



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 17

Magnetostática II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

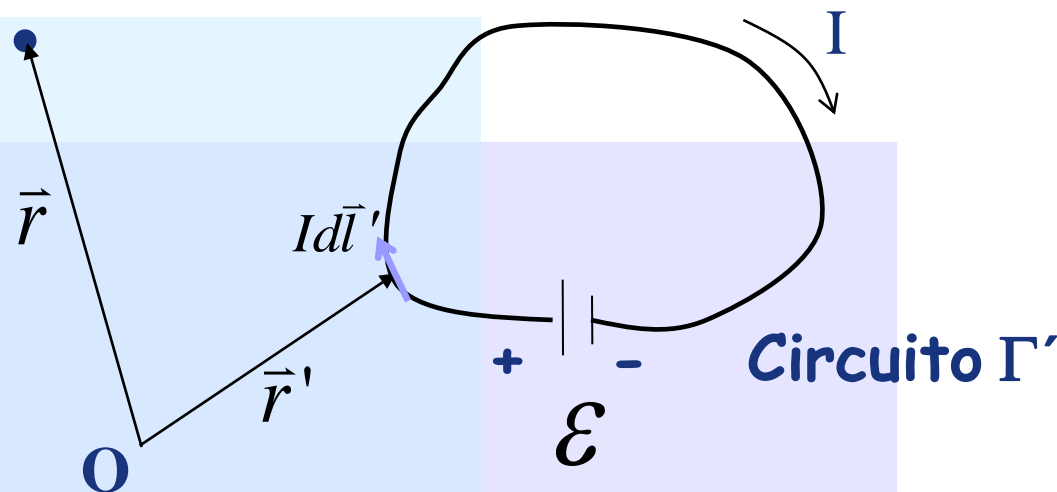
- Campo magnético
- Ejemplo
- Ley de Biot y Savart
- Torque magnético
- Motor Elemental



Paul Klee, "Rose Garden", 1920



Campo Magnético



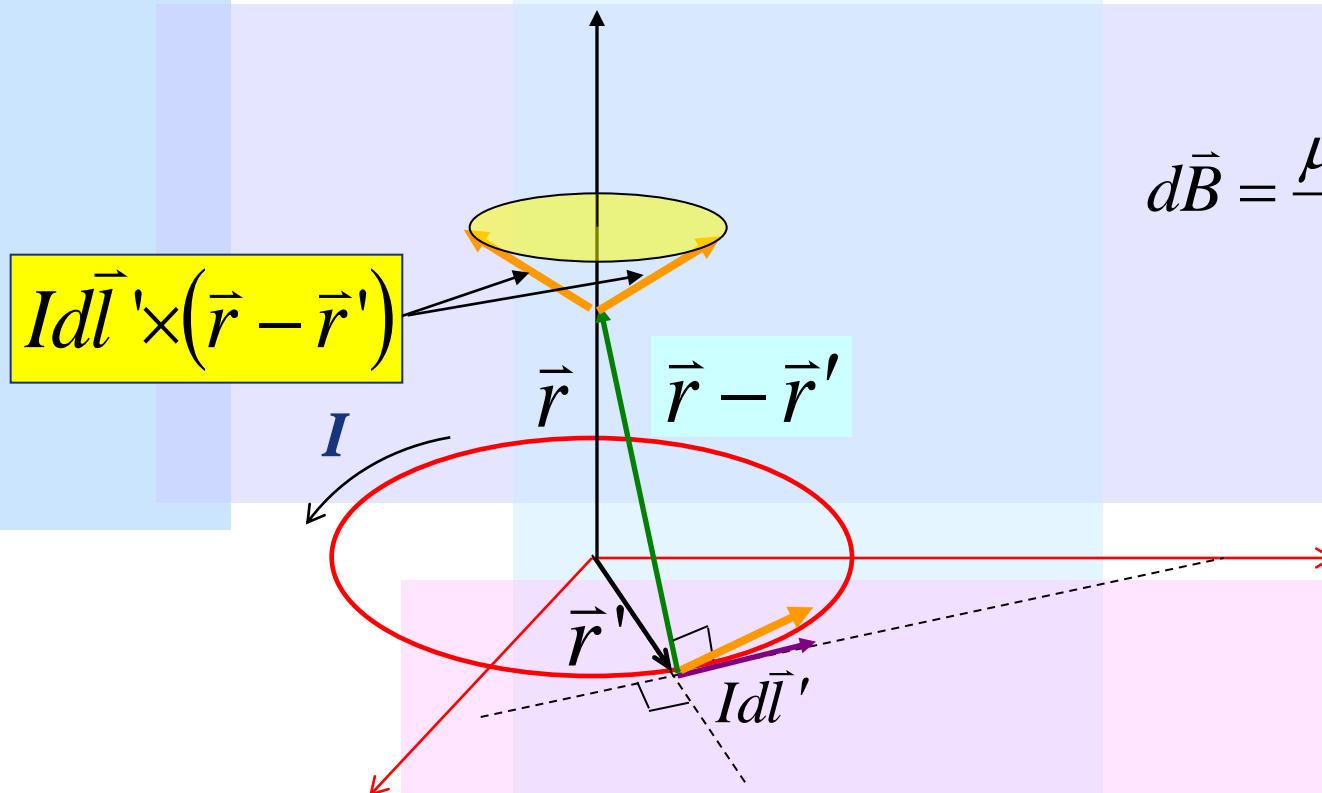
Campo producido por
circuito Γ'

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Regla de la mano derecha

Dirección de campo está dado por el producto $I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$

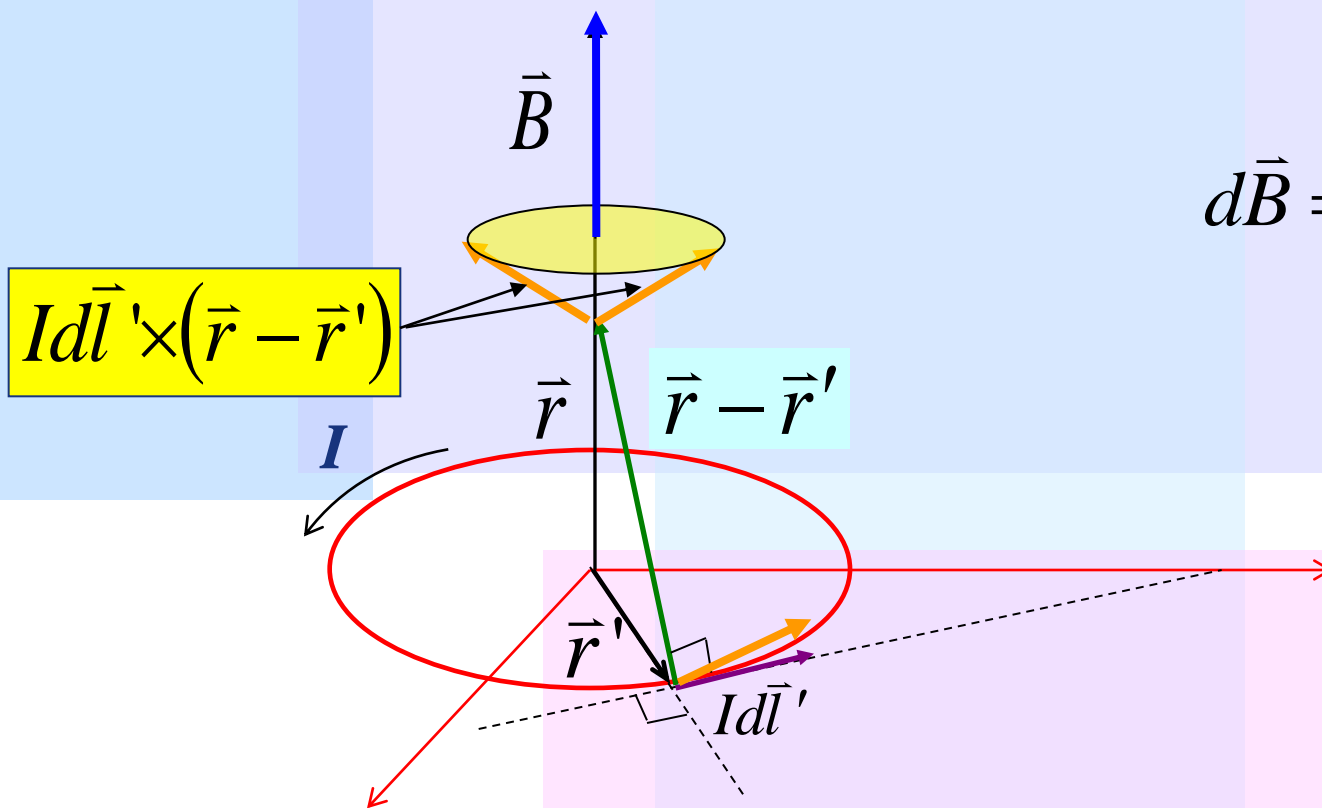


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Regla de la mano derecha

Campo magnético resultante sólo tiene dirección según eje z.



