FI 2002 ELECTROMAGNETISMO Clase 18 Magnetostática III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

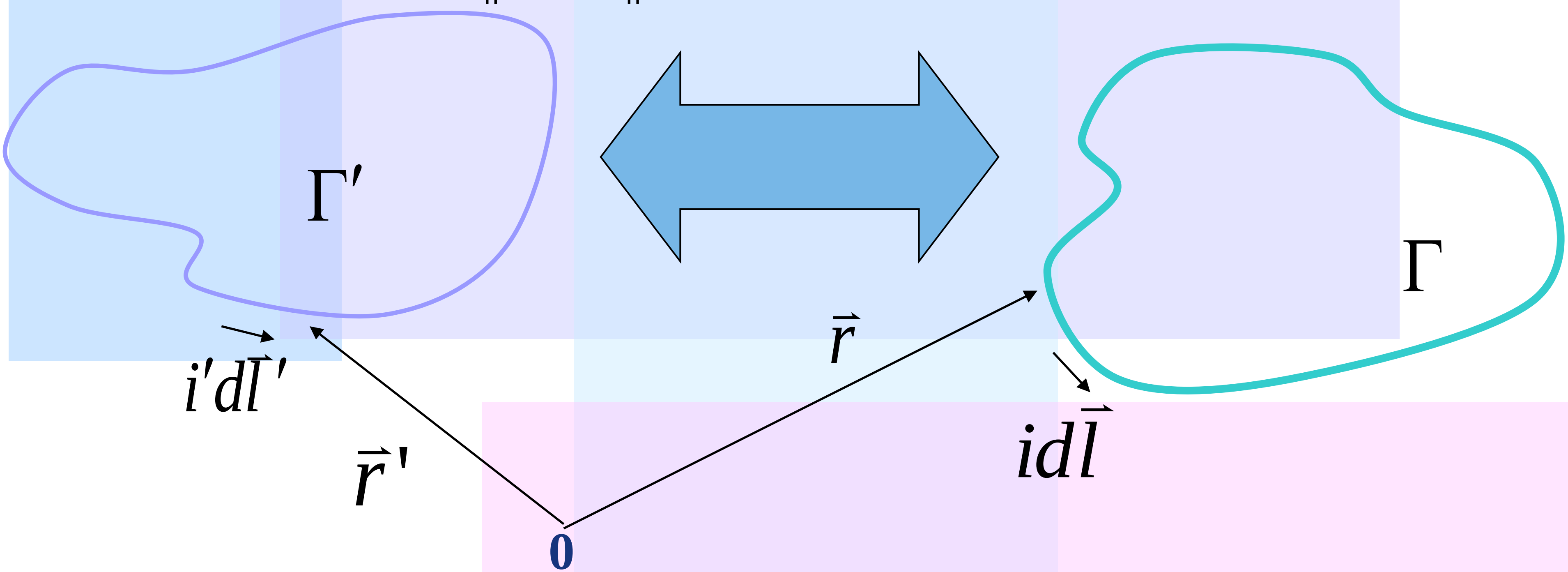
- Repaso
- Ley Circuital de Ampere
- 3a Ecuación de Maxwell
- 4ta Ecuación de Maxwell

Roberto Matta, “Abrir el cubo y encontrar la vida"

Ley de Biot y Savart

$$d\vec{F} = \frac{I d\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\therefore \quad d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

