



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



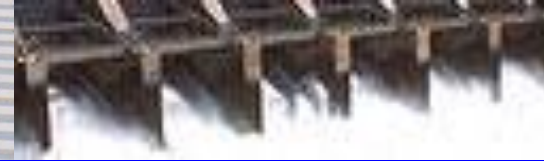
FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 16

Magnetostática I

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

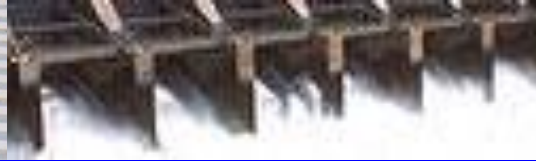


INDICE

- Introducción
- Fuerza sobre una carga
- Campo magnético
- Campo Línea de corriente infinita
- Campo Distribuciones de corriente
- Campo carga en movimiento
- Campo Magnético Terrestre

Wassily Kandinsky,
"Amarillo, rojo y azul",
1925





Introducción

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

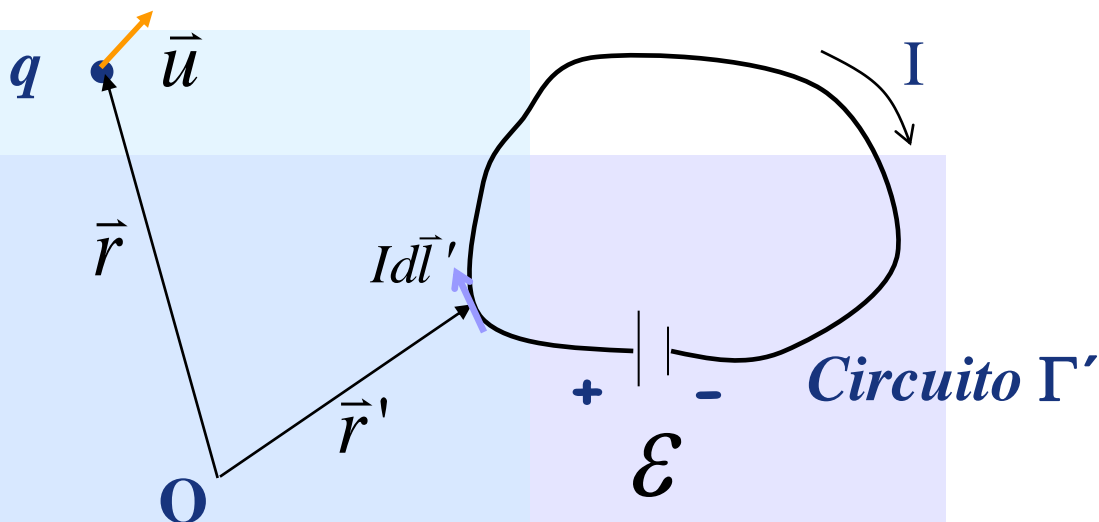
Corrientes constantes

Estudiaremos primero régimen estacionario,
i.e., corrientes constantes



Fuerza sobre una carga

Fuerza sobre q



Se encuentra experimentalmente que

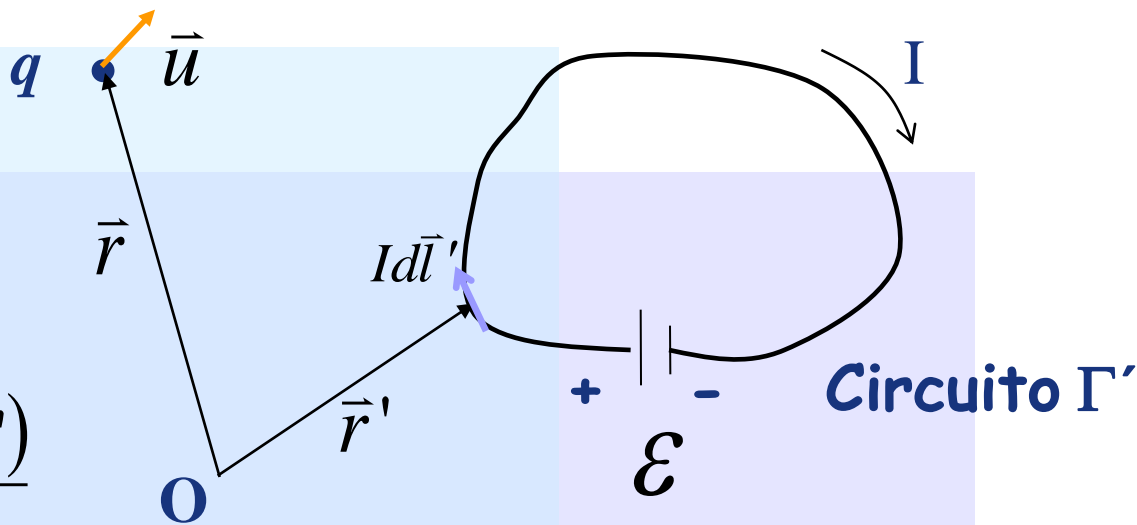
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H / m]$ permeabilidad del aire (constante)



Campo magnético

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Se define el campo magnético
producido por circuito Γ'

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Fuerza de Lorentz

Fuerza de Lorentz

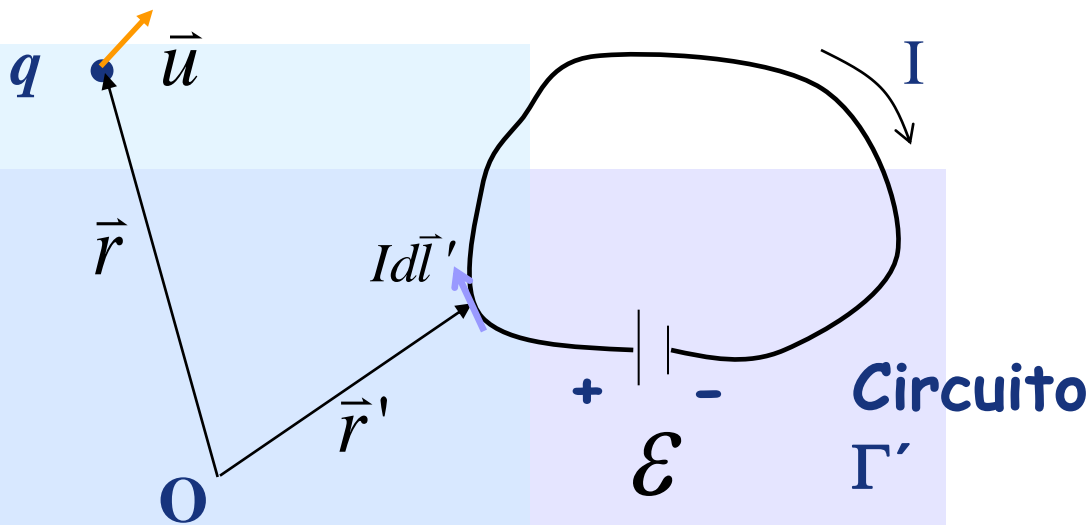
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Unidades del campo

$$[F] = [q][V][B] \Rightarrow [B] = \frac{[F]}{[q][V]} = \frac{[N]}{[C][m/seg]}$$

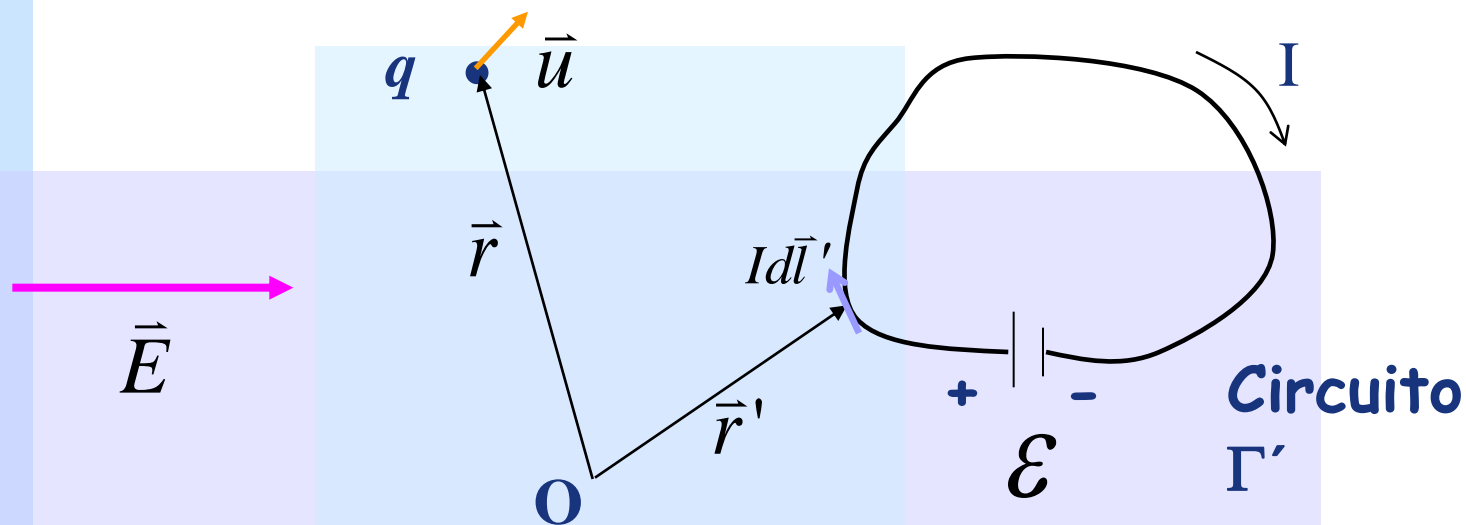
$$1 \text{ Tesla} = [T] = \left[\frac{N}{C \times m/seg} \right]$$

$$1[T] = 10^4 [G] Gauss$$





Fuerza de Lorentz



Cuando además hay un campo eléctrico la Fuerza de Lorentz es

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$



Ejemplo: Fuerza sobre una carga

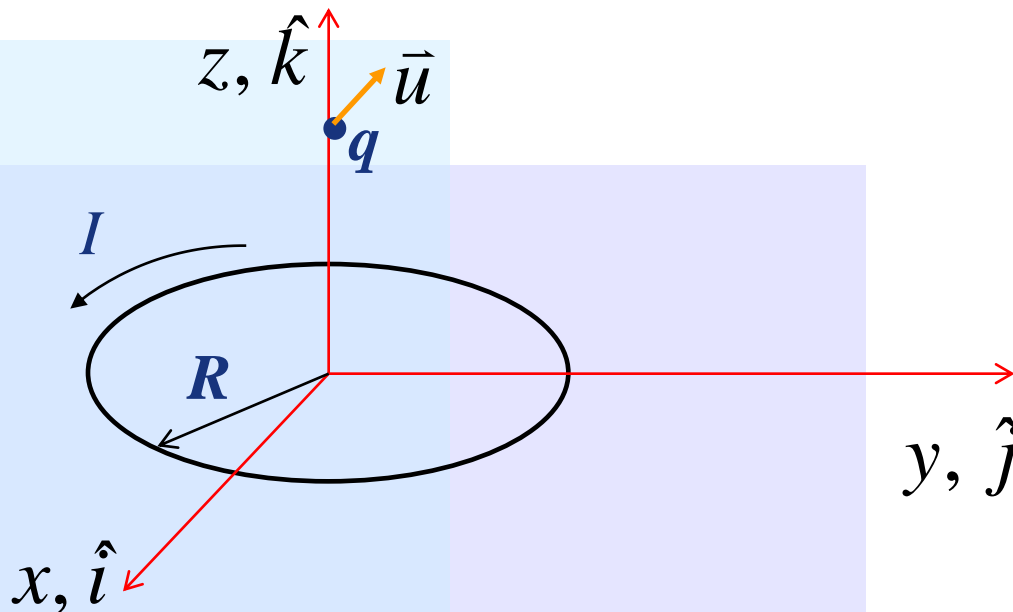
Calcular la fuerza sobre la carga q en los casos:

$$\vec{u} = 0$$

$$\vec{u} = v_o \hat{k}$$

$$\vec{u} = v_o \hat{j}$$

$$\vec{u} = v_o \hat{i}$$



$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

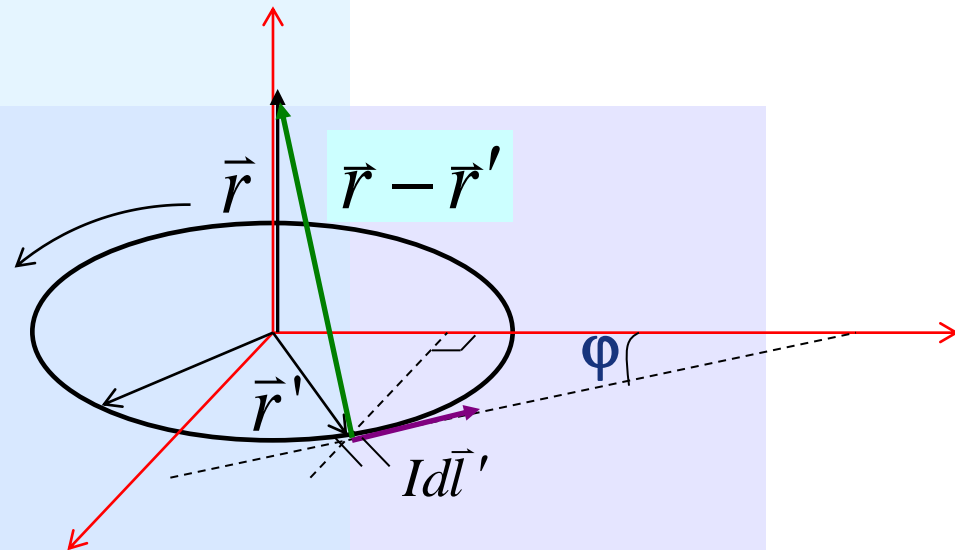
$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Regla de la mano derecha

