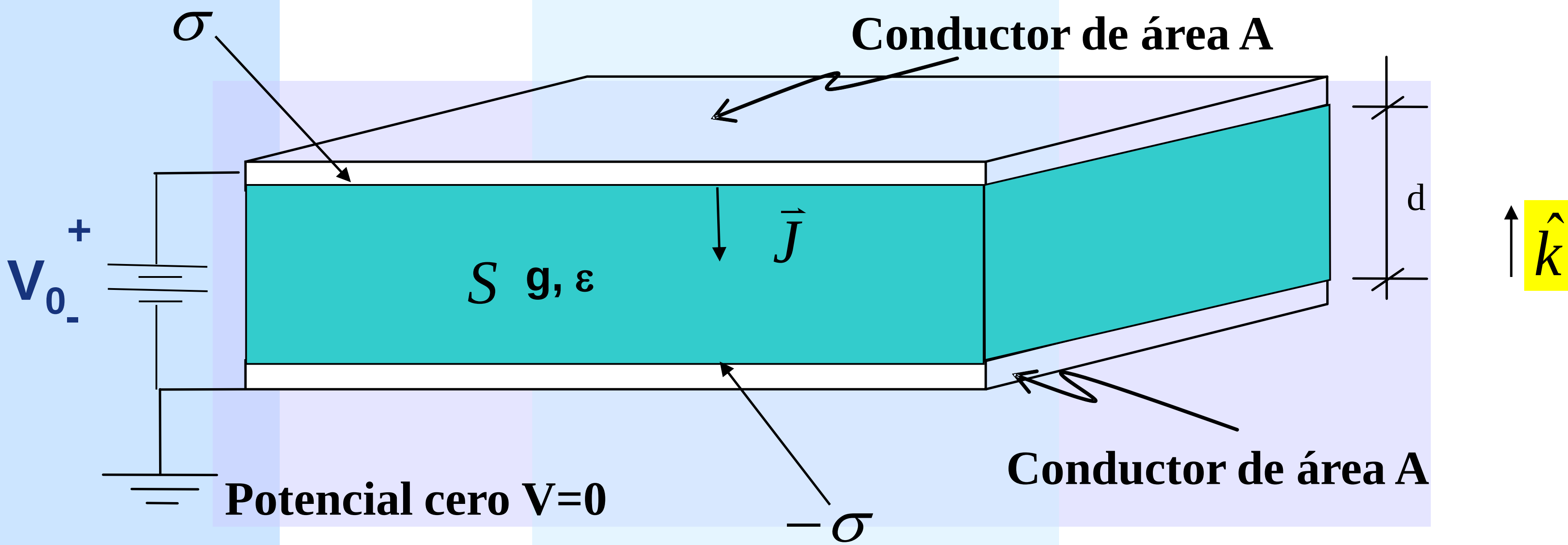
$$\vec{J} = -\frac{g\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$$

Ejemplo



$$\left.\begin{aligned} \Delta V = -\int \vec{E} \bullet dz\hat{k} \Rightarrow V_0 = \left\|\vec{E}\right\| d \\ \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{V_0}{d} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{\varepsilon V_0}{d}}$$

