FI2002 Electromagnetismo

Pauta Pregunta 3 Tarea 2, primavera 2010

Autor: Sebastián Fehlandt

1. Pregunta

Considere un cable coaxial que consta de dos láminas cilíndricas "conductoras perfectas" de largo h y de radios a y b respectivamente (b > a). Ellas están conectadas a una batería como indica la Figura 1.

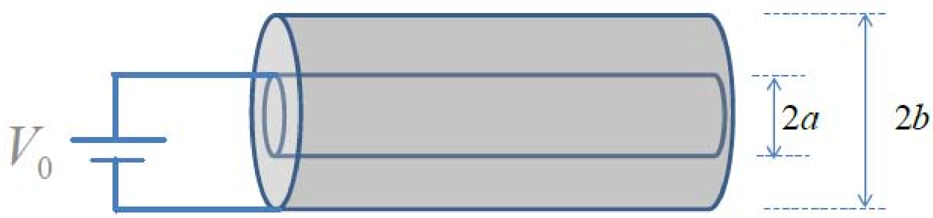

Figura 1

El dieléctrico entre estas láminas tiene constante dieléctrica ε y conductividad eléctrica g. Suponiendo que h>>b, se pide obtener:

a) El campo eléctrico en todo el espacio (dentro y fuera del cable).
b) La energía electrostática acumulada en el interior a del cable.
c) La corriente de fuga (a través del dieléctrico, entre los casquetes cilíndricos conductores).

A continuación se conecta una resistencia R entre ambos conductores, según se muestra en la Figura 2:

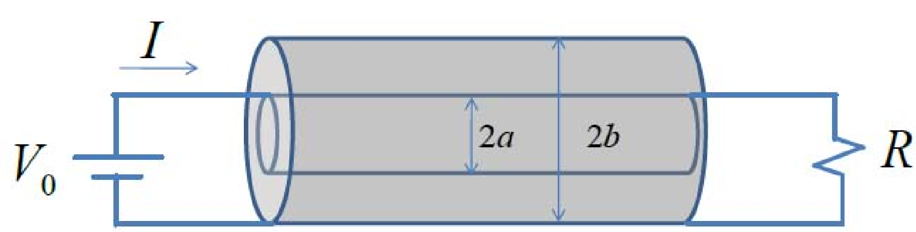

Figura 2

d) Se pide obtener, en función de los datos ya mencionados y de R, la corriente I que sale de la fuente de tensión.

2. Pauta

a) Como h>>b podemos despreciar efectos de borde al interior del cable, luego como la constante dieléctrica es constante, aplicando la ecuación de Laplace tenemos que:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow V(r) = A\cdot\ln(r) + B$$

Imponiendo condiciones de borde, en el borde exterior:

$$V(b) = A\cdot\ln(b) + B = 0 \Rightarrow B = -A\cdot\ln(b) \Rightarrow V(r) = A\cdot\ln(r/b)$$

Y luego imponiendo la condición del borde interior:

$$V(a) = A\cdot\ln(a/b) = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Con lo que finalmente el potencial queda:

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\cdot\ln(r/b)$$

Luego como $\vec{E} = -\nabla V$, se tiene:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{V_0}{\ln(b/a)r}\hat{r}\,, \qquad r\in[a,b]}$$

Sabemos que en el borde de un conductor el campo es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

Luego la densidad de carga libre en el conductor interior ($\hat{n} = \hat{r}$) es:

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln(b/a)a}$$

Luego, integrando en superficie se tiene:

$$Q_a = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln(b/a)a}\cdot 2\pi a h = \frac{2\pi h\varepsilon_0 V_0}{\ln(b/a)}$$

Así mismo en el conductor exterior ($\hat{n} = -\hat{r}$):

$$\sigma_b = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln(b/a) b}$$

Y luego:

$$Q_b = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln(b/a) b} \cdot 2\pi b h = -\frac{2\pi h \varepsilon_0 V_0}{\ln(b/a)} = -Q_a$$

Luego aplicando Gauss en el exterior del cilindro se tiene que la carga encerrada es nula, por lo que el campo al exterior de éste es nulo, es decir:

$$\boxed{\vec{E} = 0 \quad , \quad r > b}$$

b) Para calcular la energía se utiliza:

$$U = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{V_0}{\ln(b/a)} \right)^2 \iiint_{0,0,a}^{2\pi,h,b} \frac{dr d\theta dz}{r}$$

Luego

$$\boxed{\mathrm{U} = \frac{\pi h \varepsilon V_0^2}{\ln\,(b/a)}}$$

c) La densidad de la corriente de fuga en el cable es:

$$\vec{J} = g\vec{E} = \frac{g V_0}{\ln(b/a) r} \hat{r}$$

Luego, integrando la corriente de fuga es:

$$I_f = \iint_{0,0}^{2\pi,h} \frac{g V_0}{\ln(b/a) r} r d\theta dz$$

Así:

$$\boxed{I_f = \frac{2\pi h g V_0}{\ln(b/a)}}$$

d) Como la resistencia está en paralelo al condensador (correspondiente al cilindro), por LCK, la corriente que sale de la fuente corresponde a la suma de la corriente de fuga más la corriente que circula por la resistencia. Por la Ley de Ohm sabemos que ésta última corresponde a V_0/R, por lo que la corriente total corresponde a:

$$\boxed{I = I_f + \frac{V}{R} = \frac{2\pi h g V_0}{\ln(b/a)} + \frac{V_0}{r}}$$

3. Distribución de Puntaje

• Campo en el interior del cilindro	1 pto
• Campo en el exterior del cilindro	1 pto
• Energía del sistema	2 ptos
• Corriente de Fuga	1 pto
• Corriente entregada por la fuente	1 pto