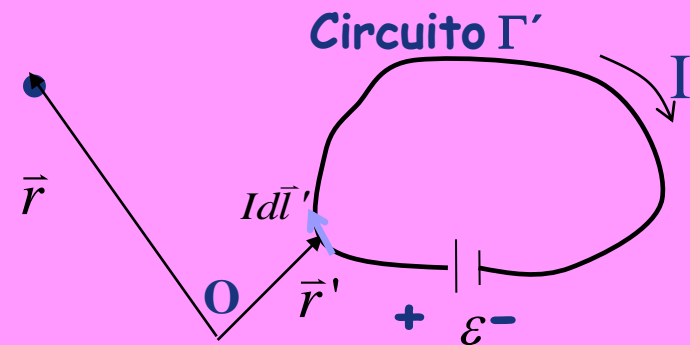
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Campo magnético

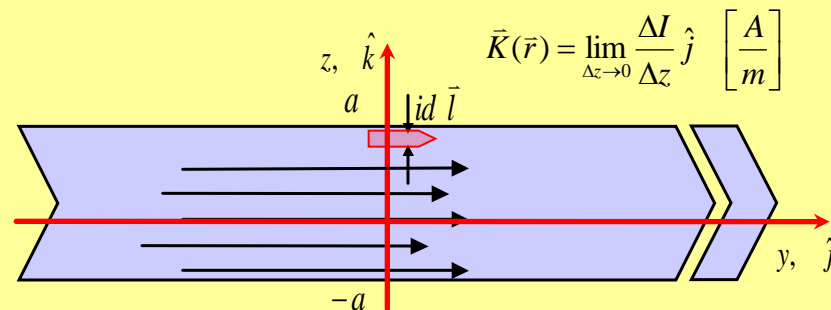
Campo producido por circuito Γ'

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



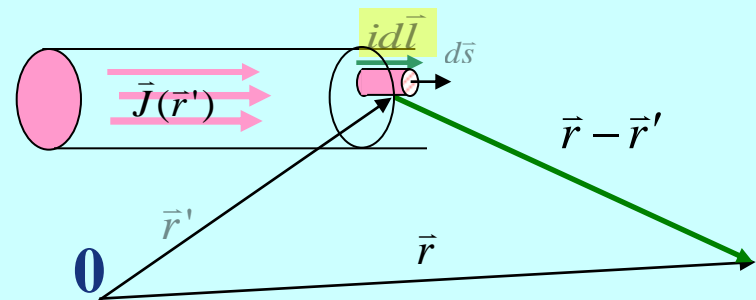
Campo producido por densidad de corriente superficial $\vec{K}(\vec{r})$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} ds'$$



Campo producido por densidad de corriente en volúmen $\vec{J}(\vec{r})$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

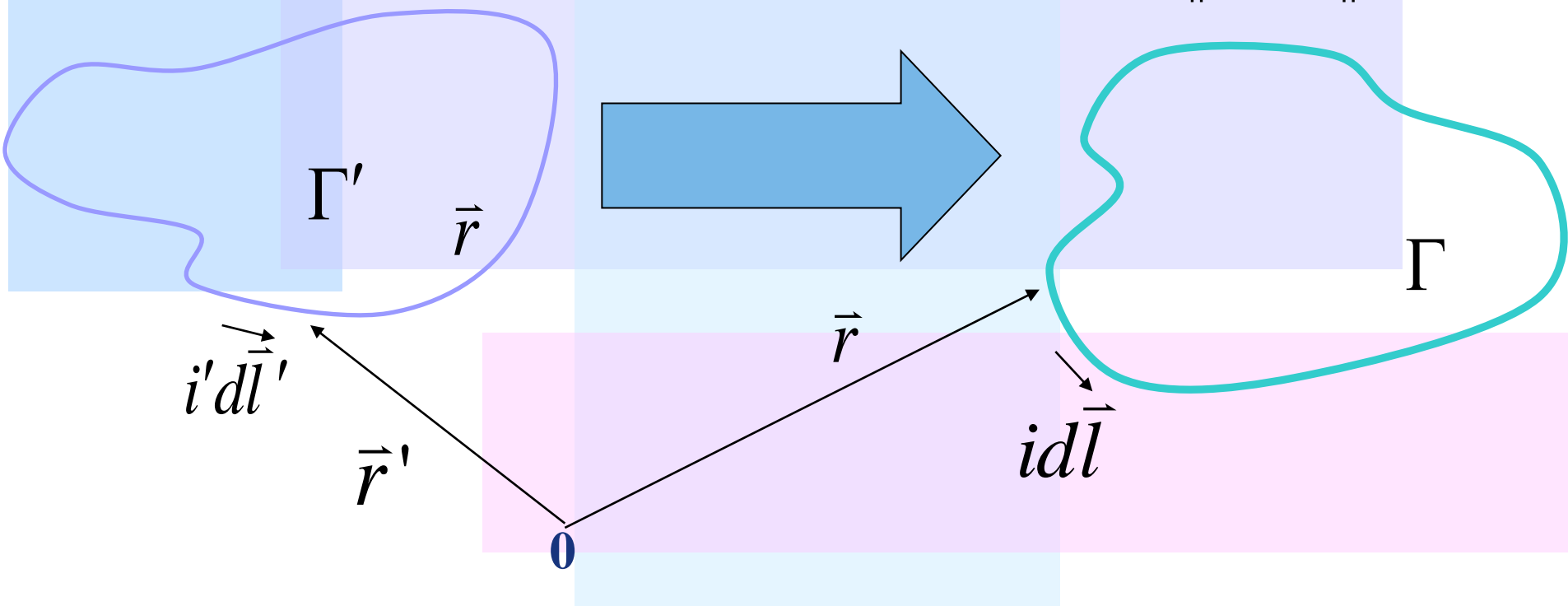




Ley de Biot y Savart

Fuerza que ejerce circuito Γ' sobre circuito Γ

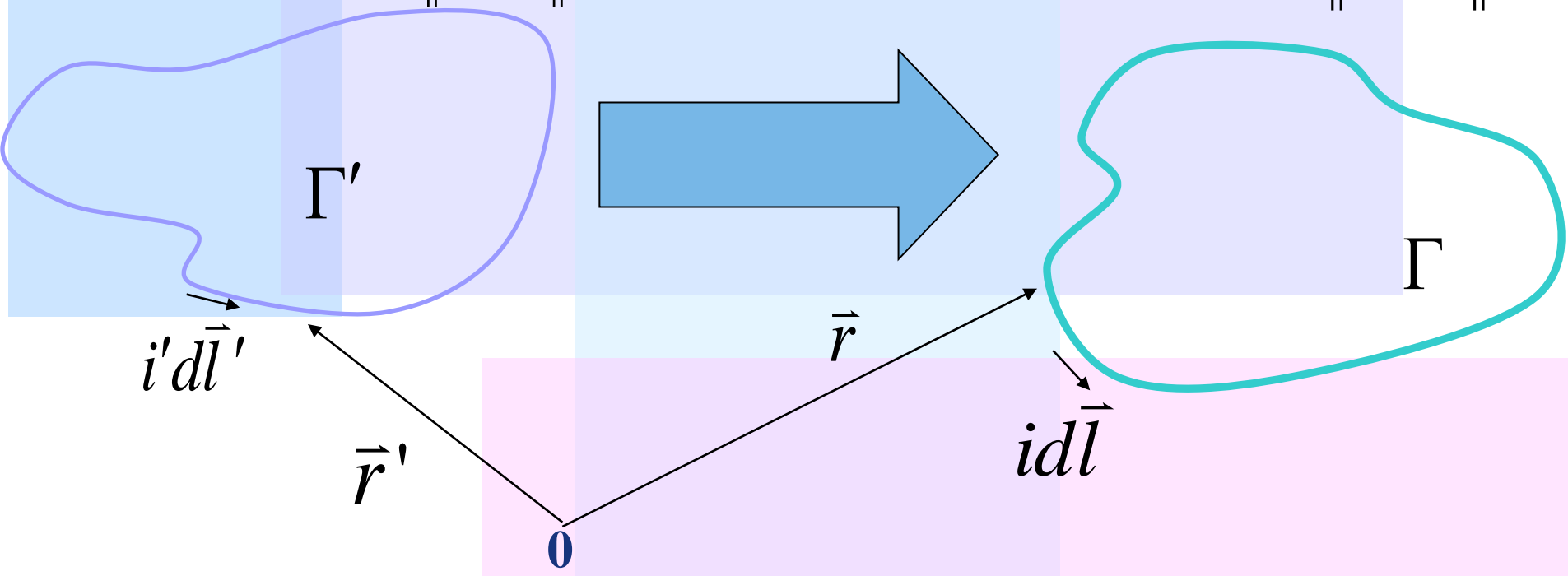
$$\vec{F}_{\Gamma' \rightarrow \Gamma} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{I' Id\vec{l} \times (d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$





Ley de Biot y Savart

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{I' Id\vec{l} \times (d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rightarrow d\vec{F} = \frac{Id\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