Ejemplo



$$\vec{J} = -\frac{g\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$$

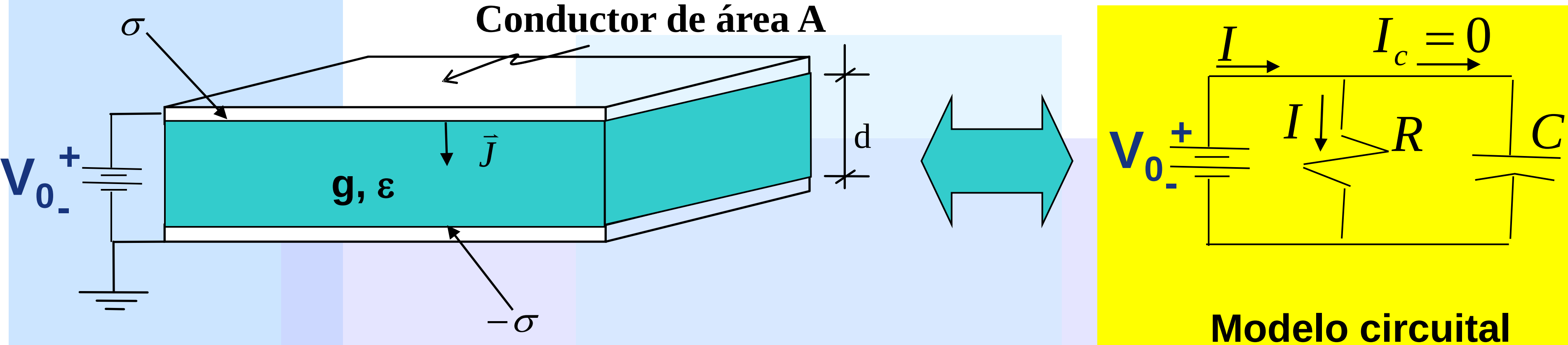
$$\sigma = \frac{\varepsilon V_0}{d}$$

Corriente a través del medio material

$$I = \iint_A \vec{J} \bullet d\vec{s} = \iint_A -\frac{g\sigma}{\varepsilon}\hat{k} \bullet ds(-\hat{k}) \Rightarrow I = \frac{g\sigma}{\varepsilon}A$$

$$\therefore I = \frac{gAV_0}{d}$$

Ejemplo



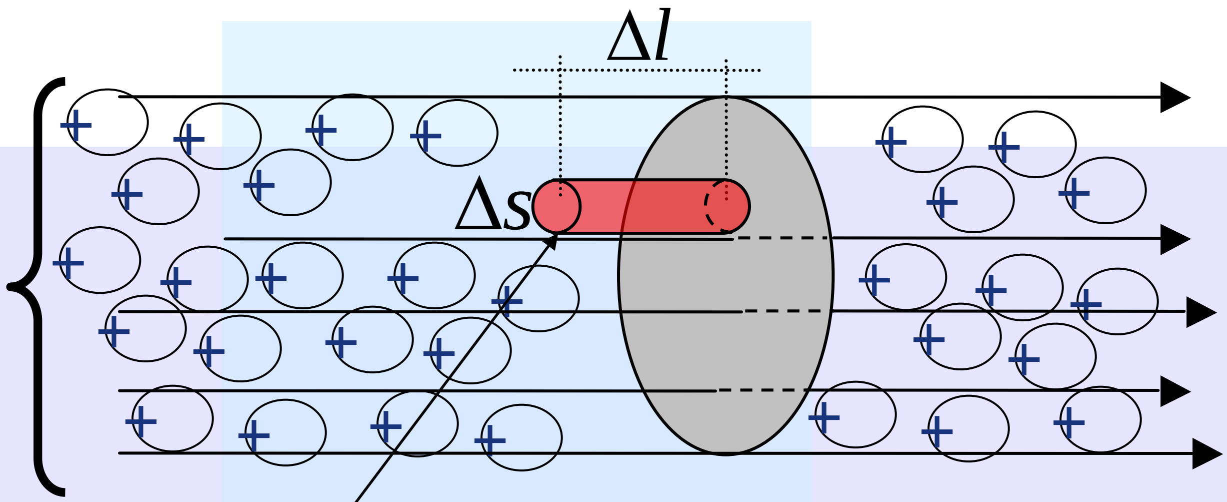
Modelo circuital

$$I = \frac{gAV_0}{d} \Rightarrow V_0 = \overbrace{\left(\frac{d}{gA}\right)}^{R} I$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon V_0}{d} \Rightarrow Q = \frac{\varepsilon A V_0}{d} \Rightarrow Q = \underbrace{\left(\frac{\varepsilon A}{d}\right)}_{C} V_0$$