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



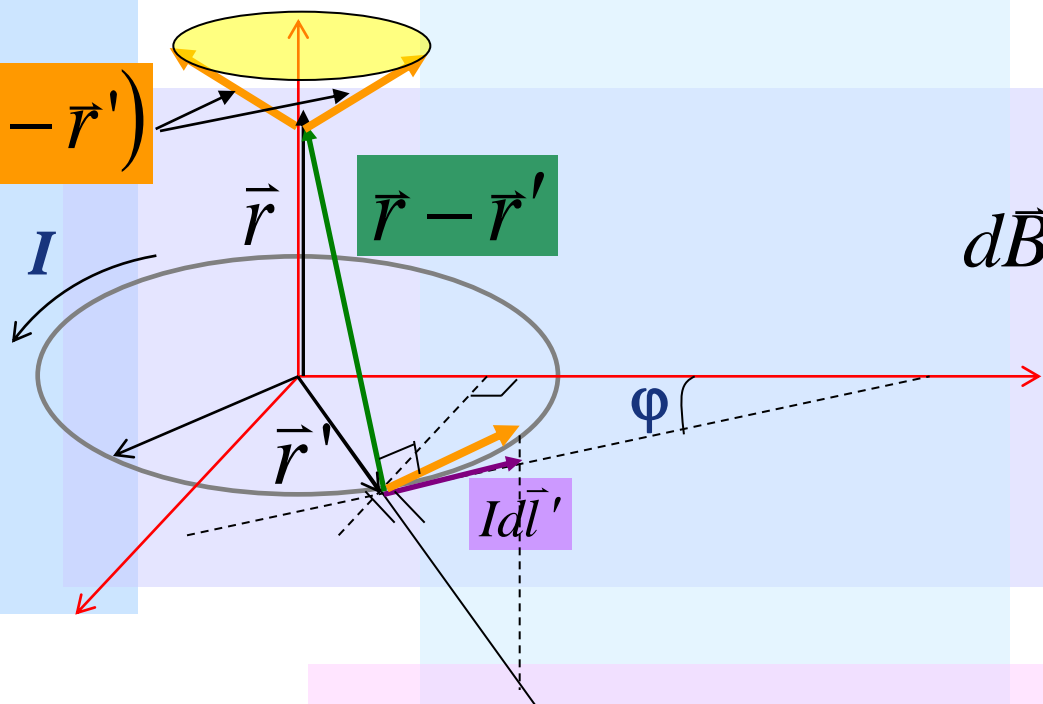
Dirección de campo está dado por el producto

$$I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$



Regla de la mano derecha

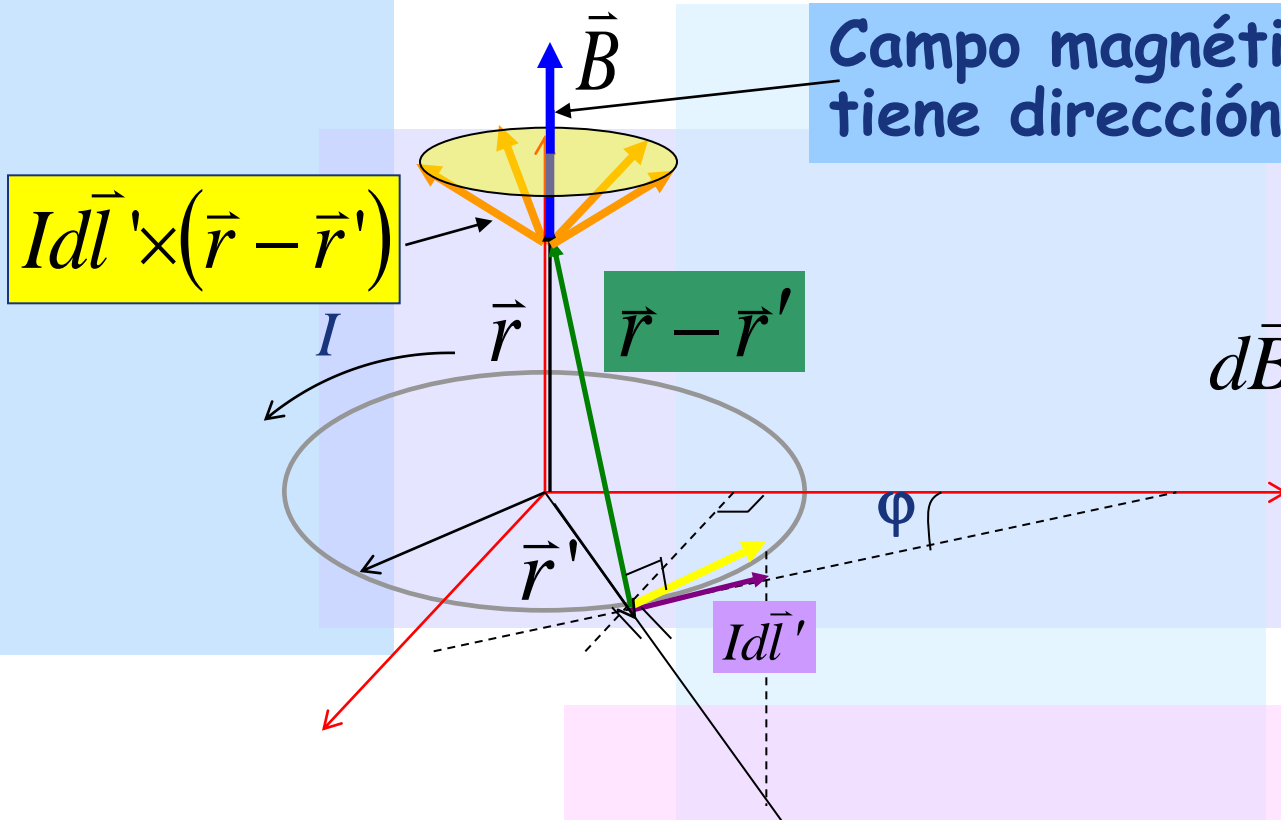
$$Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Regla de la mano derecha



Campo magnético resultante sólo tiene dirección según eje z.

$$Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

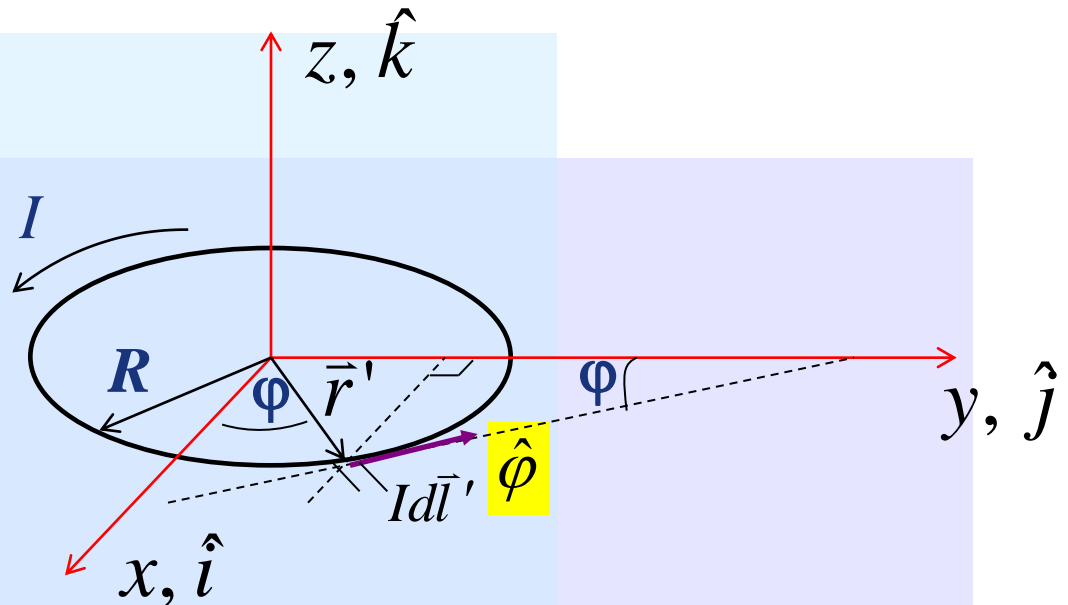
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Ejemplo

Calculemos \vec{B} :

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



$$Id\vec{l}' = Idl' \hat{\phi} = Idl' (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$$

$$Id\vec{l}' = IR d\varphi (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$$



Ejemplo

Calculemos \vec{B} :

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

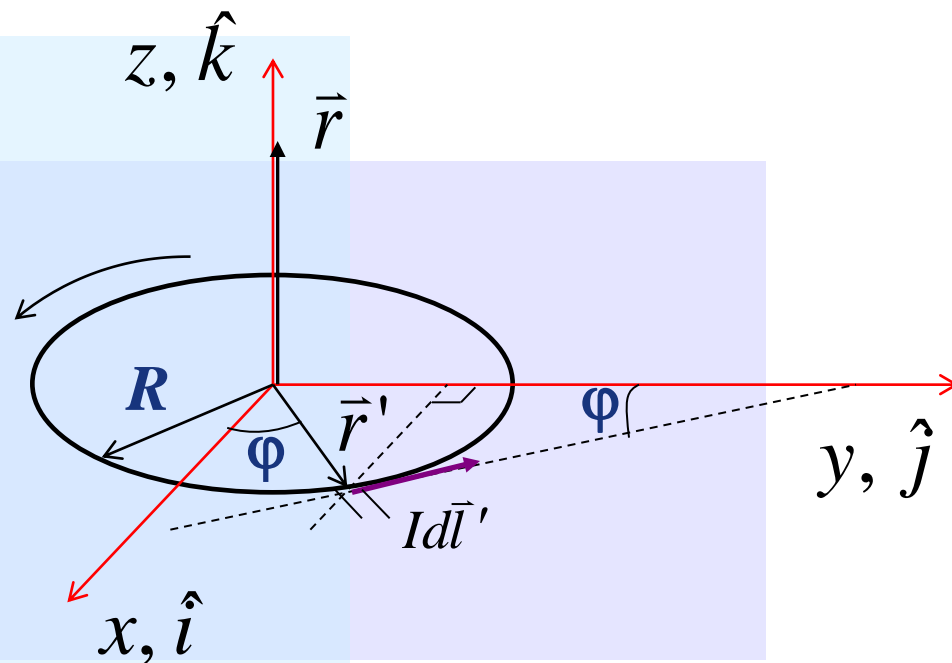
$$\vec{r}' = R\hat{\rho} = R(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j})$$

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R\cos\varphi\hat{i} - R\sin\varphi\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = [R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi + z^2]^{1/2}$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = [R^2 + z^2]^{1/2}$$



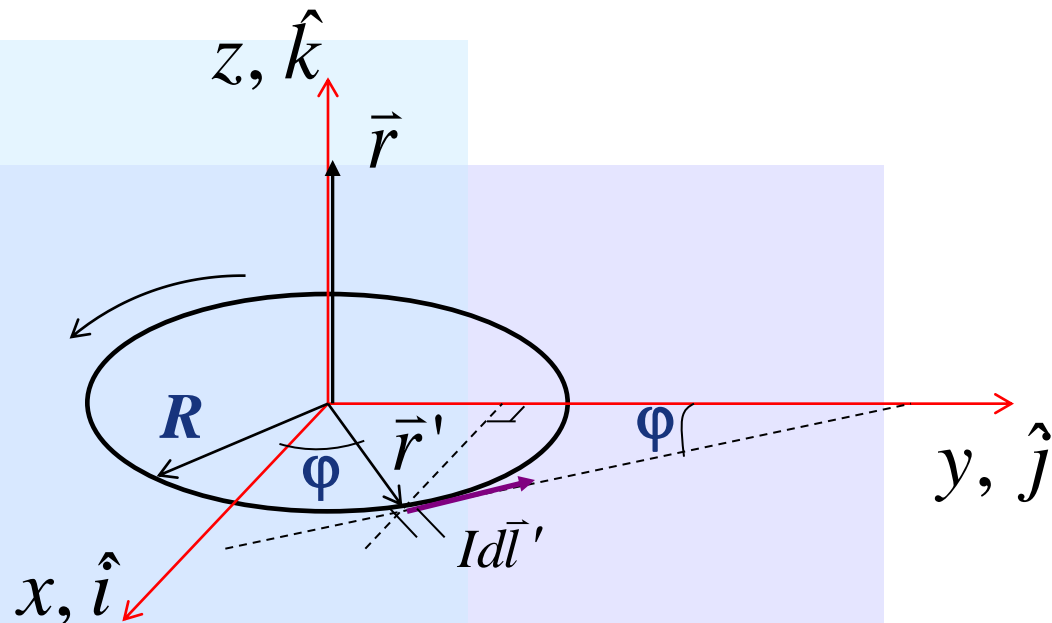


Ejemplo

Calculemos \vec{B} :