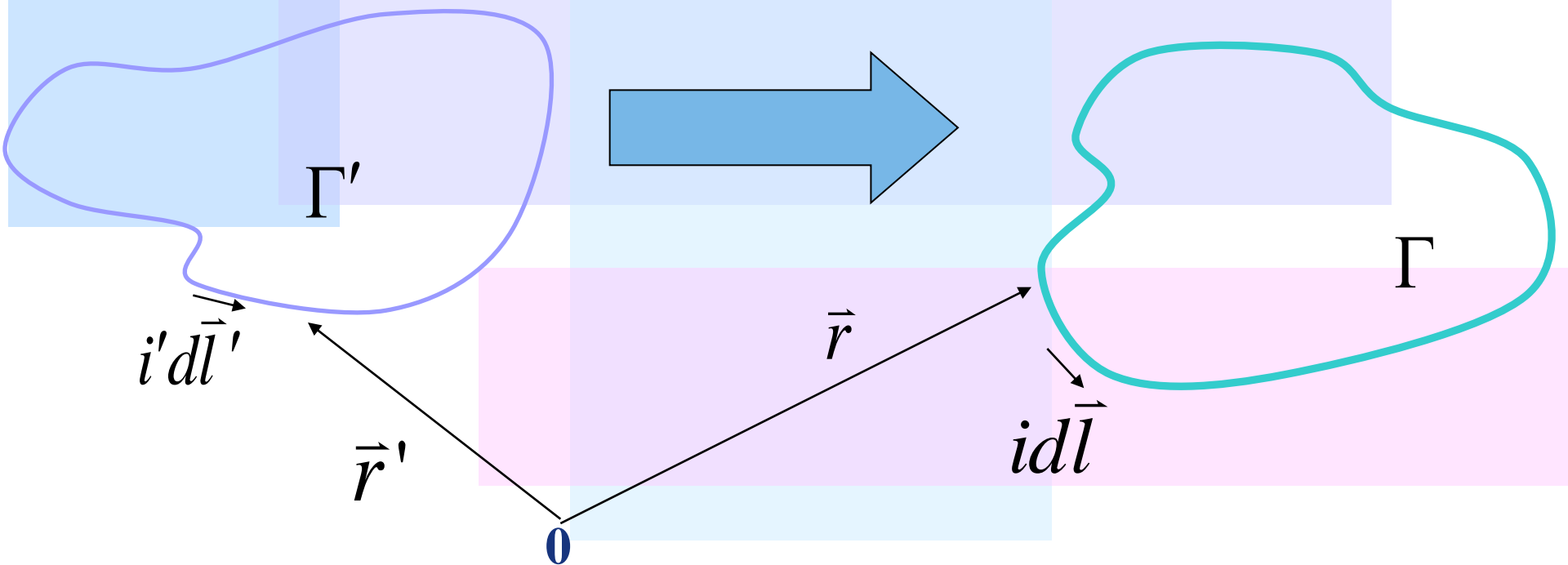


Ley de Biot y Savart

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\therefore d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Campo magnético
producido por circuito Γ'



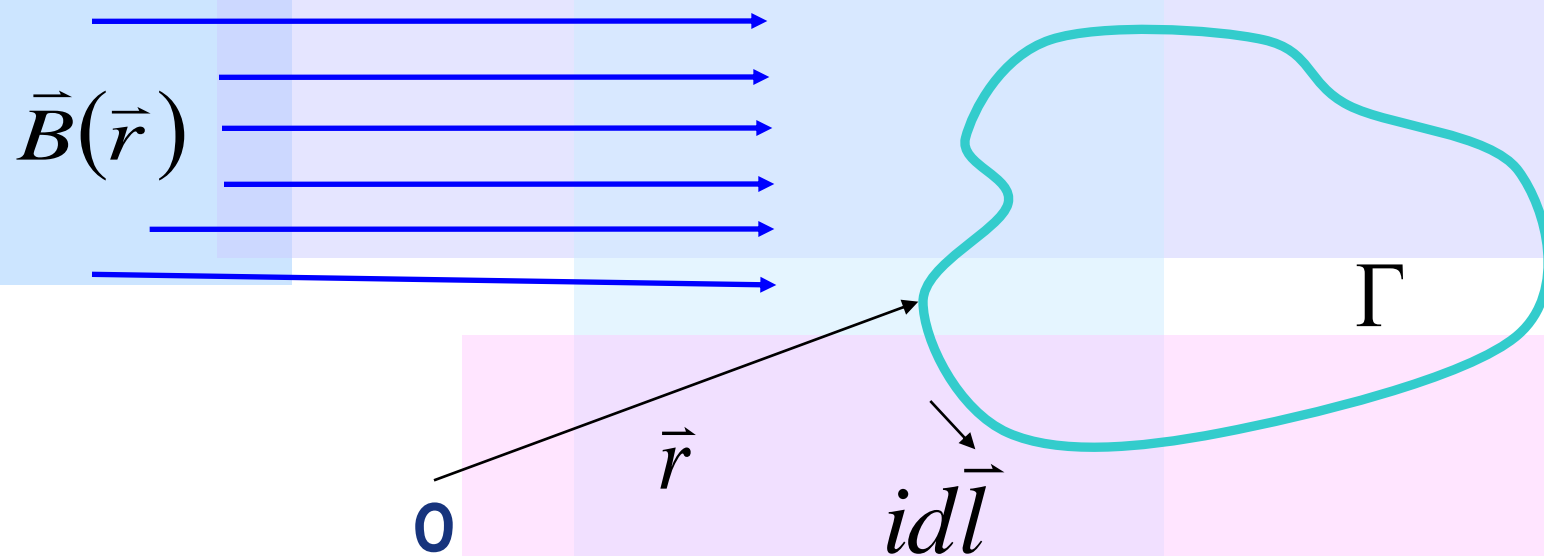


Ley de Biot y Savart

En general, un circuito en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza dada por la ecuación

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\therefore \vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \oint_{\Gamma} I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

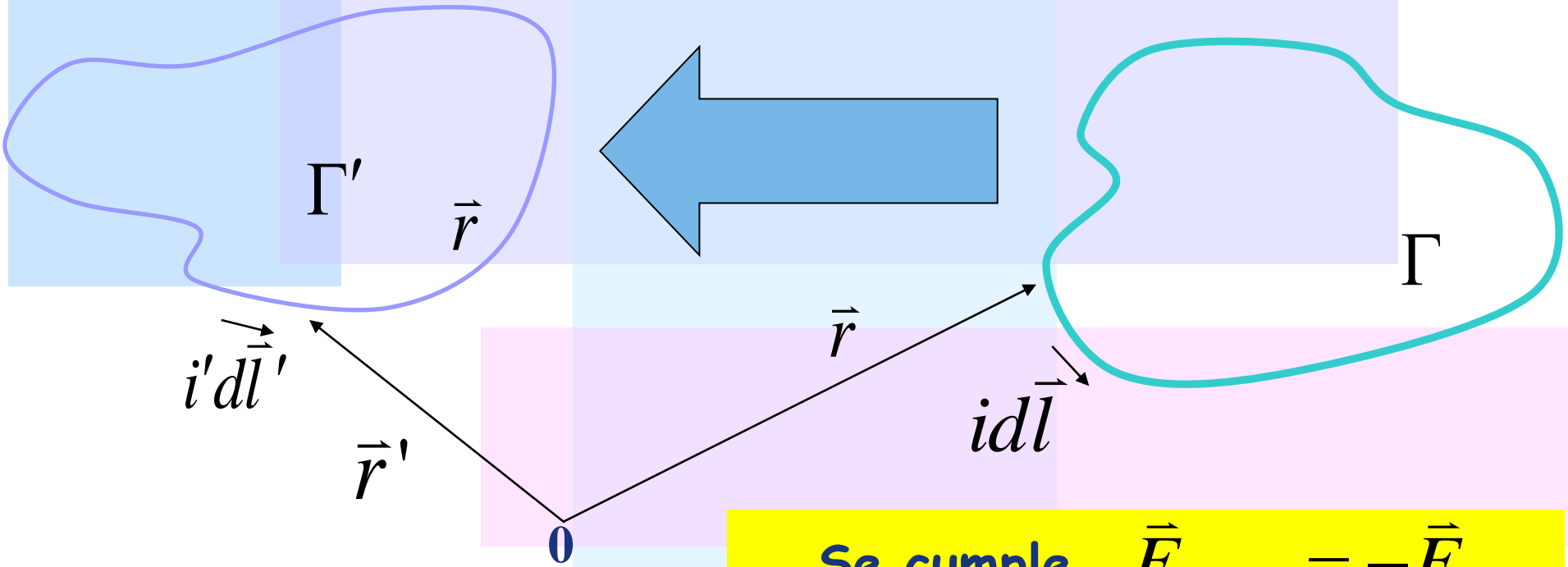




Ley de Biot y Savart

Fuerza que ejerce circuito Γ sobre circuito Γ'

$$\vec{F}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Gamma' \Gamma} \frac{I I' d\vec{l}' \times (d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Gamma \Gamma'} \frac{I' I d\vec{l} \times (d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