Corriente de Convección

Desplazamiento de partículas de masa m y carga q a velocidad u



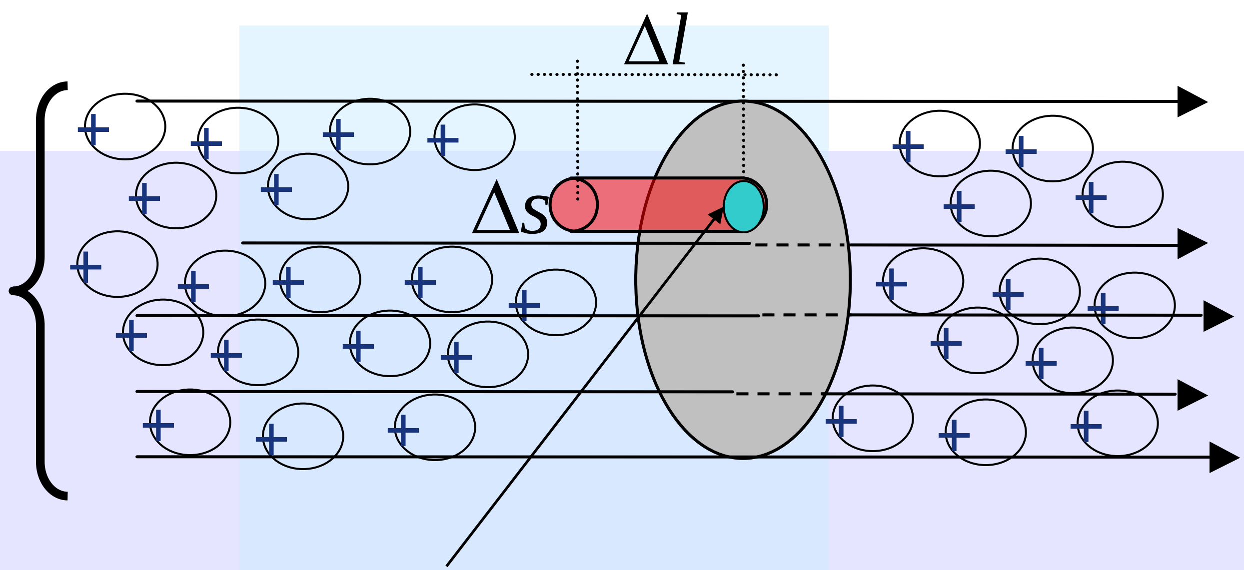
Volumen del cilindro $\Delta v = \Delta s \times \Delta l$

Sea n el número de cargas por unidad de volúmen, luego la **densidad de carga en el volumen** Δv ***es*** ρ_c *=n x q [C/m^3]*

Carga total contenida en el volumen Δv ***es*** $\Delta q = \rho_c \Delta s \Delta l$

Corriente de Convección

Desplazamiento de partículas de masa m y carga q a velocidad u



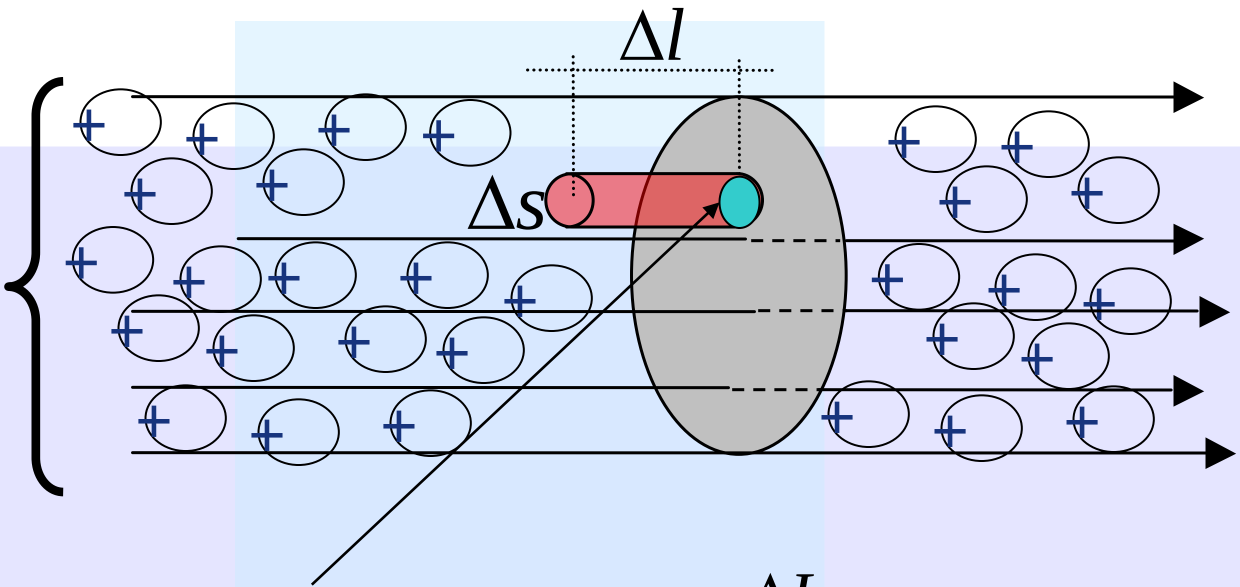
Cantidad de corriente que atraviesa trozo de área Δs es