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Circuito Γ'
 $\varphi = [0, 2\pi]$



$$\oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{[R^2 + z^2]^{3/2}} (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) \times (-R \cos \varphi \hat{i} - R \sin \varphi \hat{j} + z \hat{k})$$

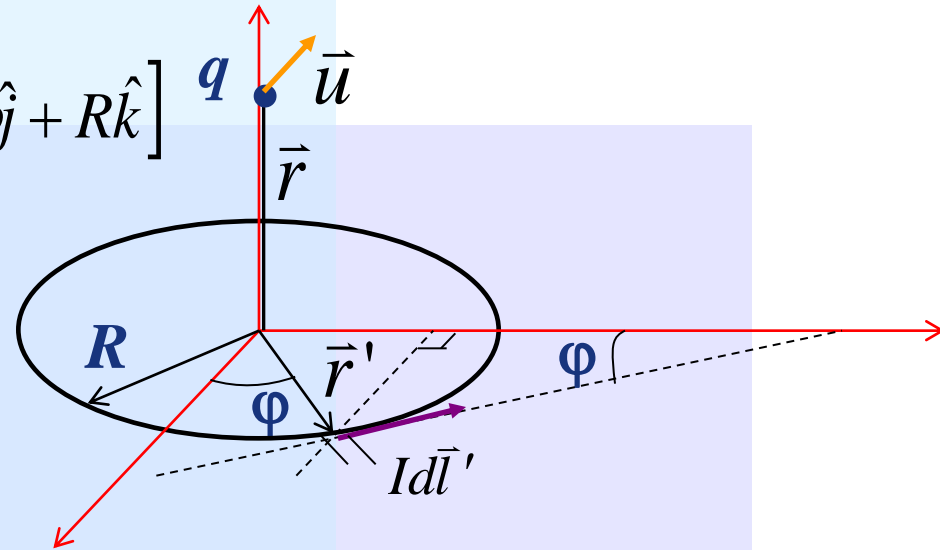
$$\Rightarrow \oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR d\varphi}{4\pi [R^2 + z^2]^{3/2}} [R \sin^2 \varphi \hat{k} + z \sin \varphi \hat{j} + R \cos^2 \varphi \hat{k} + z \cos \varphi \hat{i}]$$



Ejemplo

$$\oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR d\varphi}{4\pi [R^2 + z^2]^{3/2}} [z \cos \varphi \hat{i} + z \sin \varphi \hat{j} + R \hat{k}]$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2 2\pi}{4\pi [R^2 + z^2]^{3/2}} \hat{k}$$



Campo sólo tiene componente según z!

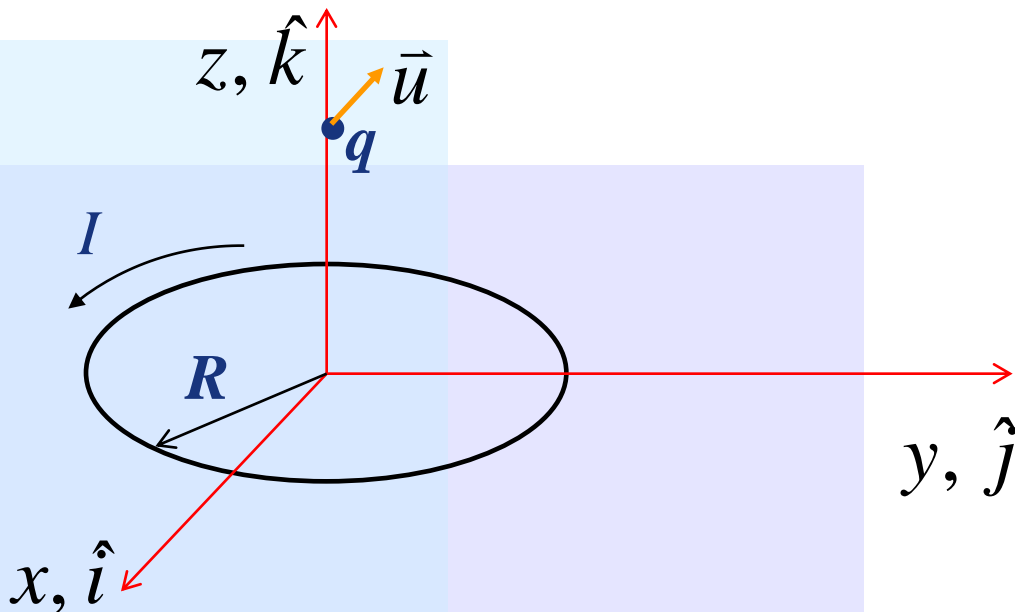
$$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{u} \times \frac{\mu_0 IR^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} \hat{k}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{q\mu_0 IR^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} \vec{u} \times \hat{k}$$



Ejemplo: Fuerza sobre una carga

$$\vec{F} = \frac{q\mu_0 I R^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} \vec{u} \times \hat{k}$$



La fuerza sobre la carga q en cada caso es:

$$\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0$$

$$\vec{u} = v_0 \hat{k} \Rightarrow \vec{F} = 0$$

$$\vec{u} = v_0 \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{q\mu_0 I R^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} v_0 \hat{i}$$

$$\vec{u} = v_0 \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{q\mu_0 I R^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} v_0 \hat{j}$$



Campo Magnético Línea Infinita

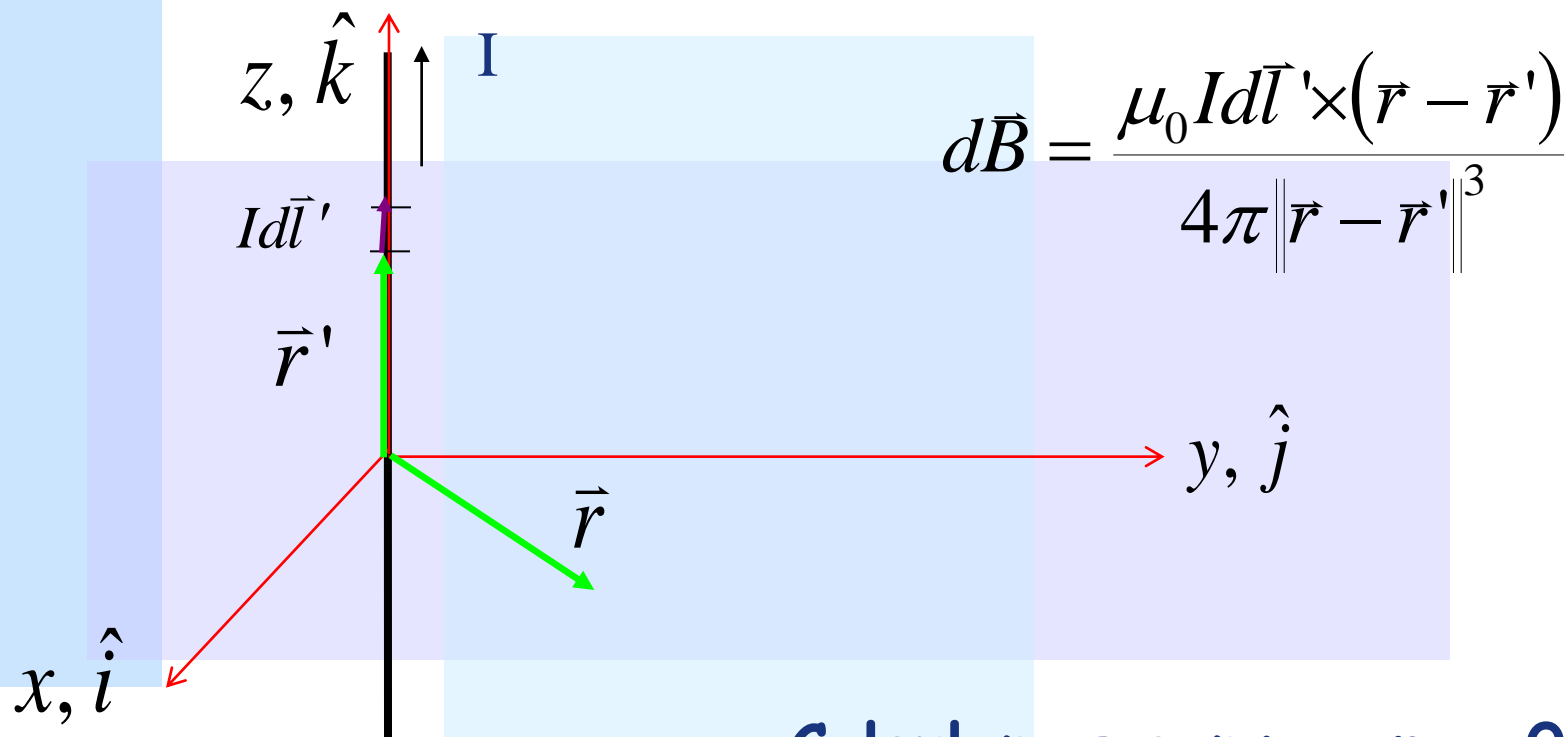


$$\vec{B} = ?$$

Dado que el conductor es infinito, el campo no varía según z .