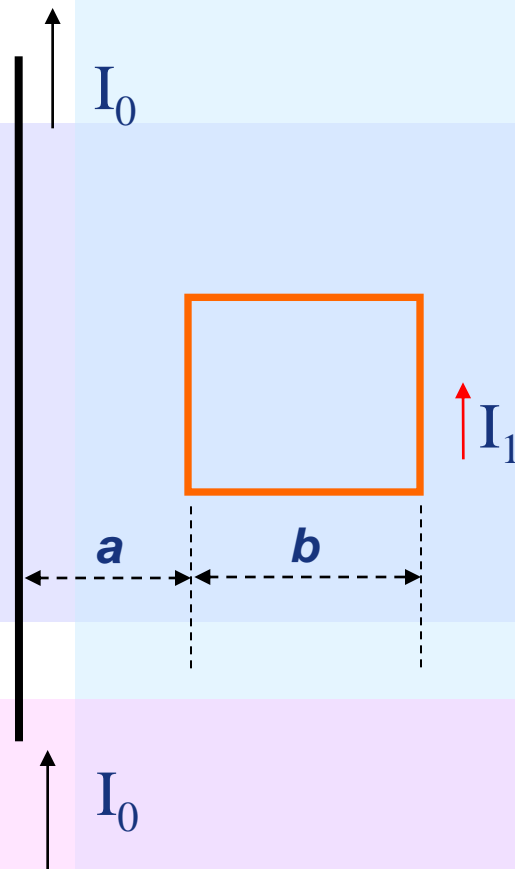


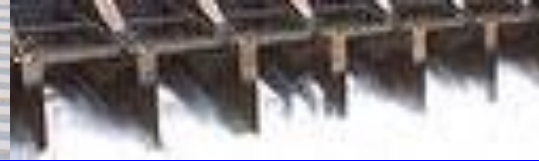
Se cumple $\vec{F}_{\Gamma' \rightarrow \Gamma} = -\vec{F}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}$



Ejemplo

Calcular la fuerza sobre la espira cuadrada





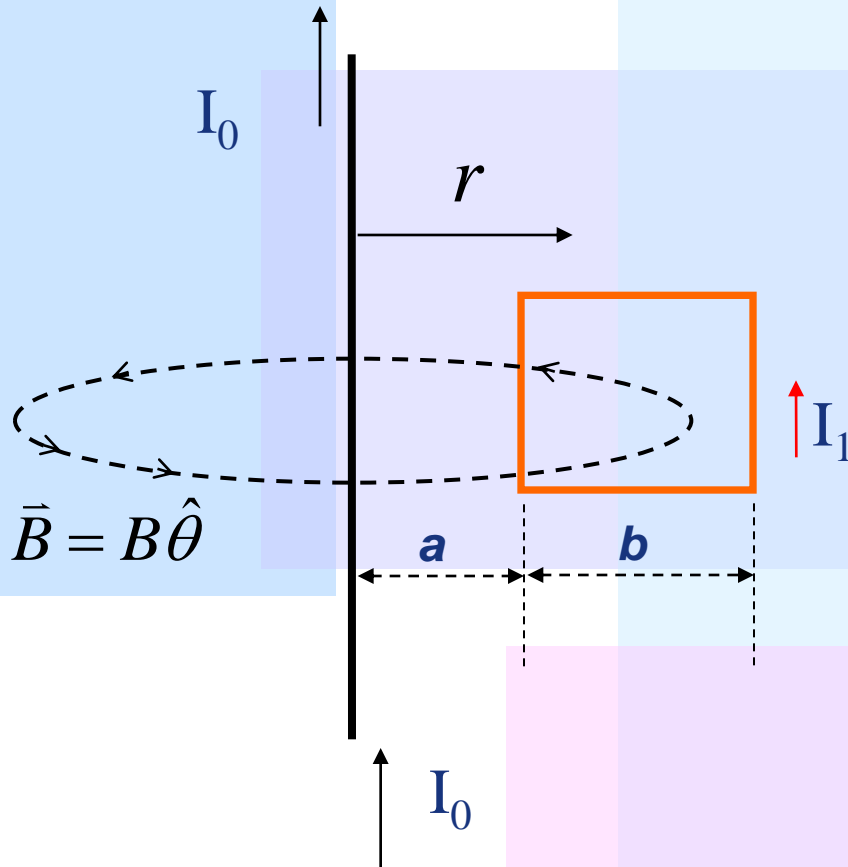
Ejemplo

Campo producido por el conductor infinito es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$$

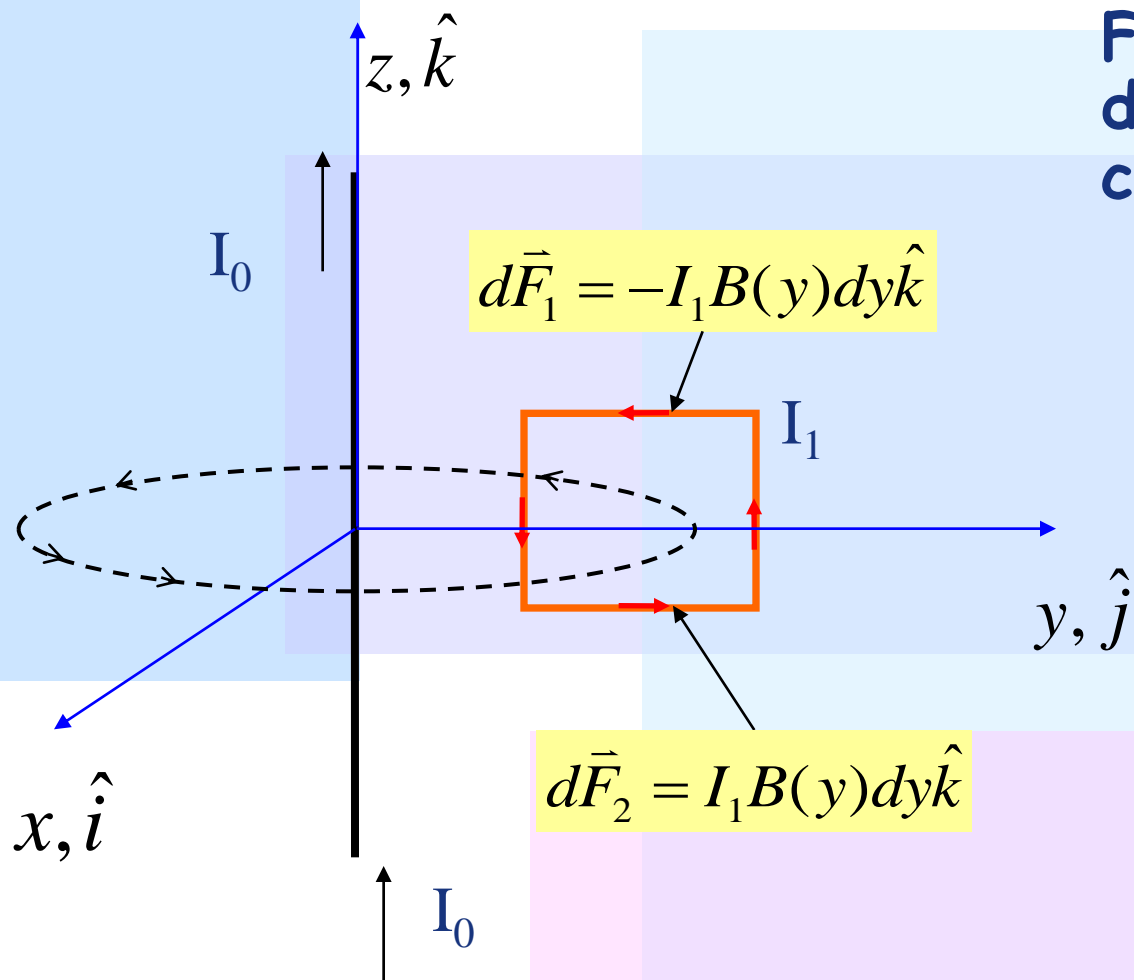
Fuerza sobre elemento de corriente de espira cuadrada