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_c \Delta S \times \Delta l}{\Delta t} = \rho_c \Delta S \,\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Luego la corriente por unidad de área Δs es $\quad \dfrac{\Delta I}{\Delta s} = \rho_c \dfrac{\Delta l}{\Delta t} = \rho_c u$

Corriente de Convección

Desplazamiento de partículas de masa m y carga q a velocidad u

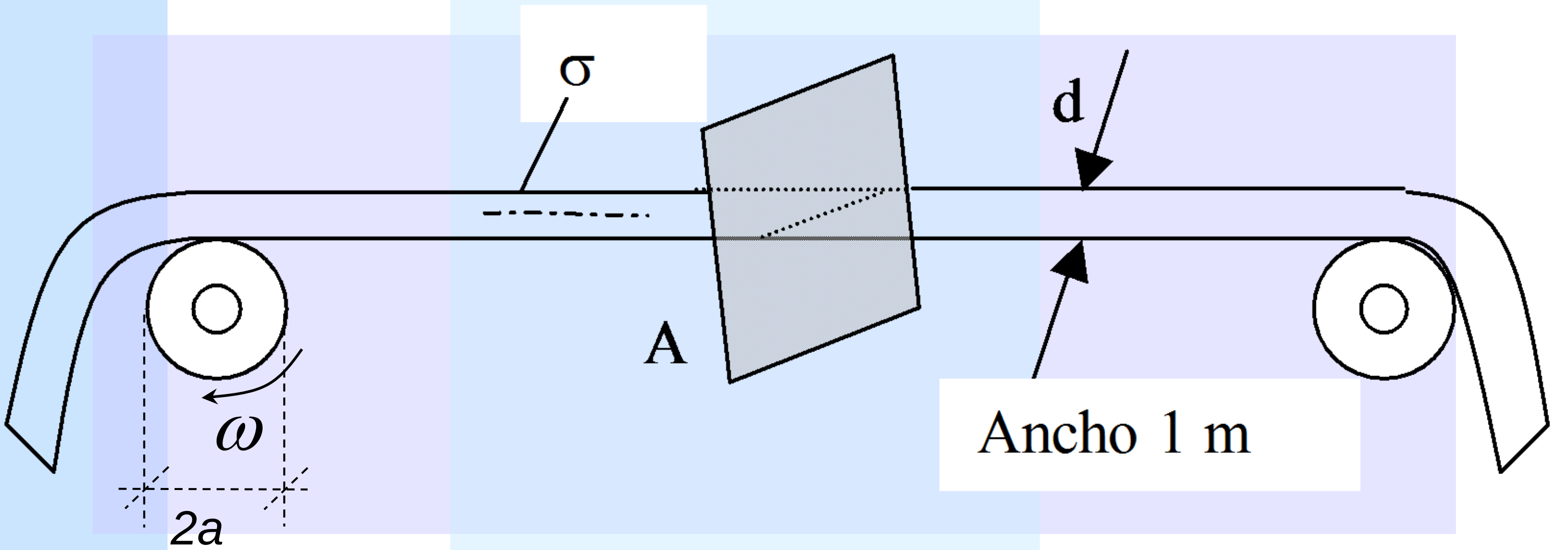


Luego la corriente por unidad de área Δs *es* $\dfrac{\Delta I}{\Delta s} = \rho_c u$