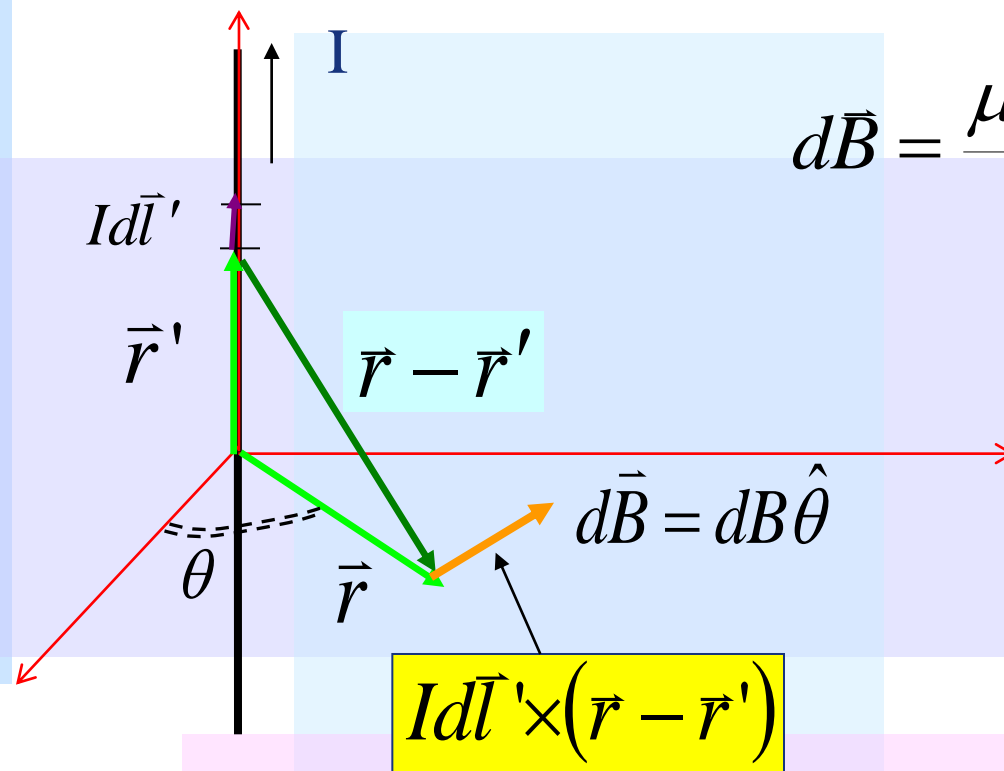
Campo Magnético Línea Infinita



Calculemos campo en $z=0$



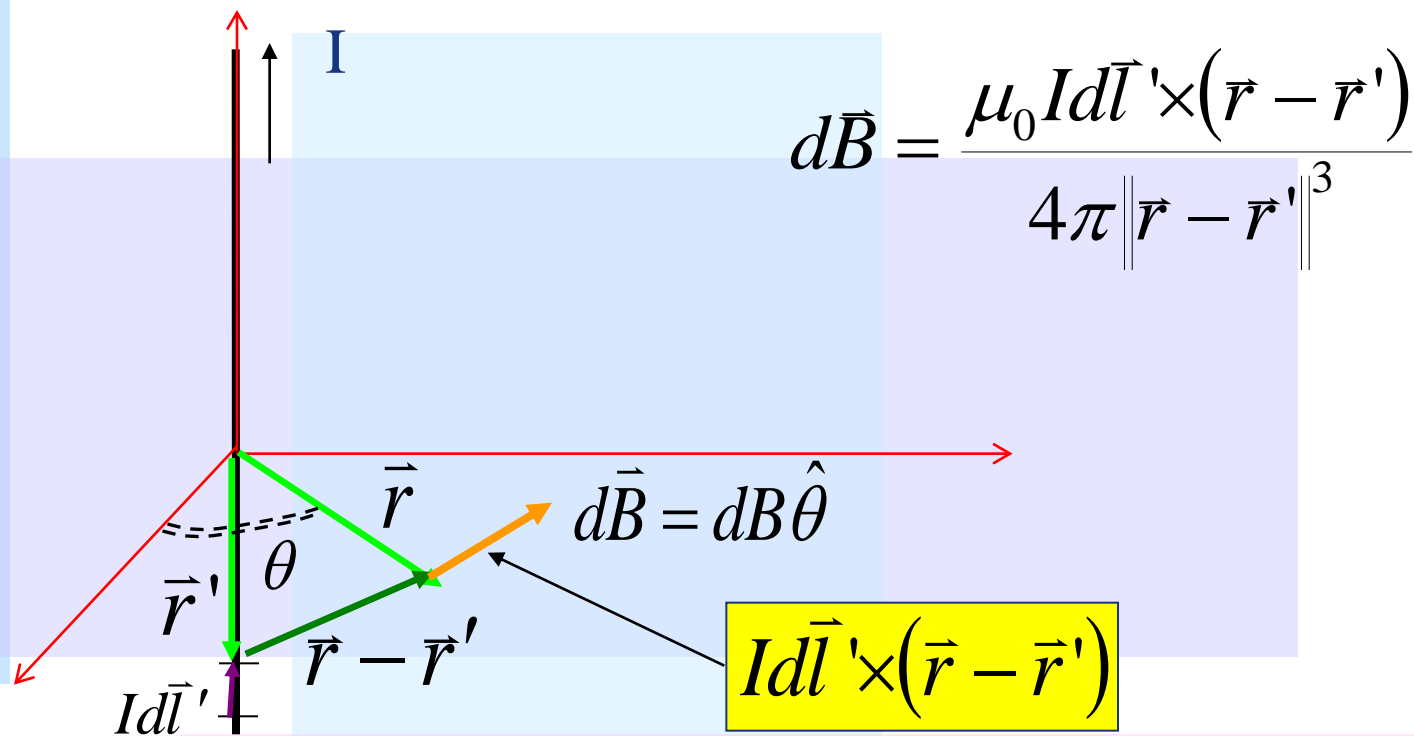
Campo Magnético Línea Infinita



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



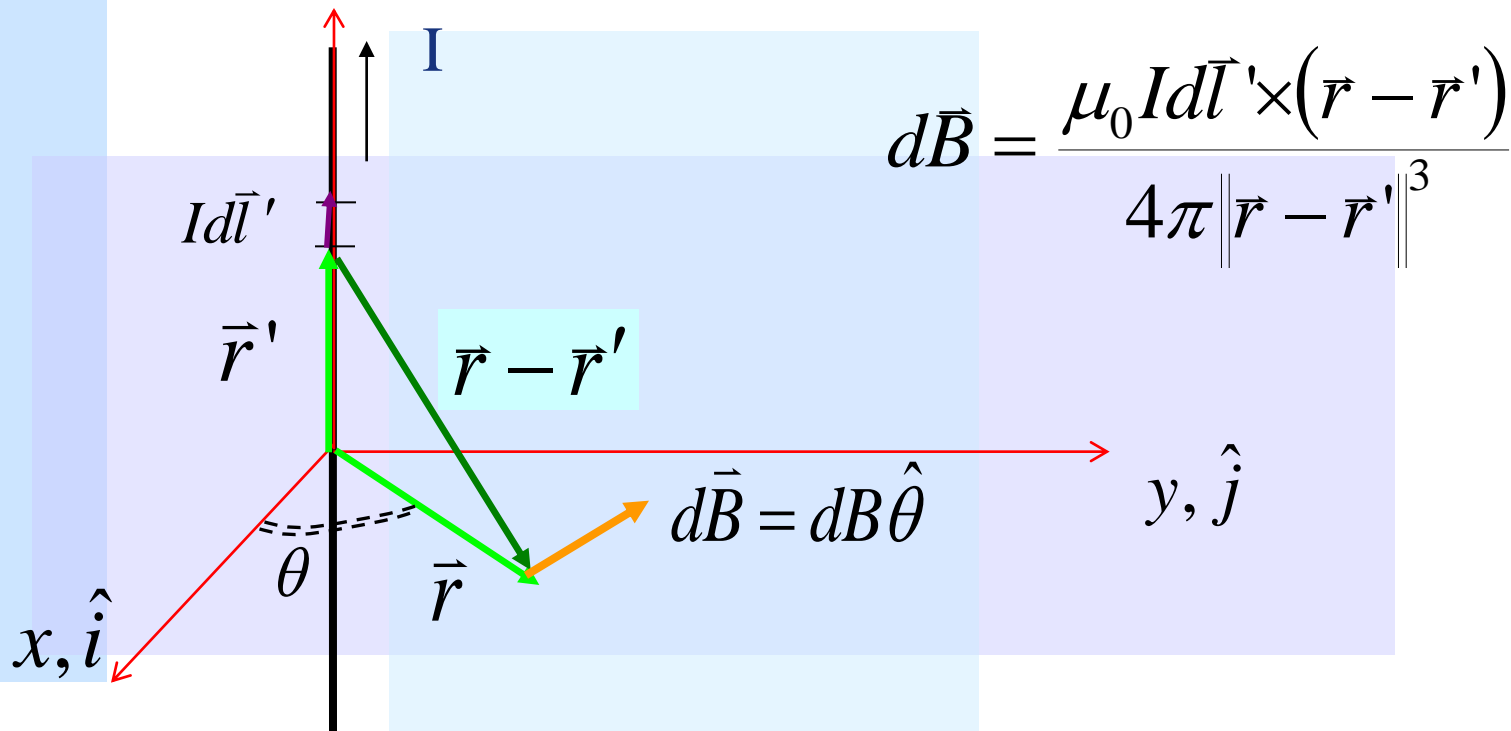
Campo Magnético Línea Infinita



Notar que la contribución de todos los elementos de corriente tiene la misma dirección según $\hat{\theta}$



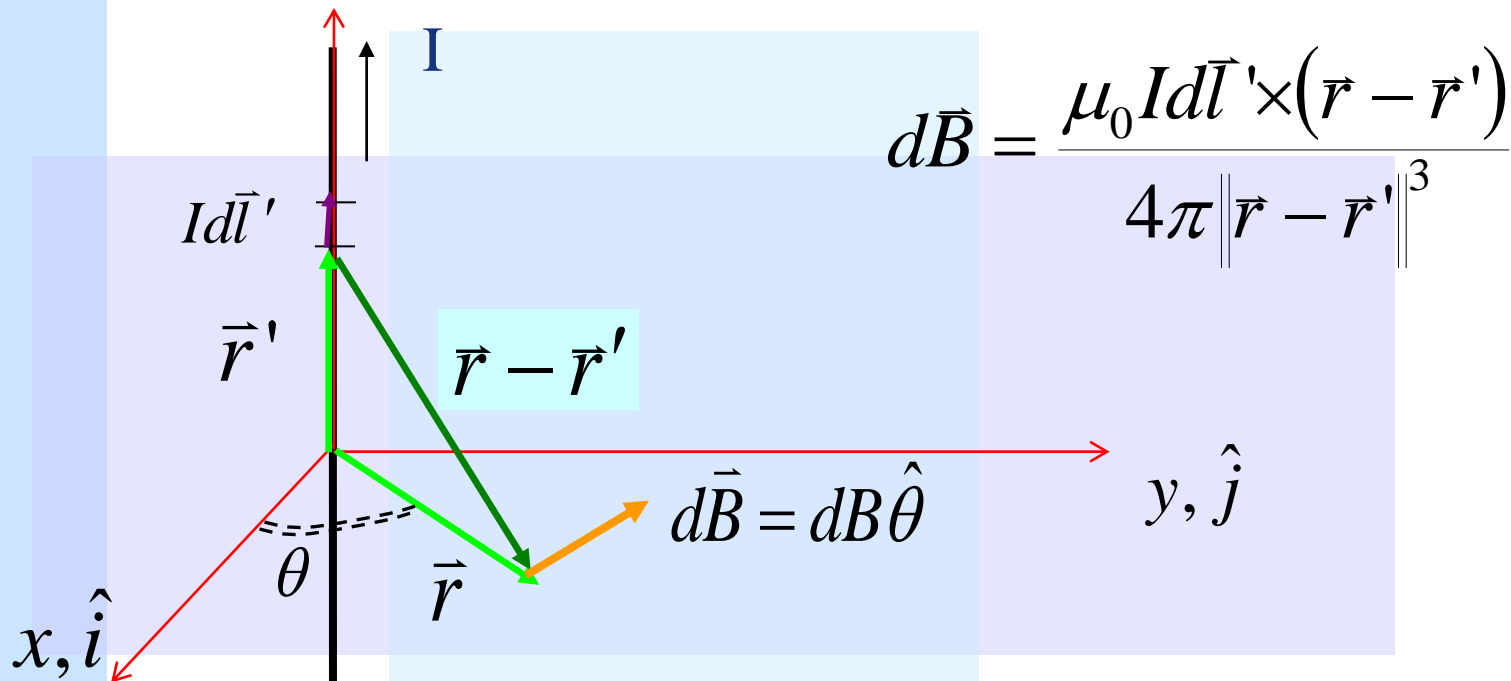
Campo Magnético Línea Infinita



$$\left. \begin{aligned} \vec{r}' &= z' \hat{k} \\ \vec{r} &= r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} \\ Id\vec{l}' &= Idz' \hat{k} \end{aligned} \right\} d\vec{B} = \frac{\mu_0 Idz' \hat{k} \times (r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} - z' \hat{k})}{4\pi [r^2 + z'^2]^{3/2}}$$



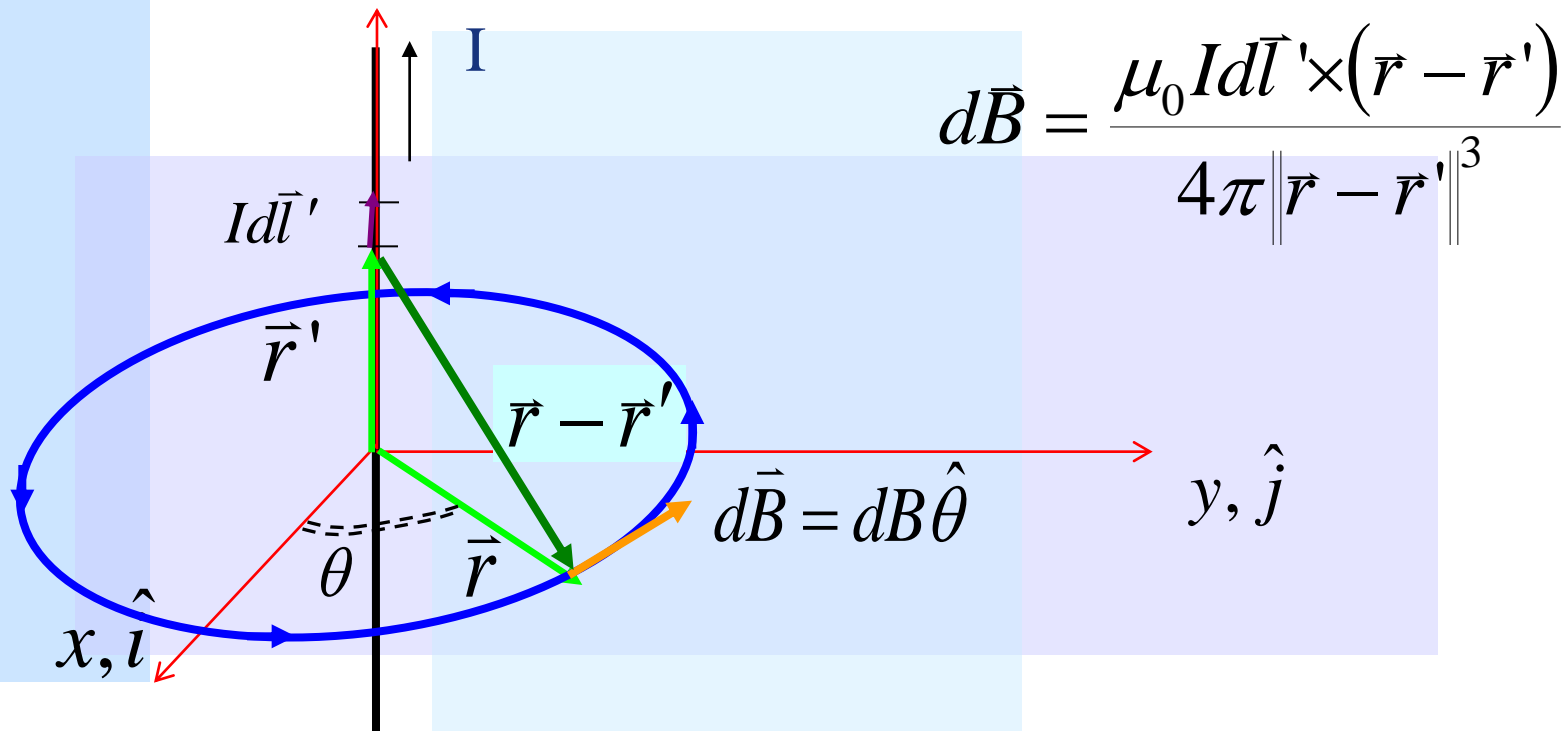
Campo Magnético Línea Infinita



$$\vec{B} = \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \frac{\mu_0 I r (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i}) dz'}{4\pi [r^2 + z'^2]^{3/2}}$$