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$





Ejemplo



Fuerza sobre elemento de corriente de espira cuadrada

$$d\vec{F}_1 = -I_1 B(y) dy \hat{k}$$

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Espira en plano y-z

$$\vec{B}(\vec{r}) = -B(y) \hat{i}$$

$$d\vec{F}_2 = I_1 B(y) dy \hat{k}$$

Claramente

$$d\vec{F}_1 = -d\vec{F}_2$$



Ejemplo

$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$

$\vec{B}(\vec{r}) = -B(y)\hat{i}$

$d\vec{F}_3 = I_1 B(y = a) dz \hat{j}$

$d\vec{F}_4 = -I_1 B(y = a + b) dz \hat{j}$

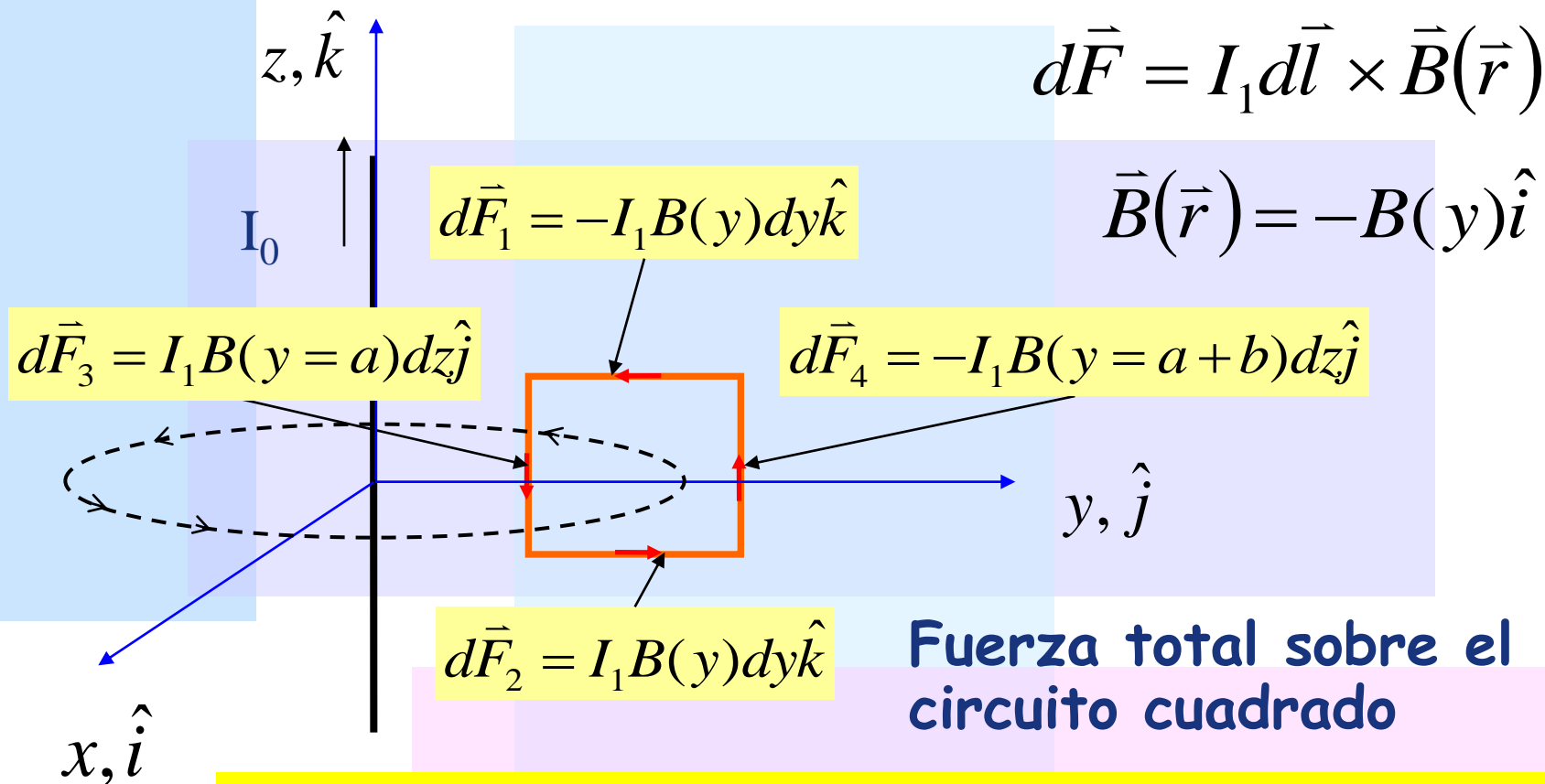
$d\vec{F}_3 = I_1 \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} dz \hat{j}$

$d\vec{F}_4 = -I_1 \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a + b} dz \hat{j}$

Claramente



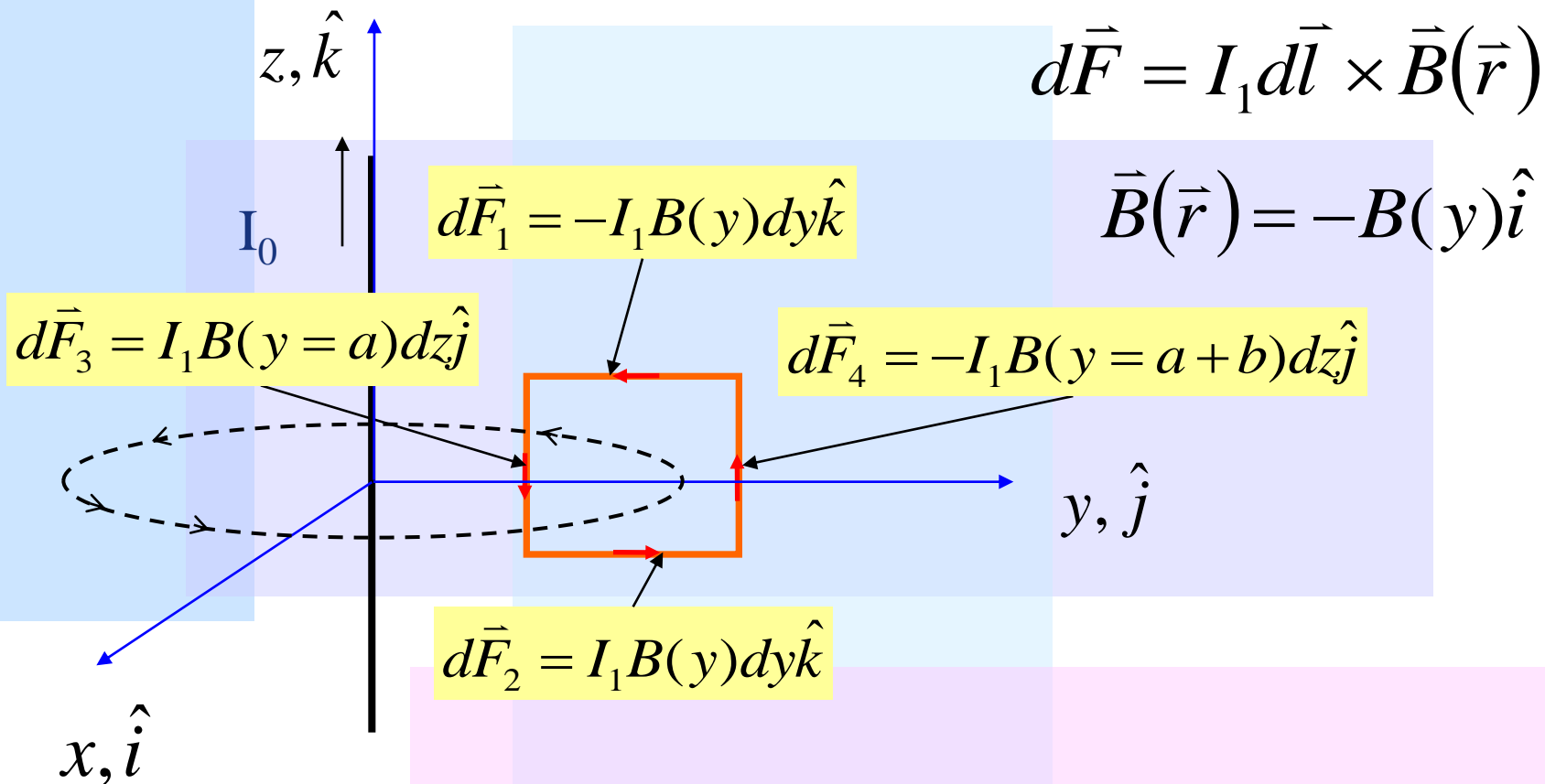
Ejemplo



$$\therefore \vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \int_{y=a+b}^{y=a} d\vec{F}_1 + \int_{z=b/2}^{z=-b/2} d\vec{F}_3 + \int_{y=a}^{y=a+b} d\vec{F}_2 + \int_{z=-b/2}^{z=b/2} d\vec{F}_4$$



Ejemplo



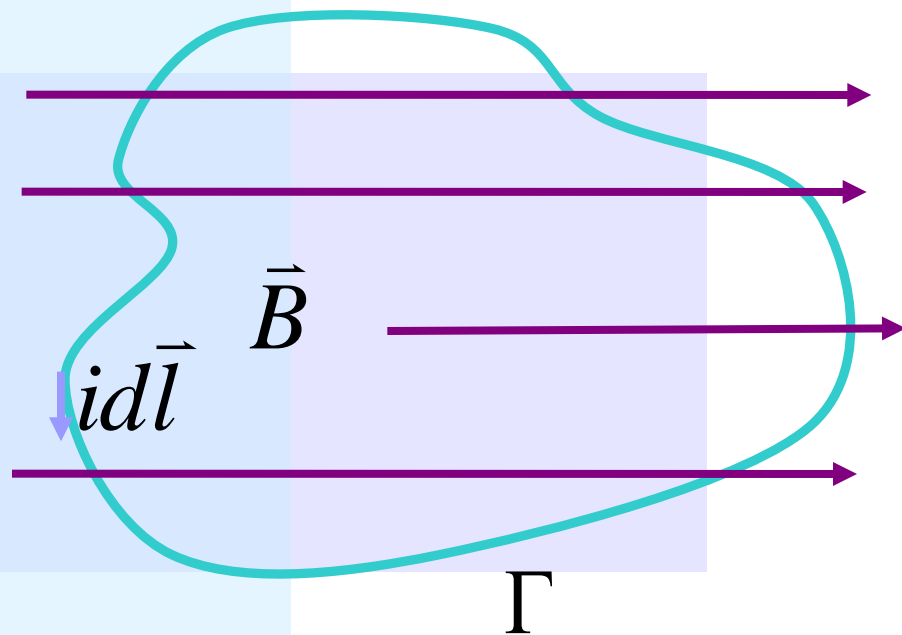
$$\vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \int_{z=b/2}^{z=-b/2} \frac{\mu_0 I_1 I_0 \hat{j}}{2\pi a} dz - \int_{z=-b/2}^{z=b/2} \frac{\mu_0 I_1 I_0 \hat{j}}{2\pi(a+b)} dz = \frac{\mu_0 I_1 I_0 b^2}{2\pi(a+b)} \hat{j}$$