Luego el vector densidad de corriente *es* $\vec{J} = \rho_c \vec{u}$

Corriente de Convección

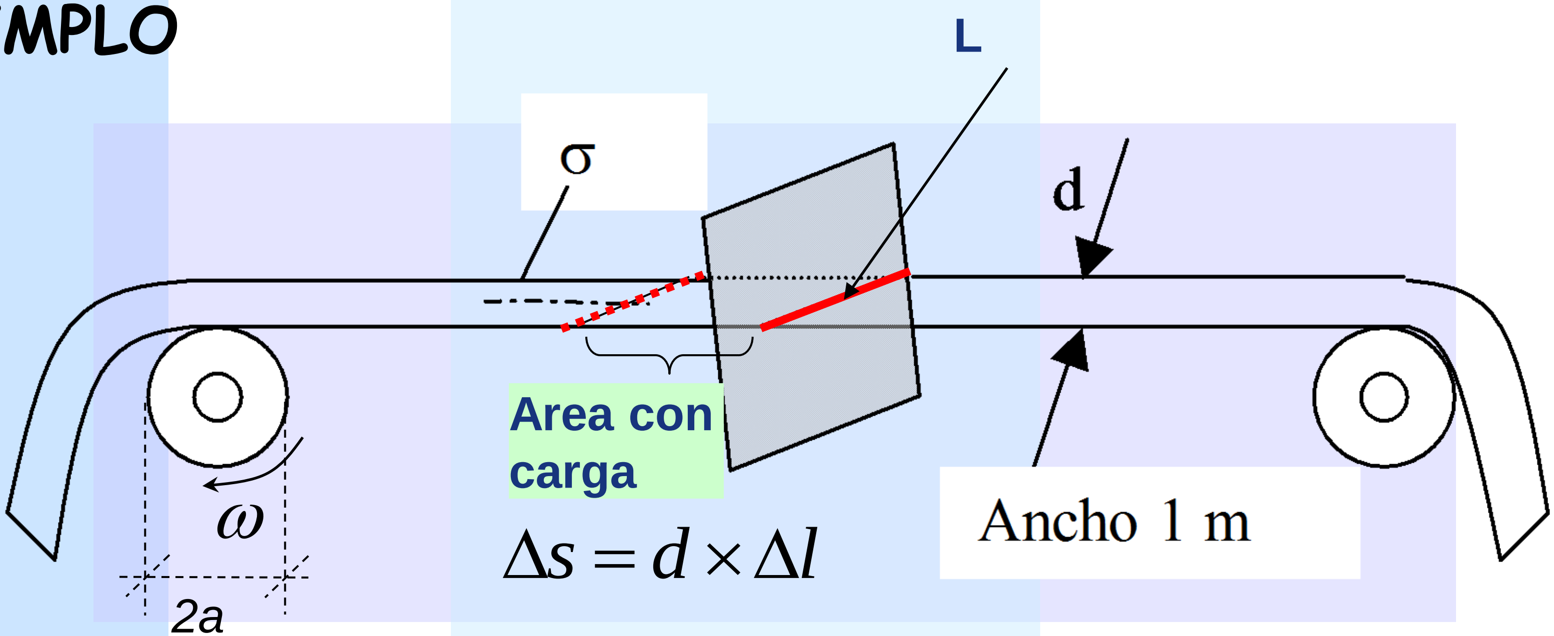
EJEMPLO



I=?

Corriente de Convección

EJEMPLO



$$\Delta s = d \times \Delta l$$

Carga total contenida en superficie Δs **es** $\Delta q = \sigma \Delta s = \sigma d \times \Delta l$

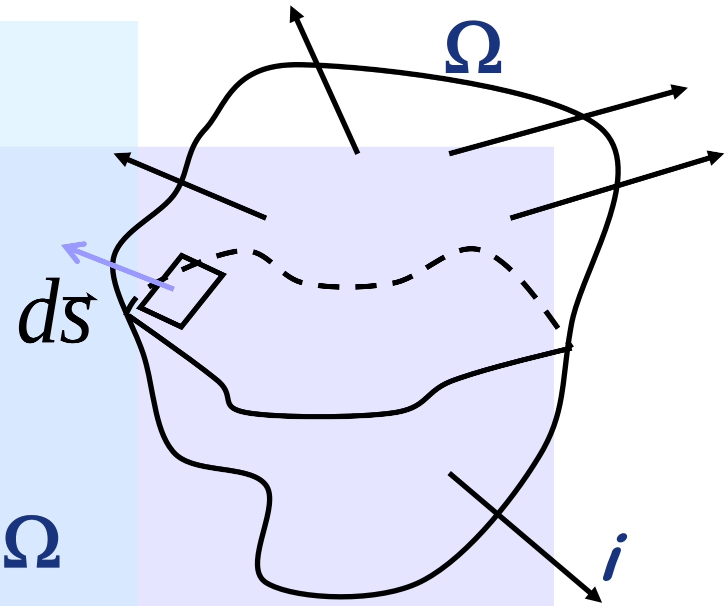
Cantidad de corriente que atraviesa línea L es $\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\sigma d \times \Delta l}{\Delta t} = \sigma d \frac{\Delta l}{\Delta t}$