Campo Magnético Línea Infinita

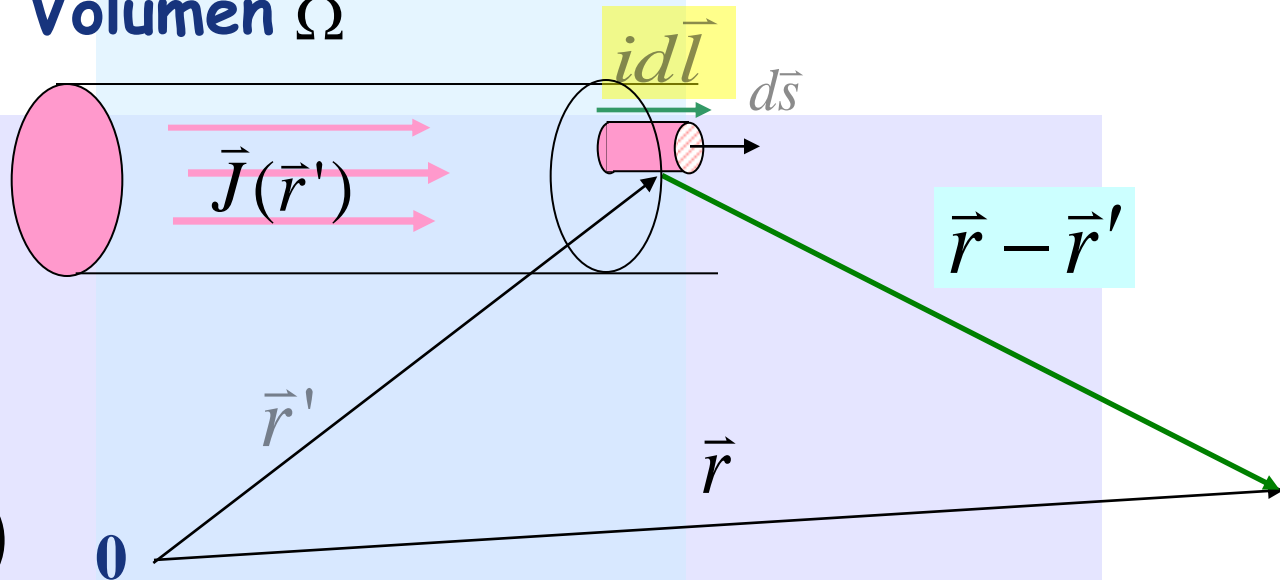


Se obtiene finalmente $\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$



Campo magnético de distribuciones de corriente

Volumen Ω



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

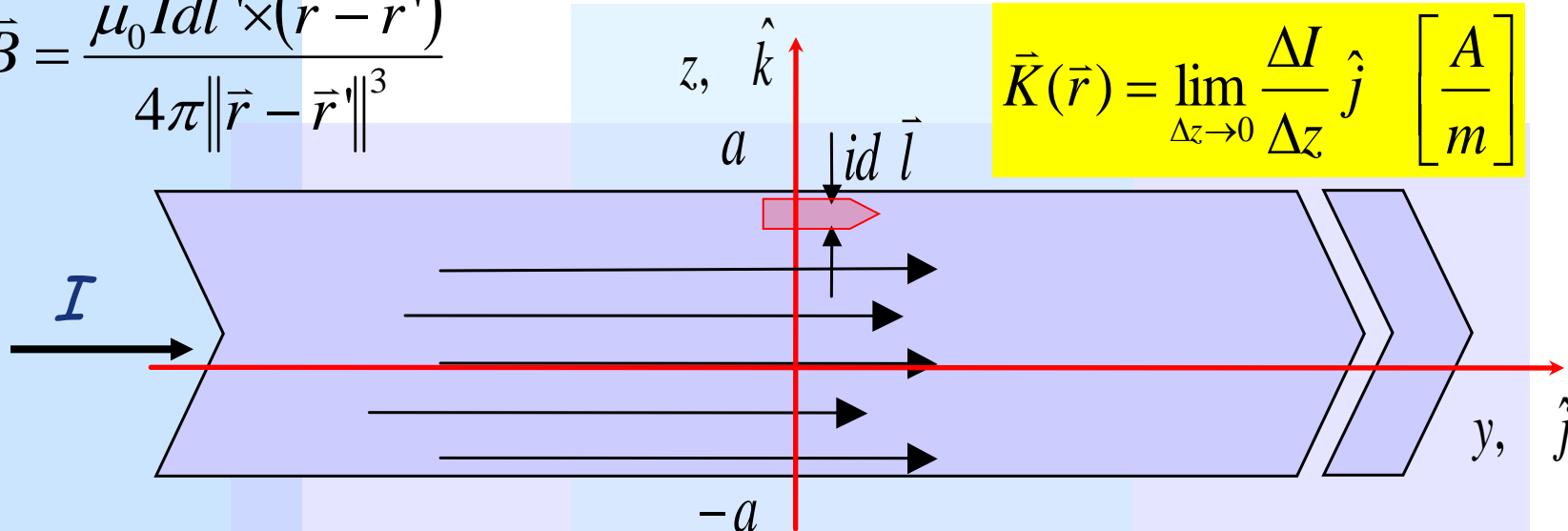
$$id\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{J} dv'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$



Densidad de Corriente Superficial

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Sólo hay corriente en la superficie S del plano y - z

$$id\vec{l}' = (\vec{K} \cdot dz\hat{j}) dy\hat{j} = (K\hat{j} \cdot \hat{j}) dz dy\hat{j} = K dz dy\hat{j} = \vec{K} ds$$

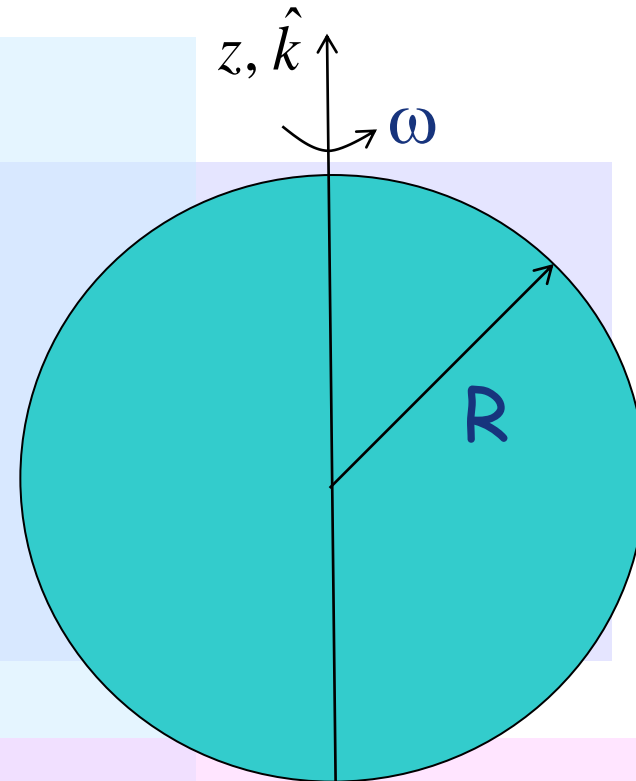
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} ds'$$



Densidad de Corriente Superficial

Casquete esférico cargado con carga superficial σ y girando a velocidad angular ω

- Calcular densidad de corriente superficial
- Calcular campo magnético en el eje de rotación para $z \gg R$





Densidad de Corriente Superficial

• Densidad de corriente superficial

$$\vec{K}(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \hat{\theta} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

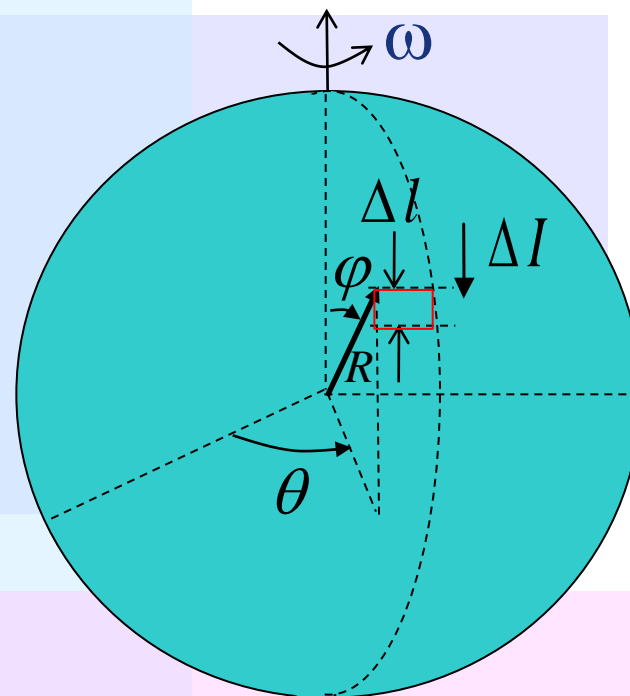
$$\Delta q = \sigma \Delta s \quad \Delta l = R \Delta \varphi$$

$$\Delta s = R \sin \varphi \Delta \theta R \Delta \varphi$$

$$\Delta q = \sigma R^2 \sin \varphi \Delta \theta \Delta \varphi$$

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\sigma R^2 \sin \varphi \Delta \theta \Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\Delta I = \sigma R^2 \sin \varphi \Delta \varphi \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \sigma R^2 \omega \sin \varphi \Delta \varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{K}(\vec{r}) = \sigma R \omega \sin \varphi \hat{\theta} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$





Densidad de Corriente Superficial

- Campo magnético en el eje

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} ds'$$

$$\vec{K}(\vec{r}) = \sigma R \omega \sin \varphi \hat{\theta}$$

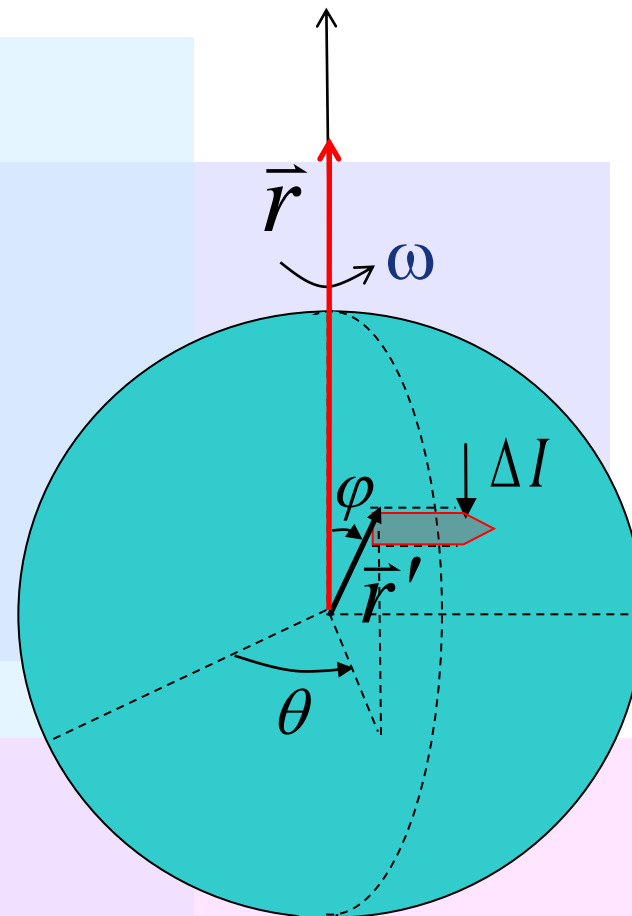
$$\vec{K}(\vec{r}) = \sigma R \omega \sin \varphi (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$$

$$\vec{r}' = R \hat{\rho}$$

$$\vec{r}' = R \sin \varphi (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) + R \cos \varphi \hat{k}$$

$$\vec{r} = z \hat{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R \sin \varphi \cos \theta \hat{i} - R \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + (z - R \cos \varphi) \hat{k}$$