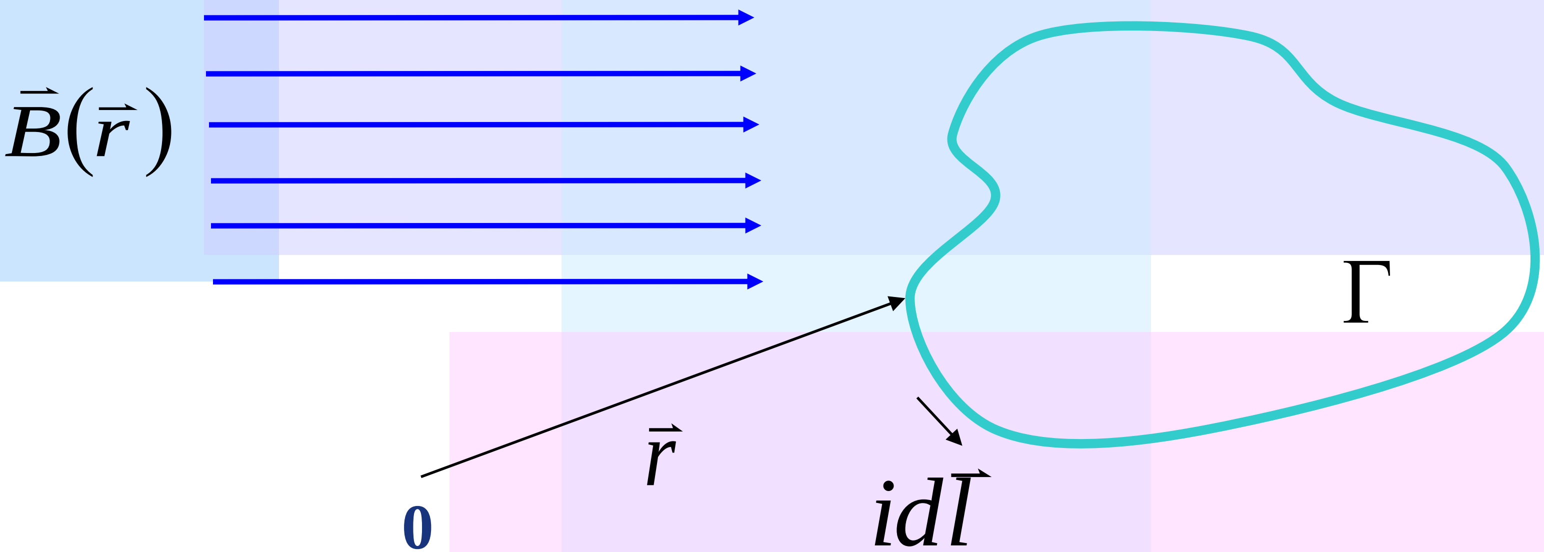


Ley de Biot y Savart

Así, un circuito en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza dada por la ecuación

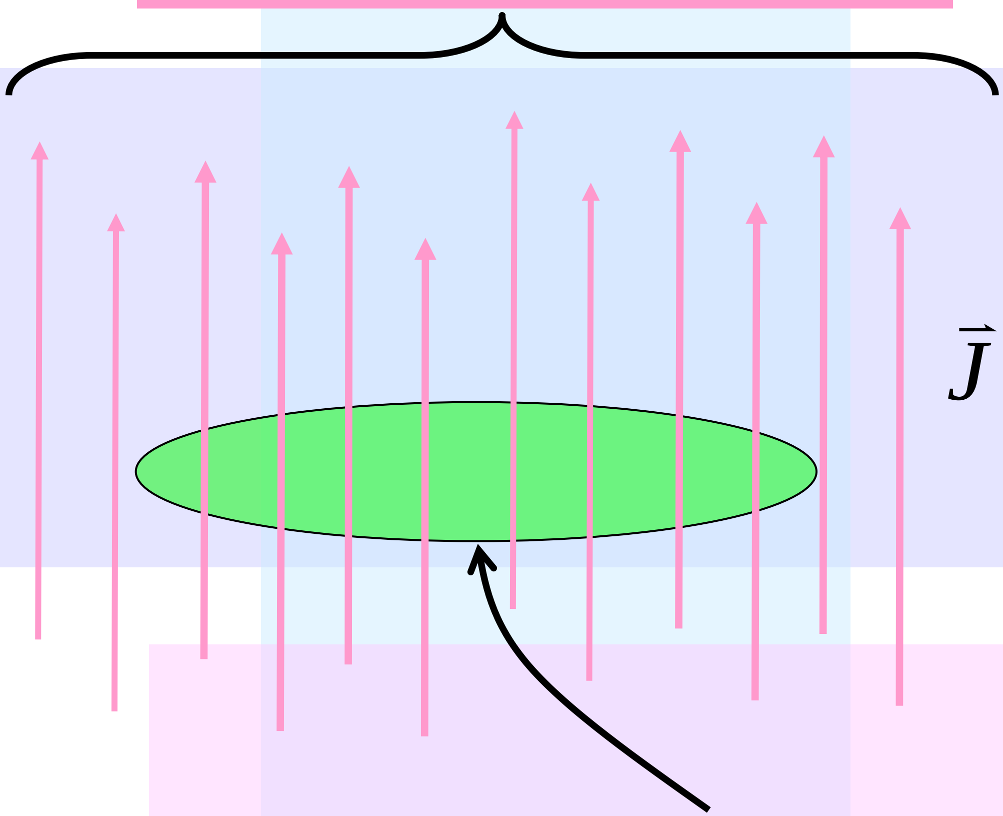
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\therefore \quad \vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \oint_{\Gamma} I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