$\Delta I = \sigma d a \omega$ **Vector densidad de corriente superficial** $\vec{K} = \sigma a \omega \hat{i}$

Ecuación de Continuidad

Corriente saliendo de volumen Ω

$$I_{salida} = \oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Q_{in}: carga contenida en el volumen Ω

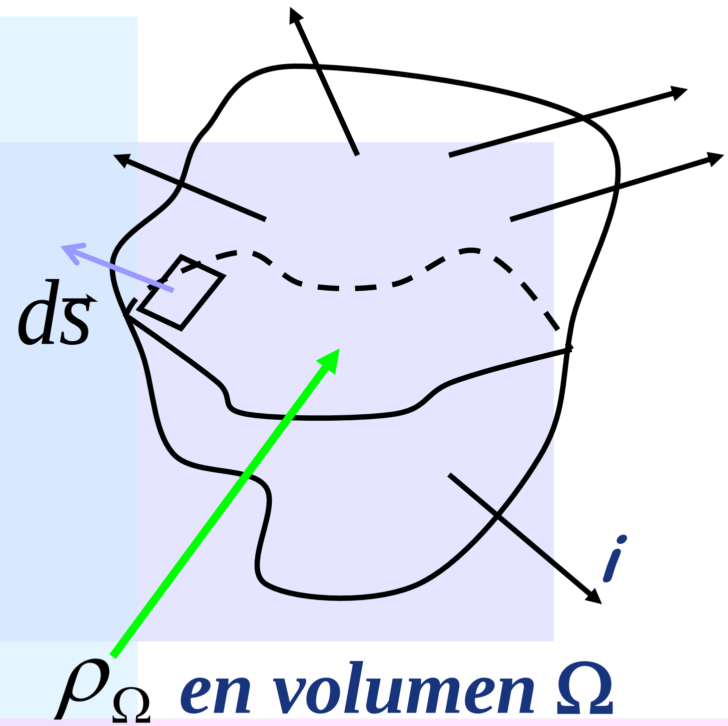
$$I_{salida} = -\frac{dQ_{in}}{dt}$$

Corriente que sale corresponde a la variación de carga encerrada en el volumen

Ecuación de Continuidad

$$Q_{in} = \iiint_{\Omega} \rho_{\Omega}(\vec{r})\,dV \qquad (5.30)$$

$$I_{salida} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho_{\Omega}(\vec{r})\,dV \qquad (5.31)$$



volumen Ω es fijo (no depende de t)

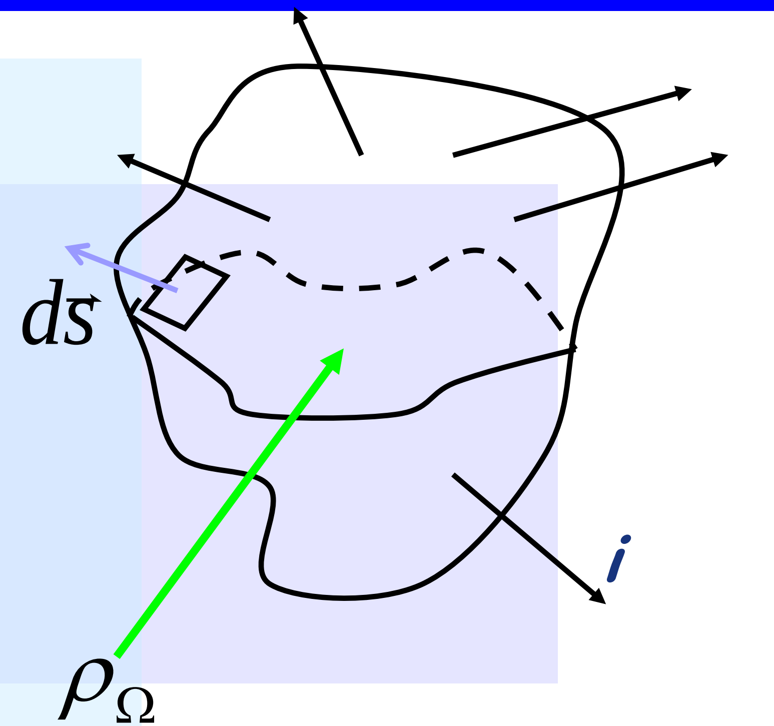
$$\Rightarrow \quad I_{salida} = -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV$$