Densidad de Corriente Superficial

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \left[R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + (z - R \cos \varphi)^2 \right]^{1/2}$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \left[R^2 \sin^2 \varphi + z^2 - 2zR \cos \varphi + R^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/2}$$

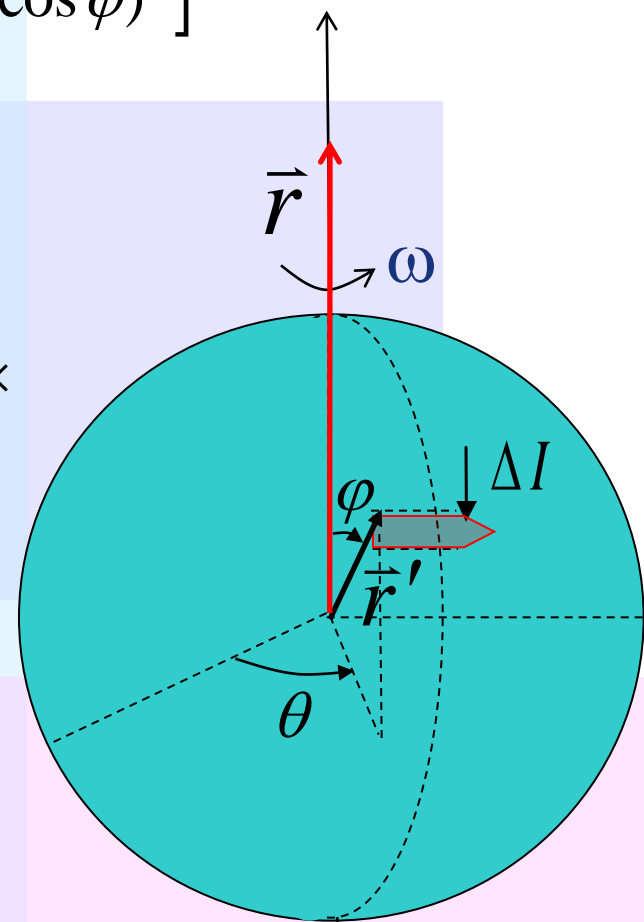
$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \left[R^2 + z^2 - 2zR \cos \varphi \right]^{1/2}$$

$$\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') = (\sigma R \omega \sin \varphi (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})) \times (-R \sin \varphi \cos \theta \hat{i} - R \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + (z - R \cos \varphi) \hat{k})$$

Notar que el campo magnético sólo tiene componente según \hat{k}

$$\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') = \sigma R \omega \sin \varphi \sin \theta R \sin \varphi \sin \theta \hat{k} +$$

$$\sigma R \omega \sin \varphi \cos \theta R \sin \varphi \cos \theta \hat{k} \Rightarrow \vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') = \sigma R^2 \omega \sin^2 \varphi \hat{k}$$





Densidad de Corriente Superficial

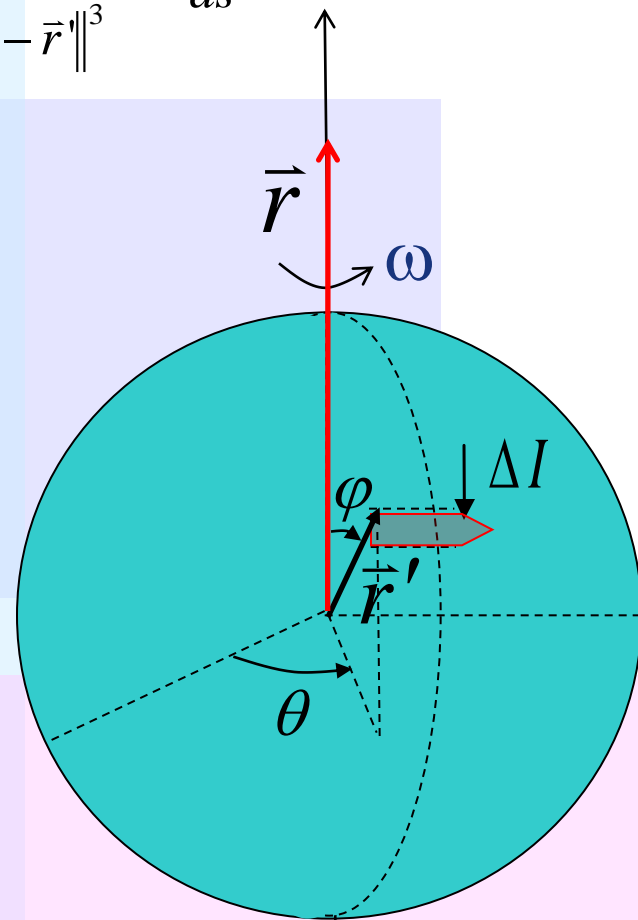
• Campo magnético en el eje $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} ds'$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\sigma R^2 \omega \sin^2 \varphi \hat{k}}{\left[R^2 + z^2 - 2zR \cos \varphi \right]^{3/2}} R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} 2\pi \frac{\sigma R^4 \omega \sin^3 \varphi \hat{k}}{\left[R^2 + z^2 - 2zR \cos \varphi \right]^{3/2}} d\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\sin^3 \varphi}{\left[R^2 + z^2 - 2zR \cos \varphi \right]^{3/2}} d\varphi \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\sin^3 \varphi}{\left[1 - \frac{2zR}{R^2 + z^2} \cos \varphi \right]^{3/2}} d\varphi \hat{k}$$





Densidad de Corriente Superficial

- Campo magnético en el eje $z \gg R$

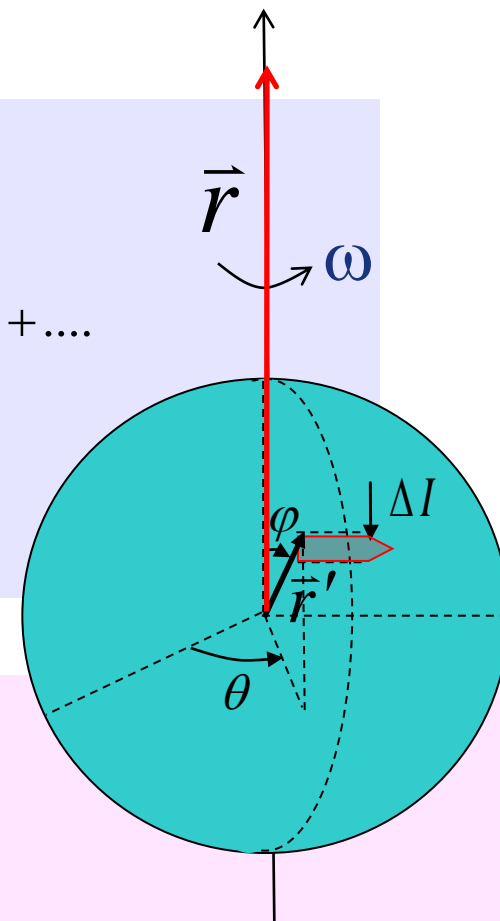
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\sin^3 \varphi}{\left[1 - \frac{2zR}{R^2 + z^2} \cos \varphi\right]^{3/2}} d\varphi \hat{k}$$

Usando la aproximación $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{2zR}{R^2 + z^2} \cos \varphi\right]^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2} \frac{2zR}{R^2 + z^2} \cos \varphi + \dots$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3 \varphi \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2zR}{R^2 + z^2} \cos \varphi\right) d\varphi \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega \hat{k}}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi + \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{3zR}{R^2 + z^2} \cos \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \right)$$





Densidad de Corriente Superficial

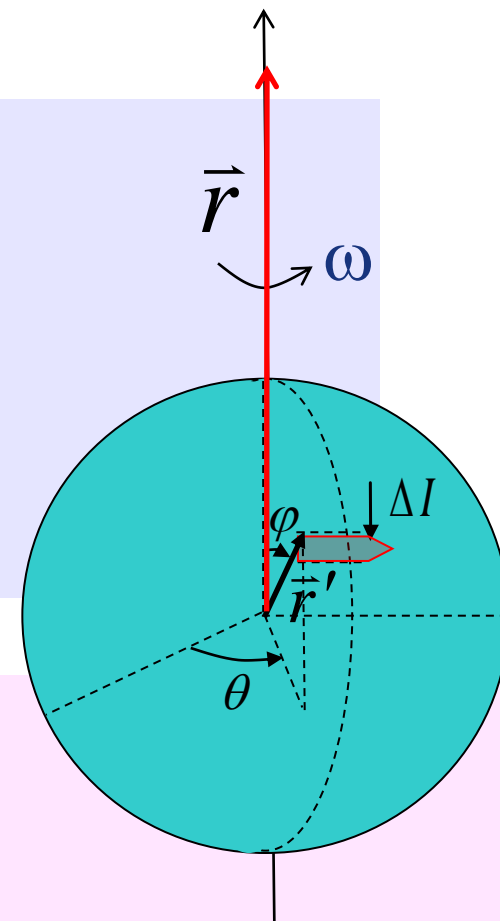
- Campo magnético en el eje $z \gg R$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega \hat{k}}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi + \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{3zR}{R^2 + z^2} \cos \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \right)$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = -\frac{\cos \varphi}{3} (2 + \sin^2 \varphi) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

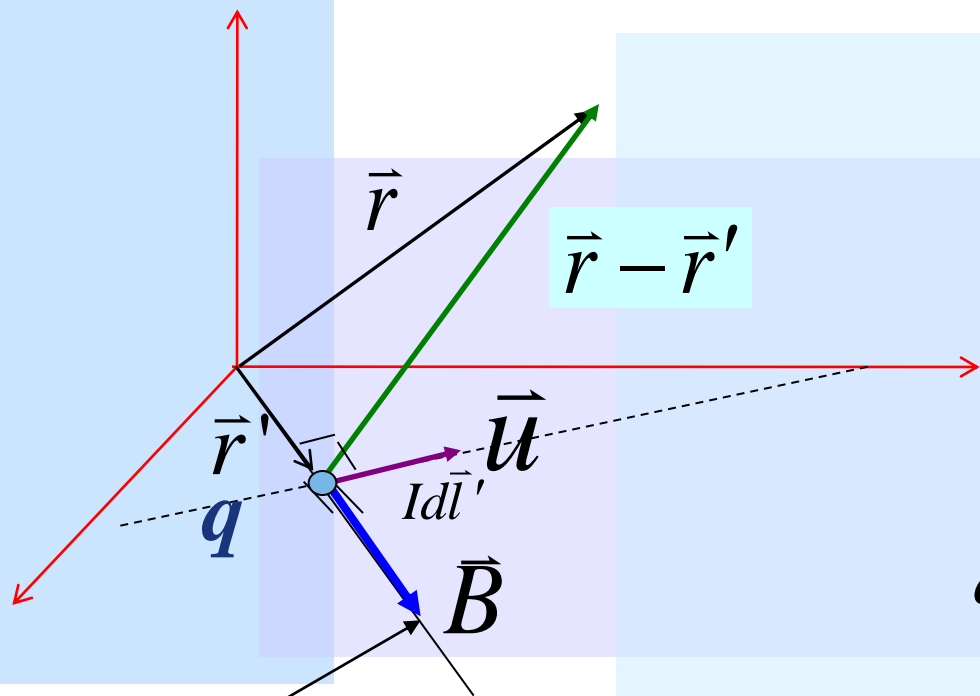
$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \cos \varphi \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{\sin^4 \varphi}{4} \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{2\mu_0 \sigma R^4 \omega}{3(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$





Campo Magnético de una Carga Puntual



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$i d\vec{l}' = \frac{dq}{dt} dl \hat{u} = dq \frac{dl}{dt} \hat{u}$$

$$dq \rightarrow q, \quad \frac{dl}{dt} = \|\vec{u}\| \quad y \quad d\vec{B} \rightarrow \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{u} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