Torque Magnético

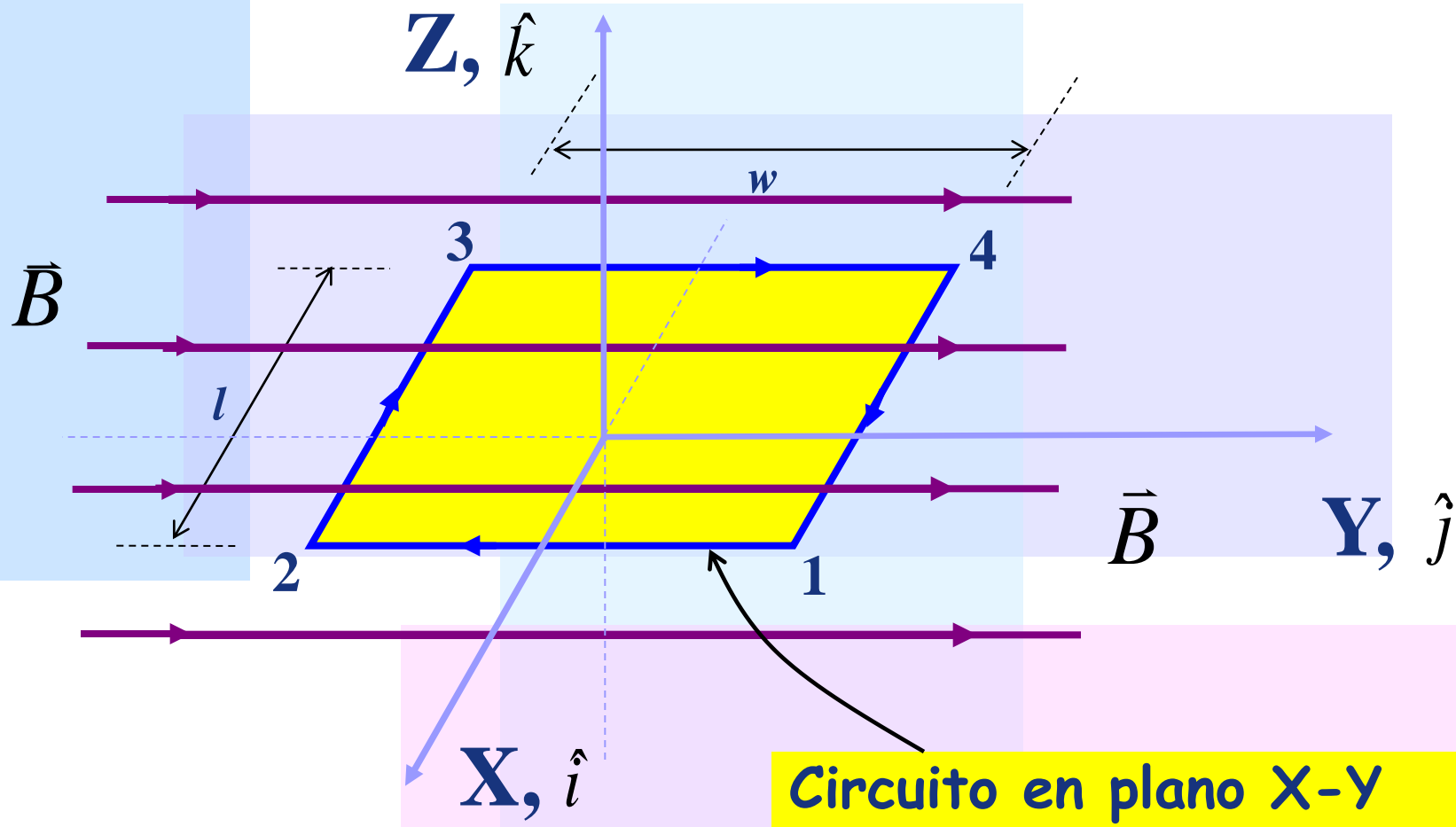
Ley de Biot y Savart

$$\therefore d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



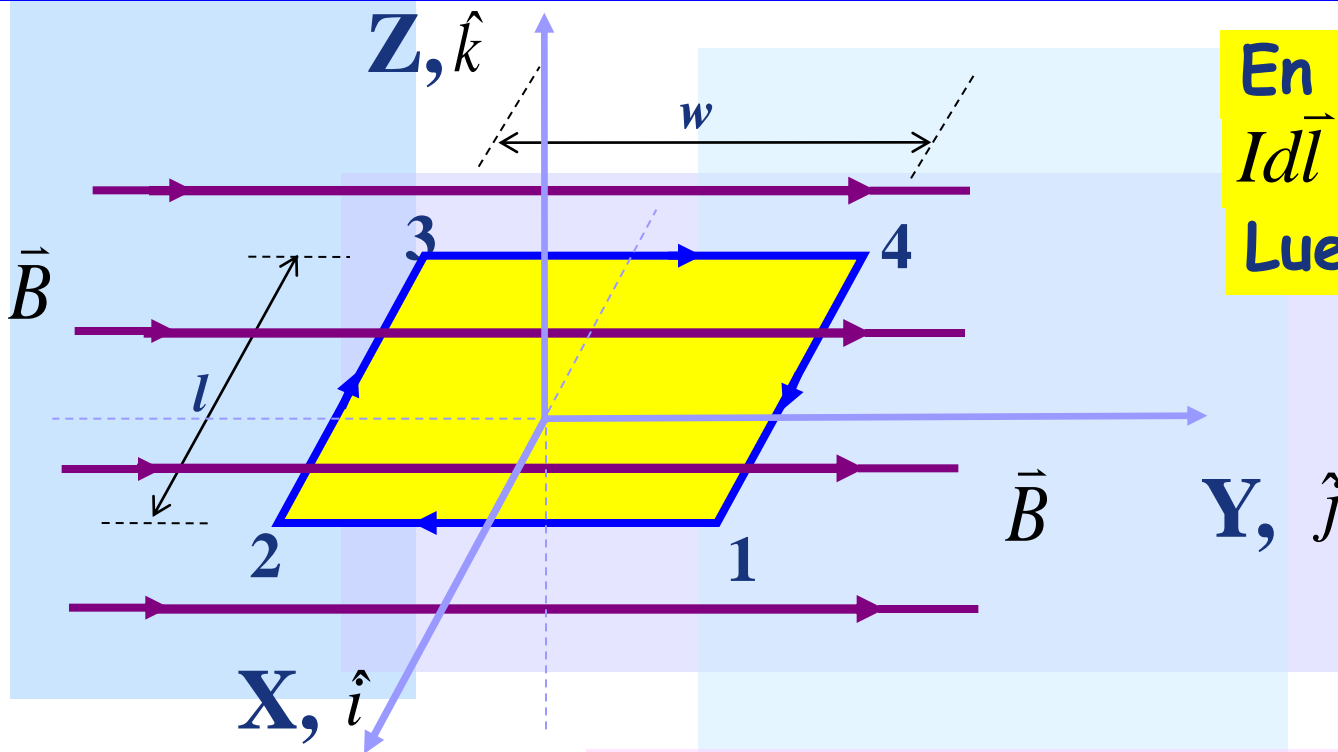


Torque Magnético





Torque Magnético



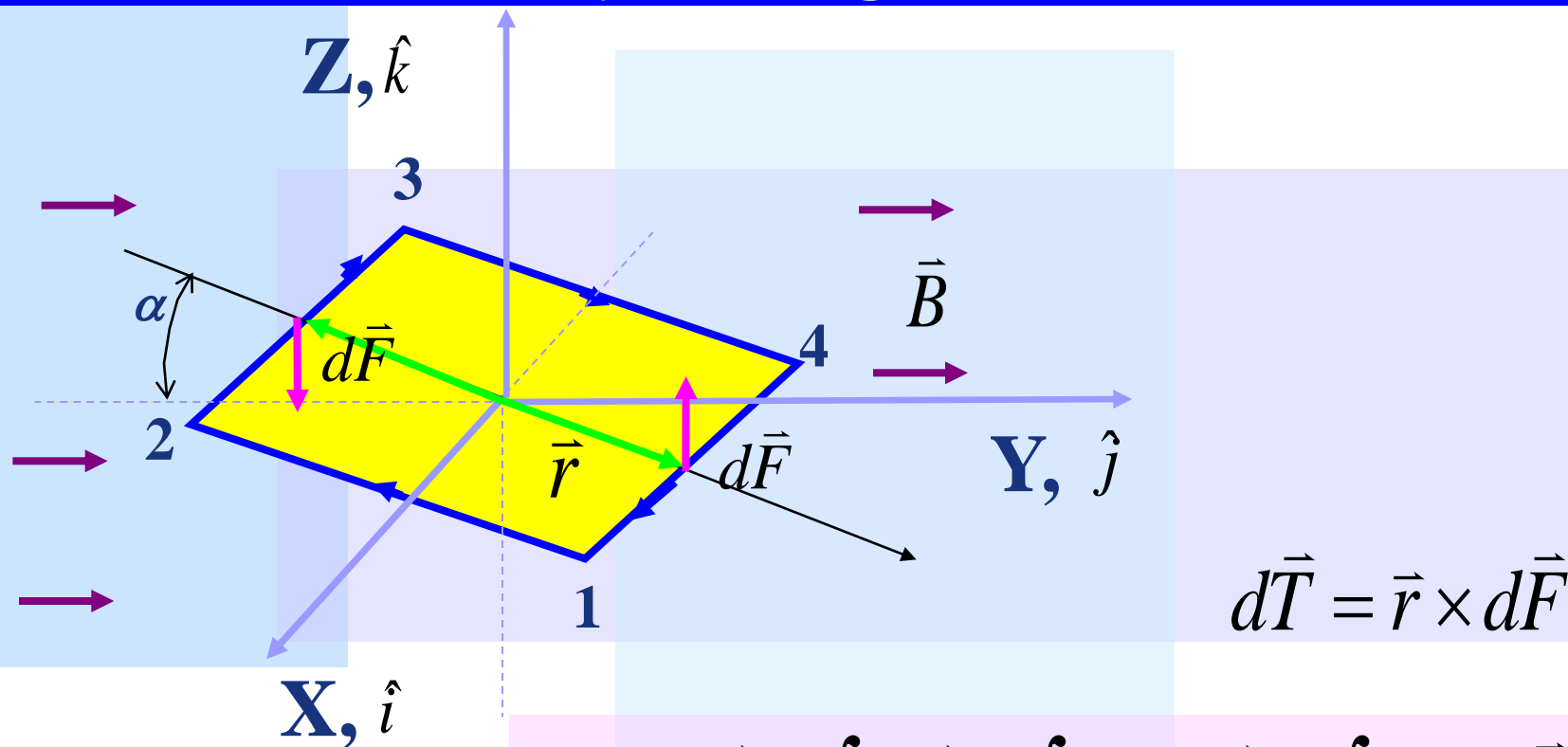
En lados 1-2 y 3-4
 $I d\vec{l}$ es paralelo a \vec{B}
 Luego $F=0$

$$\vec{F} = I \int_2^3 d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_4^1 d\vec{l} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = I \int_2^3 dx(-\hat{i}) \times \vec{B} + I \int_4^1 dx(\hat{i}) \times \vec{B}$$