Ecuación de Continuidad

teníamos $$-\frac{dQ_{in}}{dt} = I_{salida}$$

$$\Rightarrow -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV = \oiint_{S(\Omega)} \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{J}dV$$

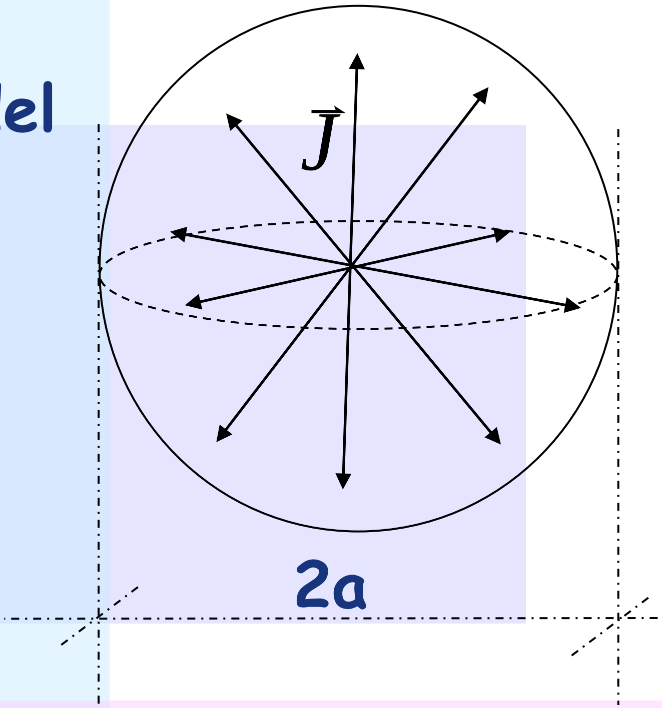


$$\boxed{\Rightarrow \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = 0}$$

Ecuación de continuidad

Ejemplo

Calcular corriente total saliendo del círculo de radio a si $\vec{J} = J_0 \vec{r}$



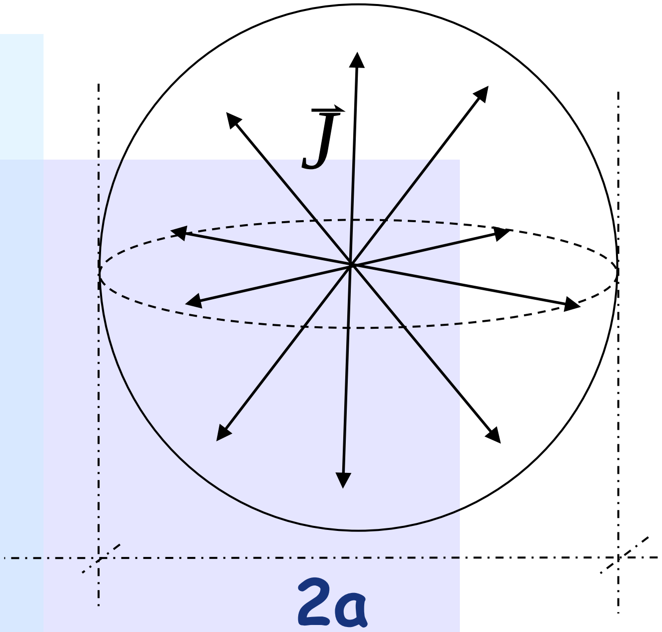
$$I = \oiint_S J_0 a \hat{r} \bullet d\vec{s}$$

$$I = 4\pi\, a^2 J_0 a$$

$$I = 4\pi\, a^3 J_0$$

Ejemplo

Si se tiene una densidad de corriente



$$\vec{J} = J_0 \vec{r}$$

Calcular densidad de carga en volumen

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 J_0 r \hat{r}\right) = \frac{1}{r^2} J_0 3 r^2 = 3 J_0$$