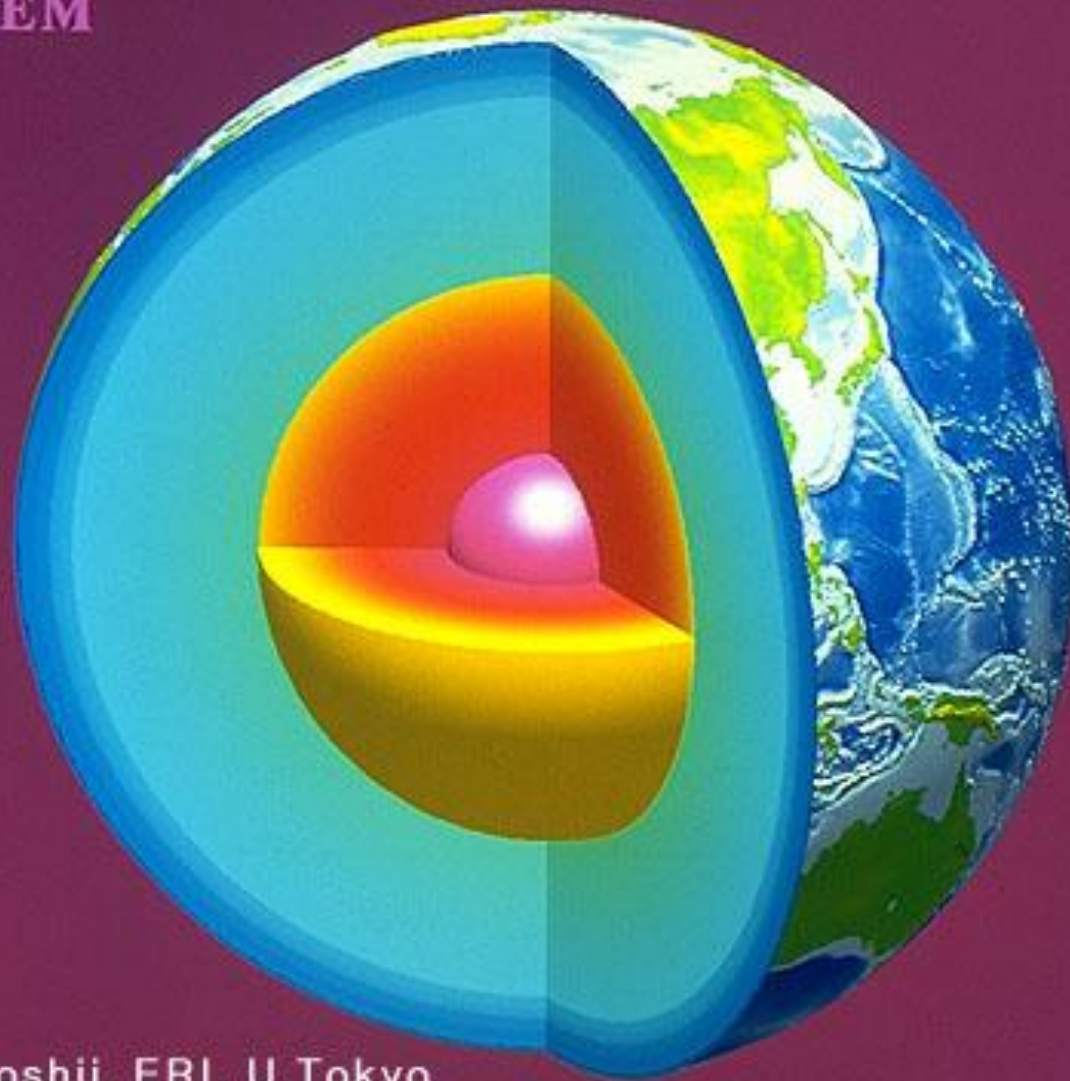
$$I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

Campo magnético resultante perpendicular a la velocidad



Campo Magnético Terrestre

PREM

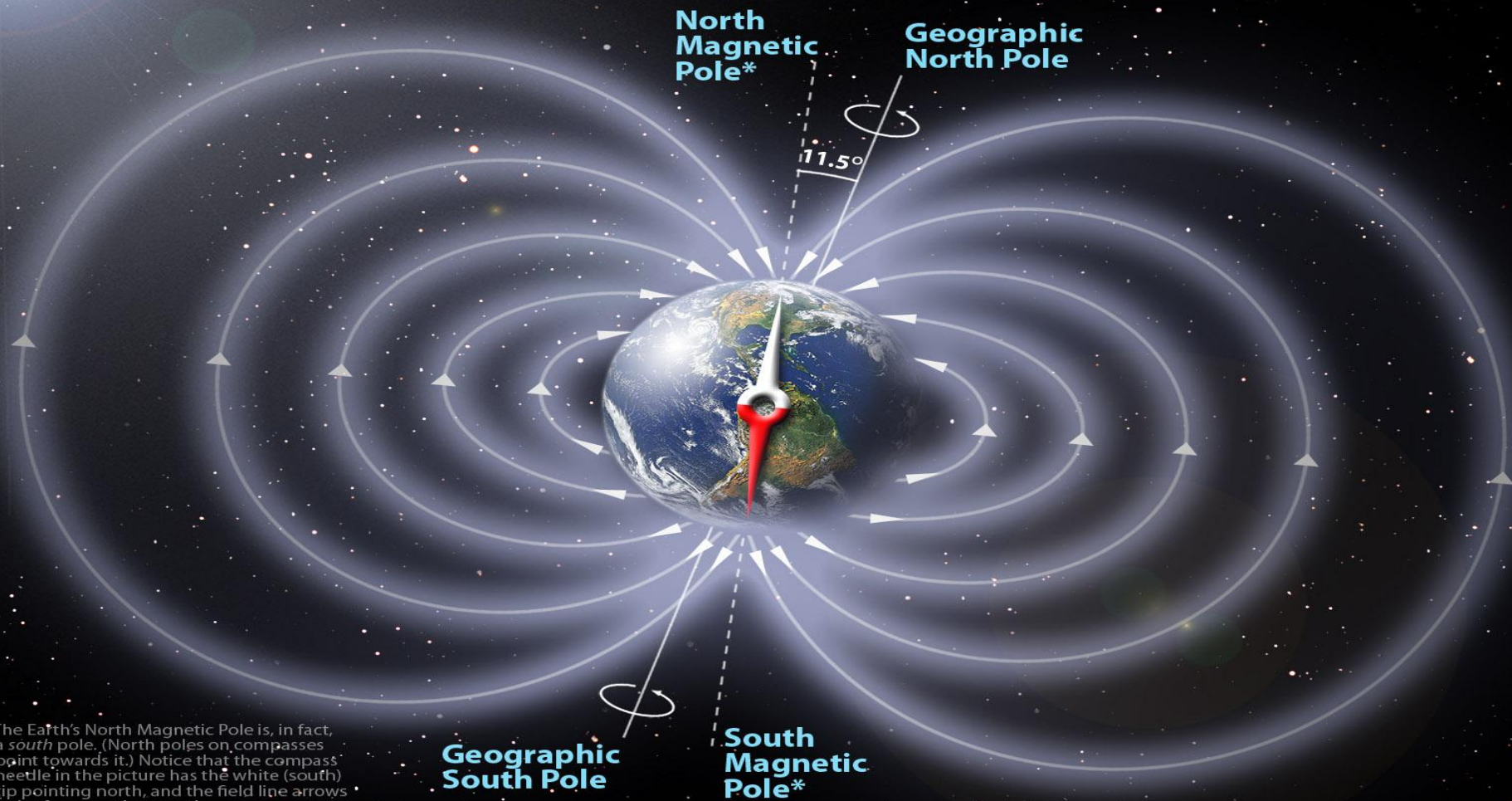


T.Yoshii, ERI, U.Tokyo



Campo Magnético Terrestre

The Earth's Magnetic Field



*The Earth's North Magnetic Pole is, in fact, a *south* pole. (North poles on compasses point towards it.) Notice that the compass needle in the picture has the white (south) tip pointing north, and the field line arrows point from south to north.

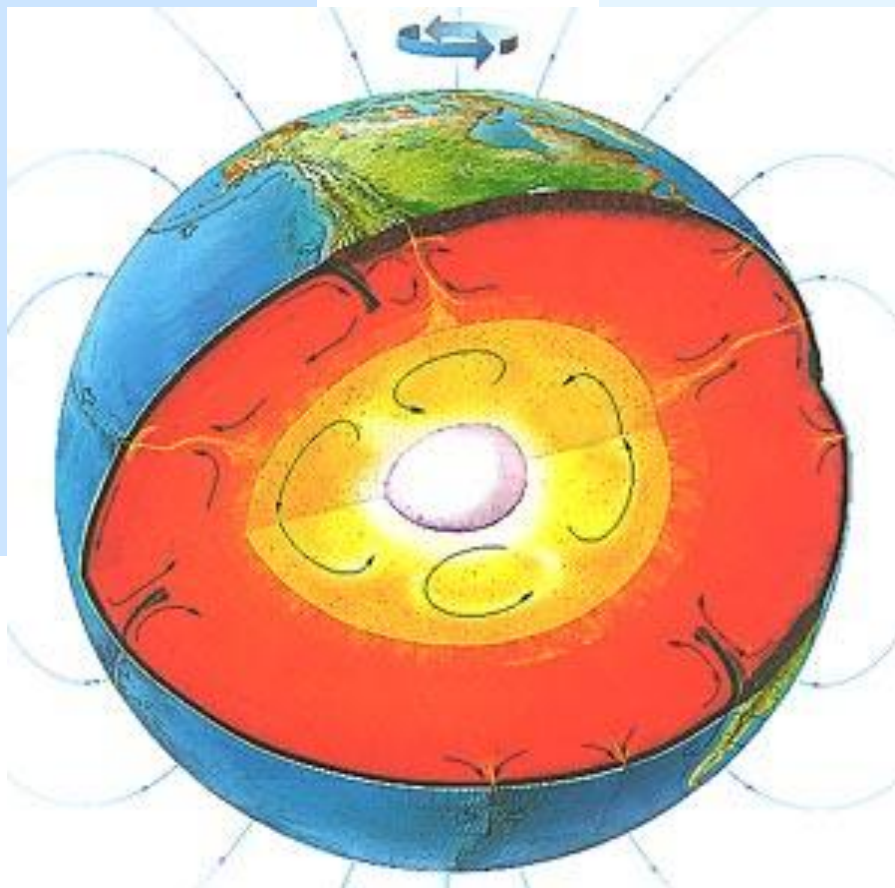
Larger versions of this image are available: contact peter.reid@ed.ac.uk

Peter Reid, 2007

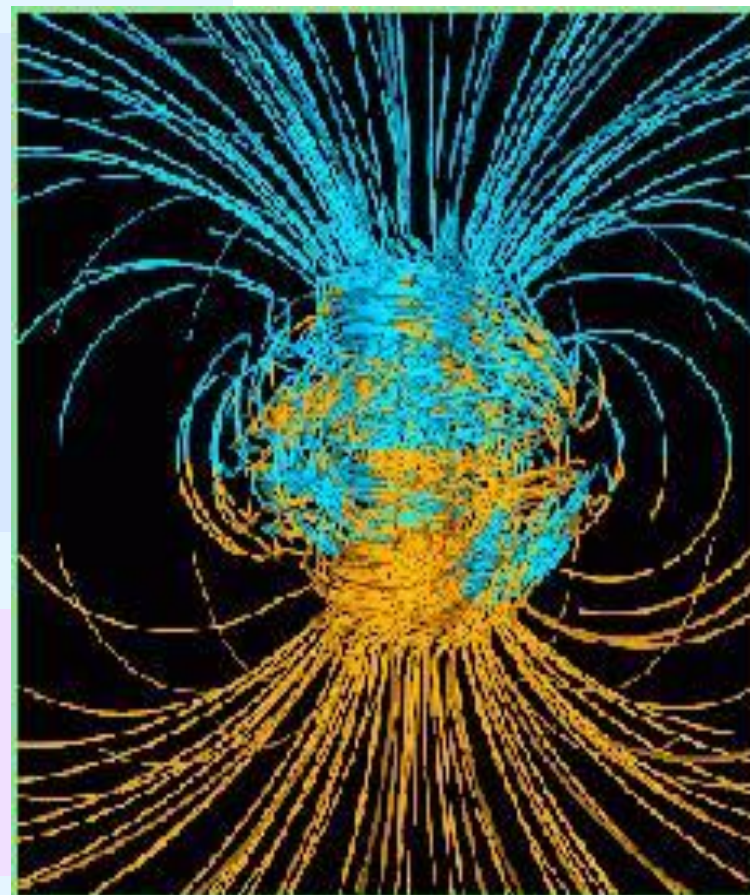


Campo Magnético Terrestre

Convección



Geodínamo



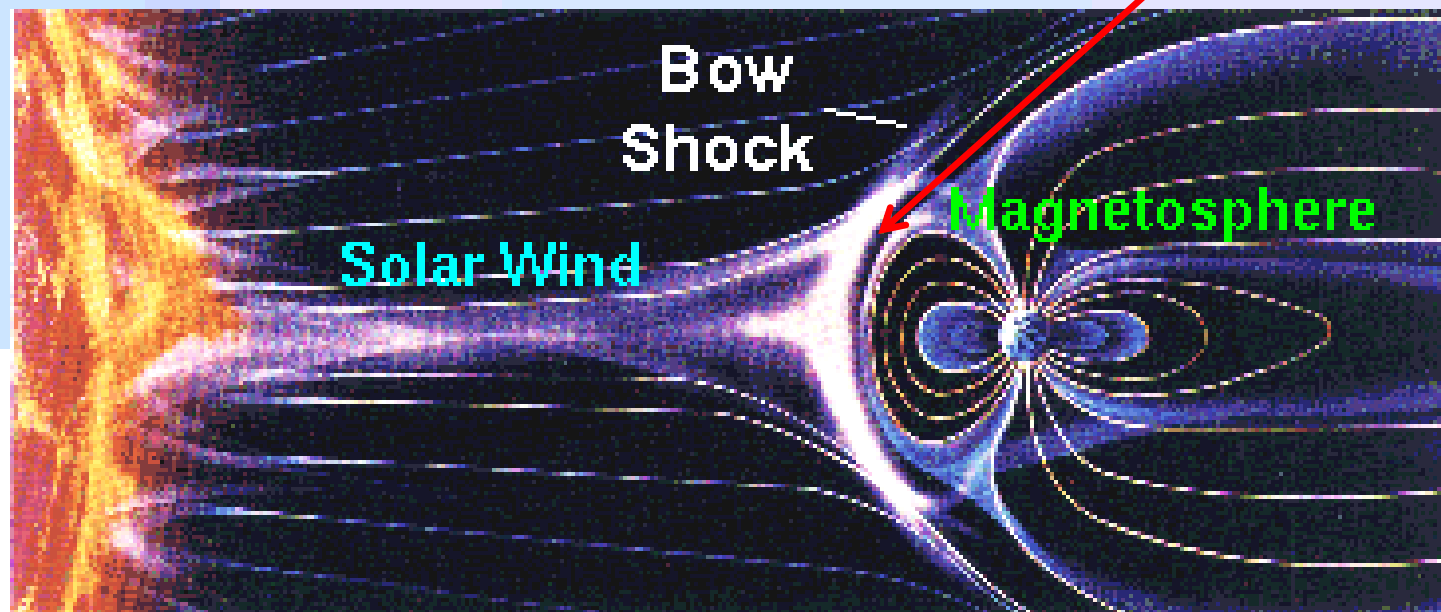


Campo Magnético Terrestre

- Viento solar: Gases ionizados que vienen del sol a 400Km/s
- Varian con la actividad de la superficie solar