$\therefore \vec{F} = 0$ Fuerza neta nula sobre el circuito si \vec{B} constante



Torque Magnético

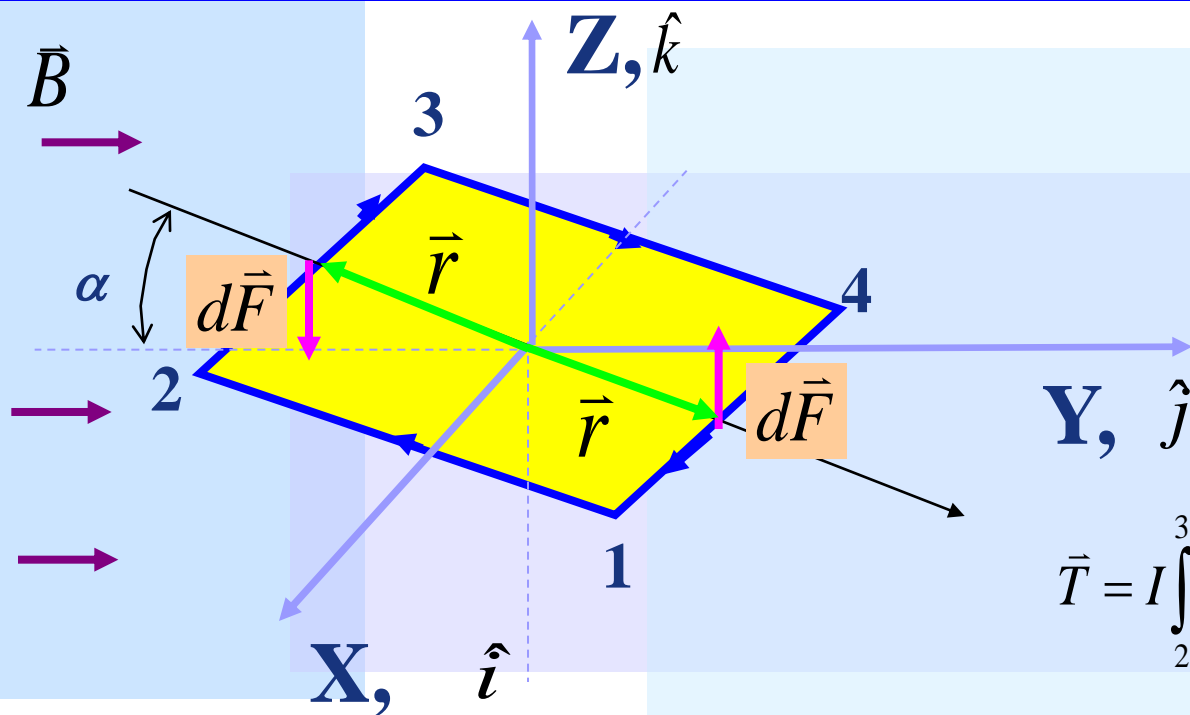


$$\vec{T} = \oint_c d\vec{T} = \oint_c \vec{r} \times d\vec{F} = \oint_c \vec{r} \times id\vec{l} \times \vec{B}$$

Torque neto no nulo sobre el circuito



Torque Magnético



$$\vec{T} = I \int_2^3 \vec{r} \times dx \hat{i} \times \vec{B} + I \int_4^1 \vec{r} \times dx \hat{i} \times \vec{B}$$

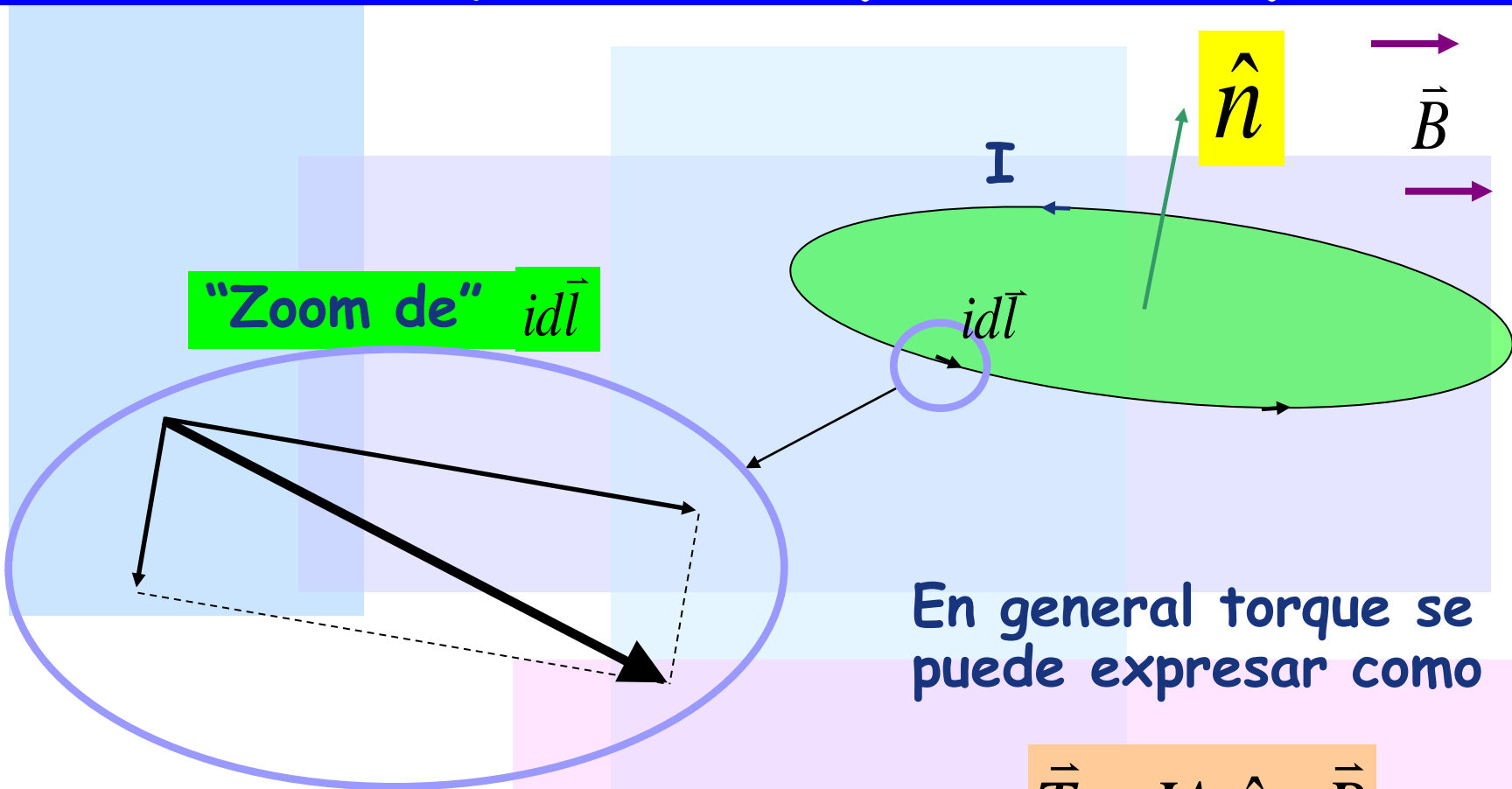
$$\vec{T} = \frac{Iwl}{2} \cos \alpha \hat{i} + \frac{Iwl}{2} \cos \alpha \hat{i}$$