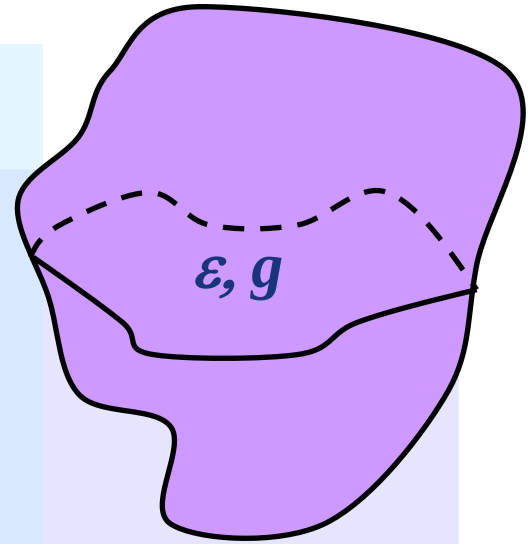
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) = -3 J_0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec{r}, t) = -3 J_0 t + \rho_0(\vec{r})$$

Ecuación de Continuidad en Medios materiales

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{J} = g\,\vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = g\nabla \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \frac{g}{\varepsilon}\nabla \cdot \vec{D} = \frac{g}{\varepsilon}\rho(t)$$



volumen Ω

$$\frac{g}{\varepsilon}\rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-t/T_R}$$

$T_R = \varepsilon / g$ **Constante de relajación**

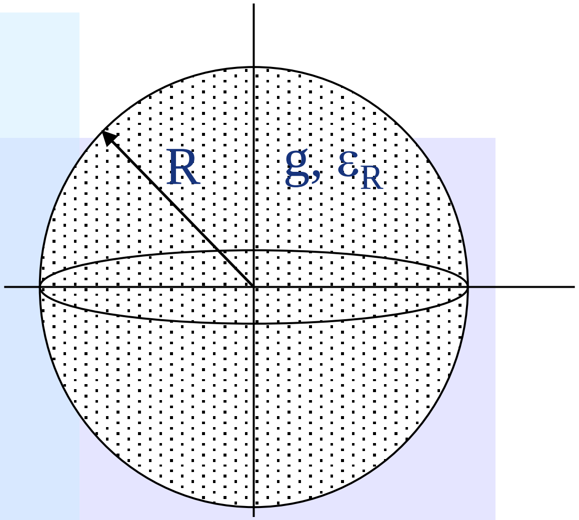
Ejemplo

$$\frac{g}{\varepsilon}\rho(t)+\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=0$$

$$\Rightarrow \iiint_V \left(\frac{g}{\varepsilon}\rho(t)+\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}\right)dV=0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{\varepsilon}\underbrace{\iiint_V \rho(t)dV}_{Q(t)}+\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint_V \rho(t)dV}_{Q(t)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{\varepsilon}Q(t)+\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=0\Rightarrow Q(t)=Q_0e^{-t/T_R}$$



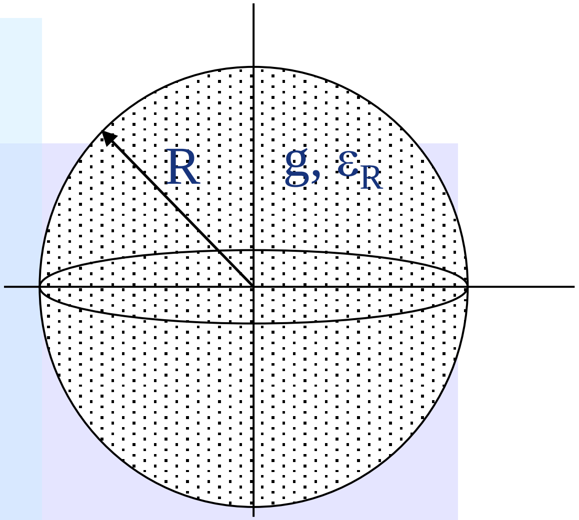
Q_0 inicial

Ecuación de Continuidad en Medios materiales

EJEMPLO

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/T_R}$$

	cobre	Cuarzo fusionado
T_R	$1.53\times10^{-19}\,seg$	51.2 días



Q_0 inicial