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

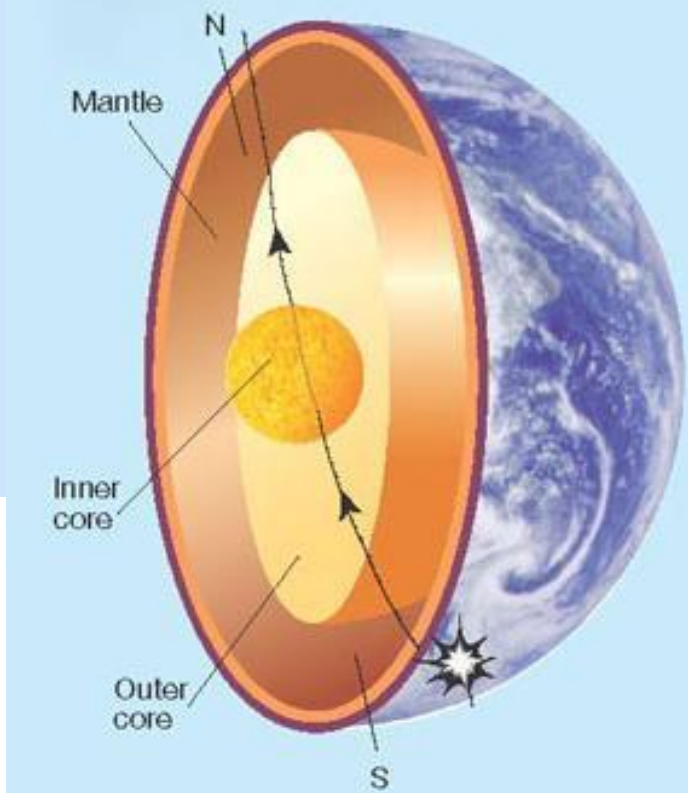


Fuente: National Geophysical Data Center, USA

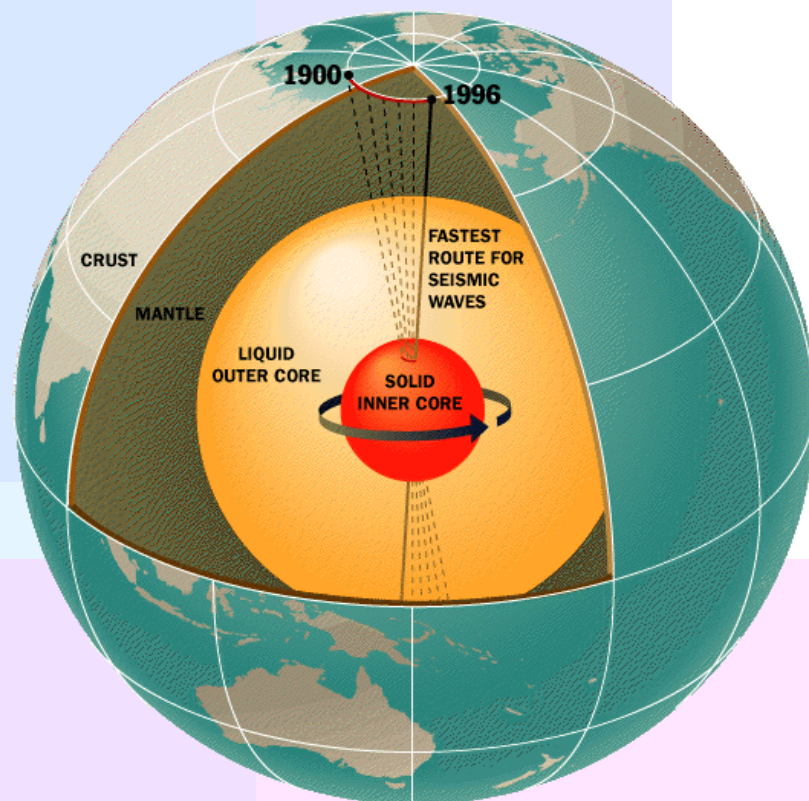


Campo Magnético Terrestre

Estudio del núcleo



Anisotropía y super-rotación





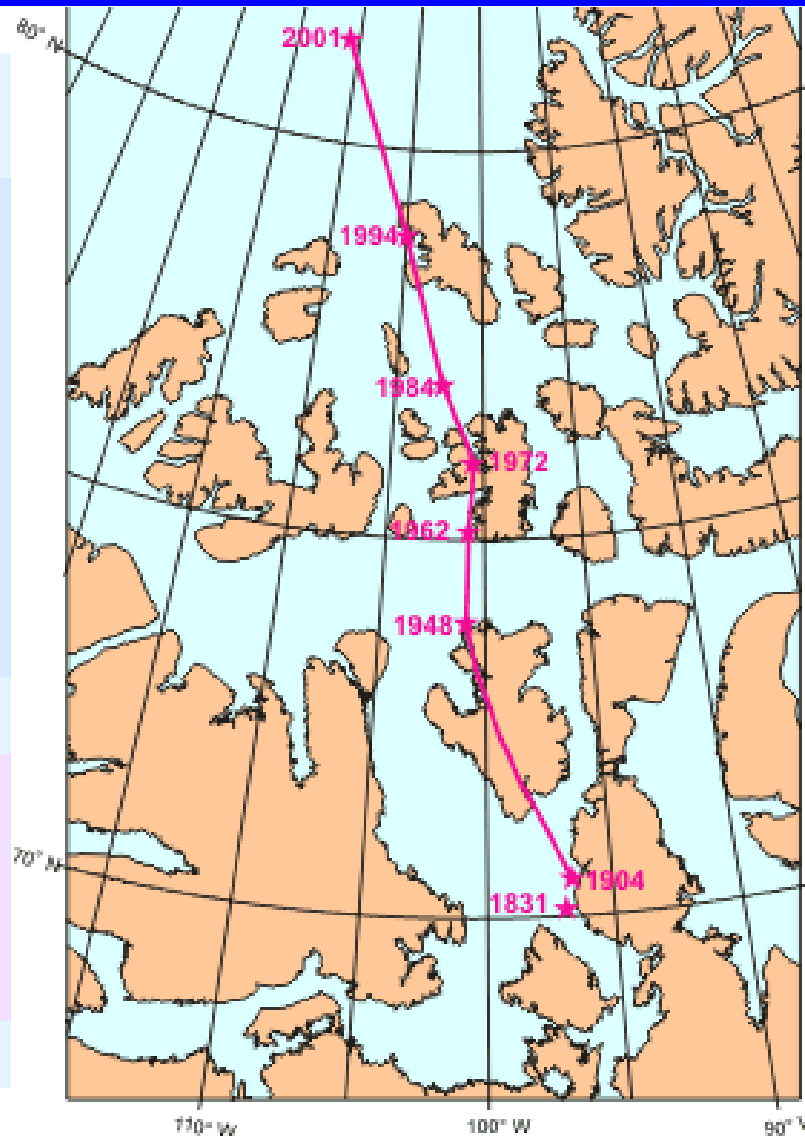
Campo Magnético Terrestre

Movimiento del polo norte magnético en el Artico de Canadá en el periodo 1831-2001.
Fuente: Geological Survey of Canada.

Se mueve a 40 km cada año, approx.

Ultimamente se mueve crecientemente mas rápido.

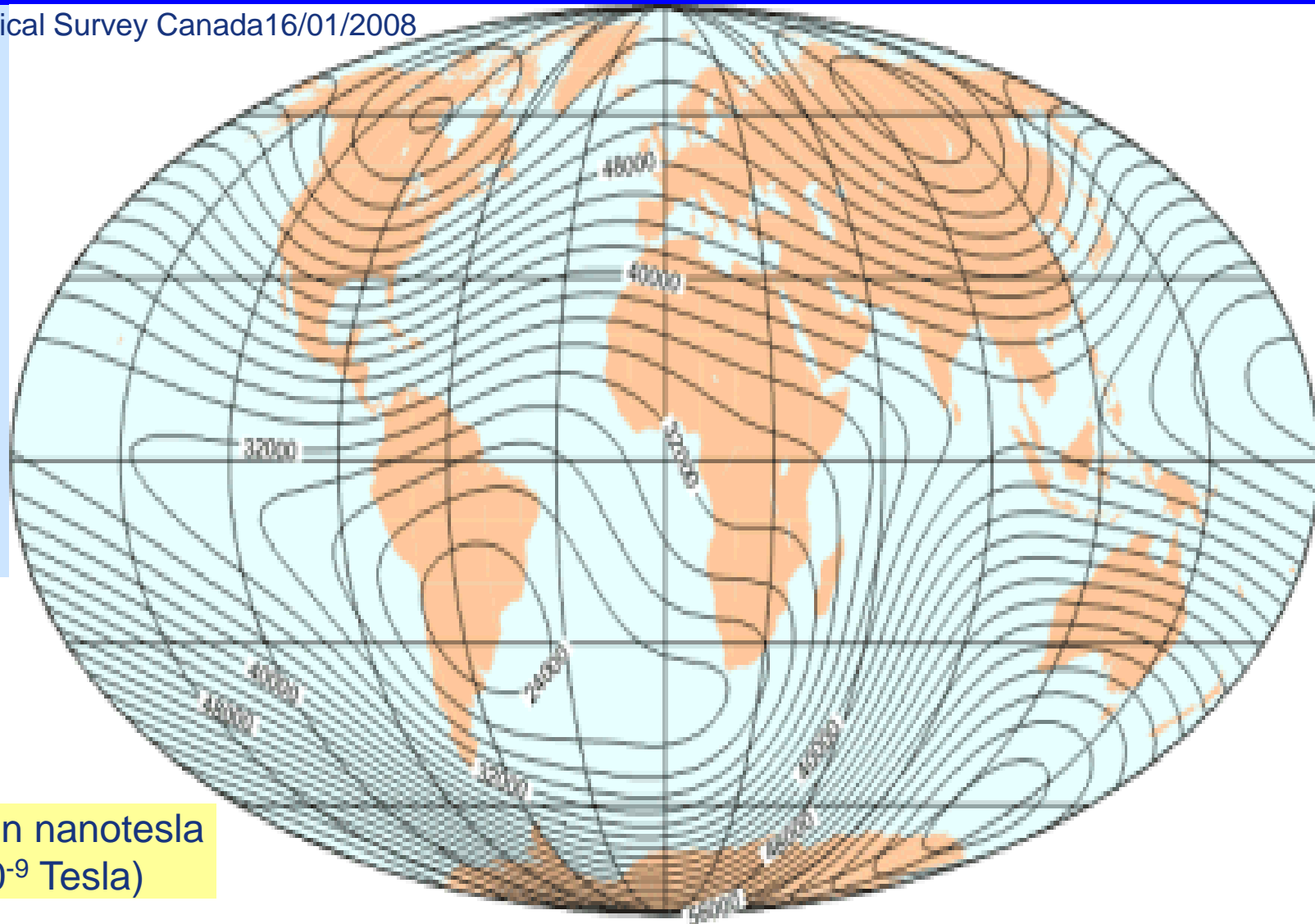
La última vez que el polo magnético se cambio al otro lado de la tierra fue hace 780.000 años





Campo Magnético Terrestre

Fuente: Geological Survey Canada 16/01/2008



Medido en nanotesla
1 nT = 10^{-9} Tesla)