Torque neto sobre el circuito

$$\therefore \vec{T} = \underbrace{Iwl}_{\text{Area}} \cos \alpha \hat{i}$$



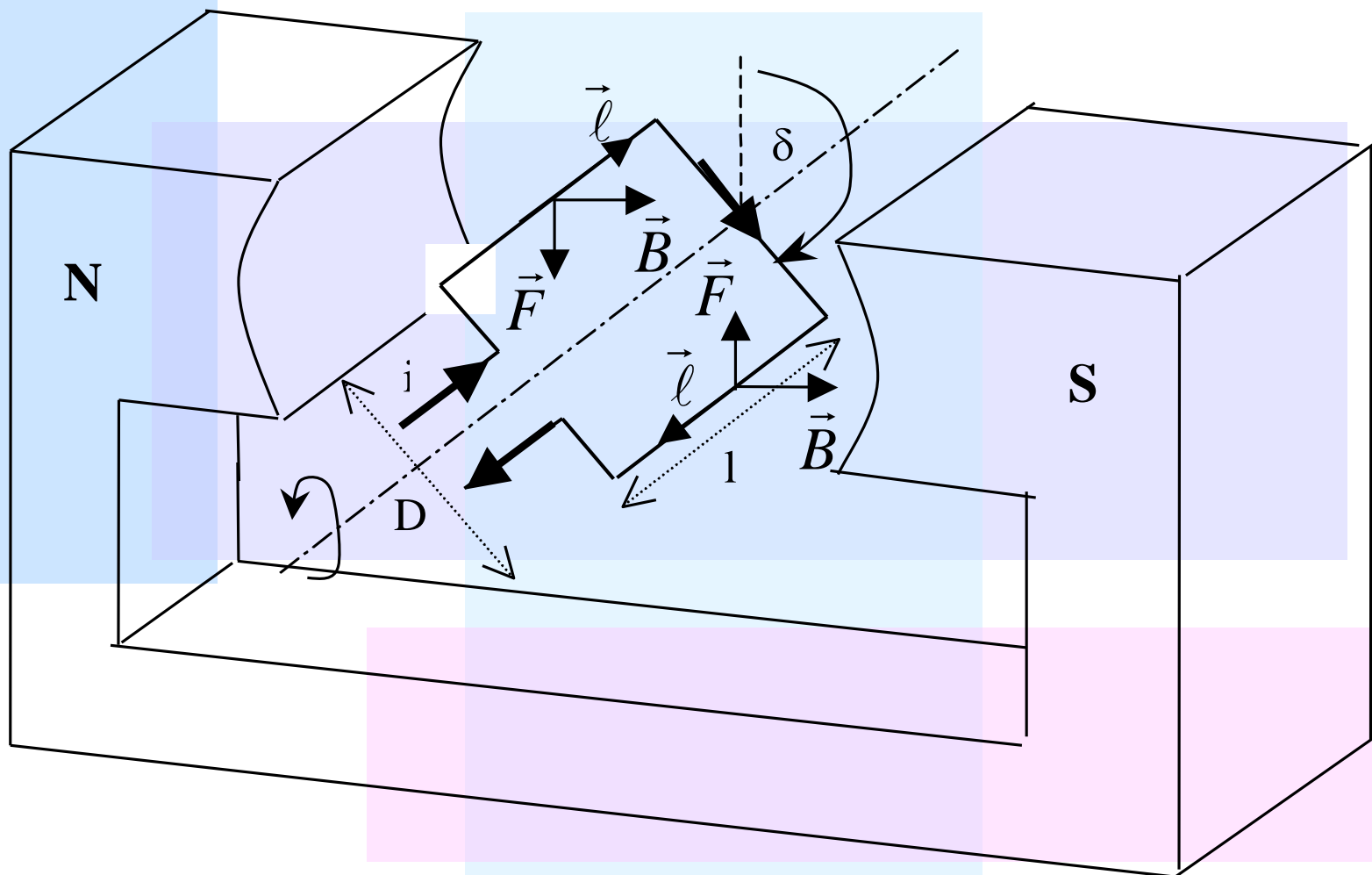
Torque de campo sobre dipolo



$$\vec{T} = IA \hat{n} \times \vec{B}$$

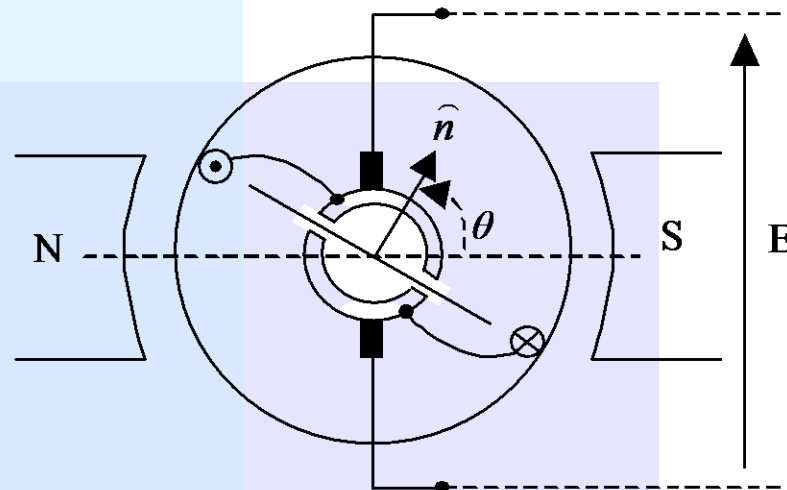
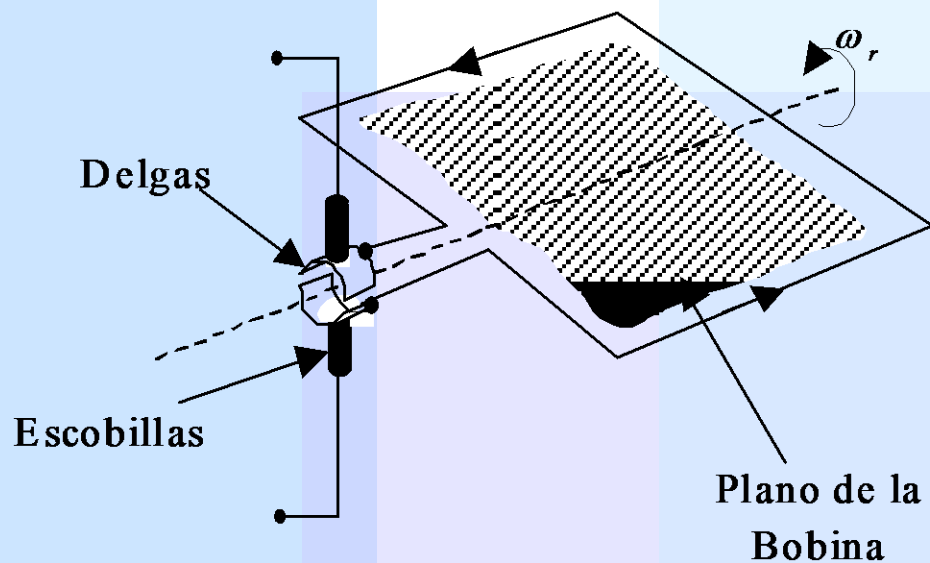


Motor elemental





Motor elemental

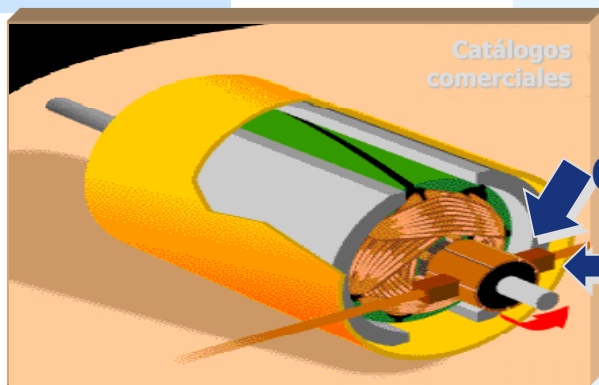




Motores



Motor de CC de 6000 kW fabricado por ABB



Colector

Escobillas

Colector real

