FI2002 Electromagnetismo

Pauta Pregunta 1 Control 2, primavera 2010

Autor: Sebastián Fehlandt

1. Pregunta

En los circuitos integrados se emplean resistencias, que se construyen sobre la base de silicio, depositando una película delgada de cierto material conductor (que puede ser silicio dopado). Supongamos una resistencia en forma de placa que tiene las siguientes dimensiones: longitud (dirección z) = 1 [μm], ancho (dirección x) = 300 [nm], espesor (dirección y) = 50 [nm]. A causa del método de fabricación empleado, la resistividad no es constante sino que depende de x según la ecuación:

$$\rho = \rho_0 e^{-x/x_0}$$

Se pide calcular la resistencia para una corriente que circula en la dirección z, sabiendo que $\rho_0 = 2\times 10^{-8}\left[\Omega m\right]$ y x_0=600 [nm].

2. Pauta

Como la resistividad varía en el eje x y la corriente circula en el eje z, no basta con integrar la resistividad en el volumen, ya que la resistencia de un material es directamente proporcional con la longitud de éste e inversamente proporcional al área atravesada por la corriente, por lo que integrar la resistividad en volumen lleva a un resultado erróneo. Esto sería correcto si la resistencia fuera directamente proporcional a todas las dimensiones.

Para analizar esto se considera una lámina de material de grosor diferencial dx y dimensiones d_x, l_y, l_z, donde $l_y = 1[\mu m]$ y $l_z = 50[nm]$ son las dimensiones en los ejes "y" y "z" del material. De esta forma, la resistencia de este elemento diferencial corresponde a:

$$R_{dx} = \frac{\rho(x)L}{A} = \frac{l_z \cdot \rho_0 \cdot e^{-x/x_0}}{l_y \cdot dx}$$

Es importante notar que, como la corriente fluye en el eje z, estas láminas están conectadas en paralelo. De esta forma la resistencia equivalente de la suma de todas ellas cumple la siguiente relación:

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_{dx_k}} = \sum_k \frac{l_y \cdot dx}{l_z \cdot \rho_0 \cdot e^{-x/x_0}} = \sum_k \frac{l_y \cdot e^{x/x_0} \cdot dx}{l_z \cdot \rho_0}$$

Lo que en el límite, cuando dx tiende a cero se transforma en una integral:

$$\frac{1}{R} = \int_0^{l_x} \frac{l_y \cdot e^{\frac{x}{x_0}} \cdot dx}{l_z \cdot \rho_0} = \frac{l_y}{l_z \cdot \rho_0} \int_0^{l_x} e^{\frac{x}{x_0}} \cdot dx = \frac{l_y \cdot x_0}{l_z \cdot \rho_0} \cdot (e^{\frac{l_x}{x_0}} - 1)$$

Luego la resistencia total corresponde a:

$$\boxed{R = \frac{\rho_0 \cdot l_z}{x_0 \cdot l_y \left(e^{\frac{l_x}{x_0}} - 1\right)} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^9 [\Omega \cdot \mathrm{nm}] \cdot 1000[nm]}{600[nm] \cdot 50[nm] \left(e^{\frac{300[nm]}{600[nm]}} - 1\right)} = \frac{2}{3(\sqrt{e} - 1)} [\Omega]}$$