Ley Circuital de Ampere

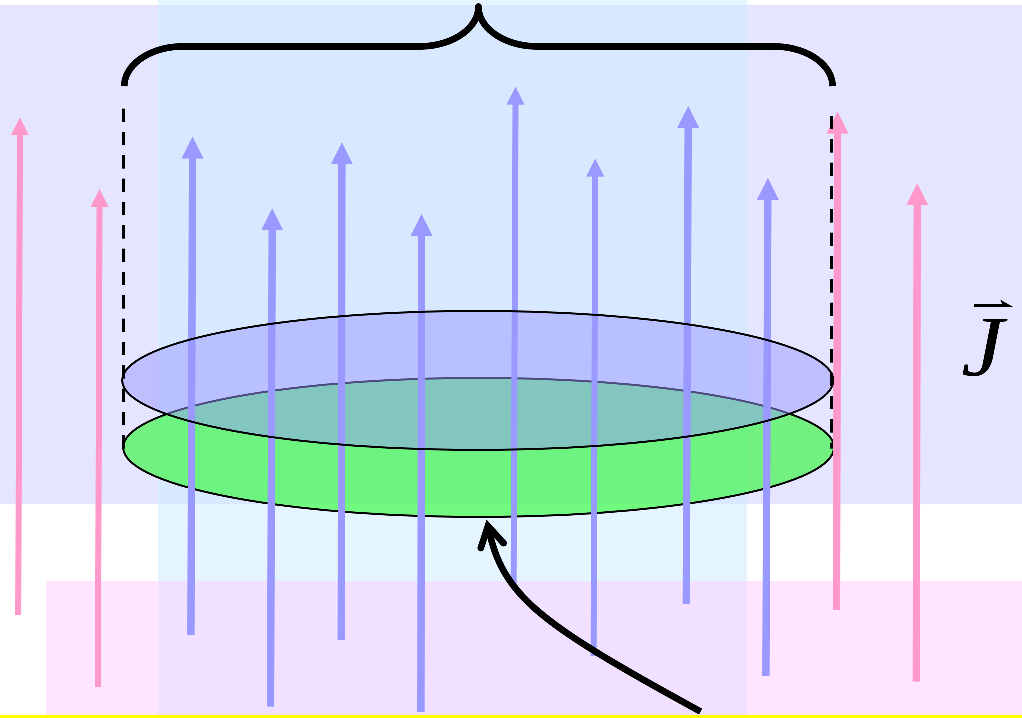
Líneas de corriente



Plano S por donde atraviesan líneas de corriente

Ley Circuital de Ampere

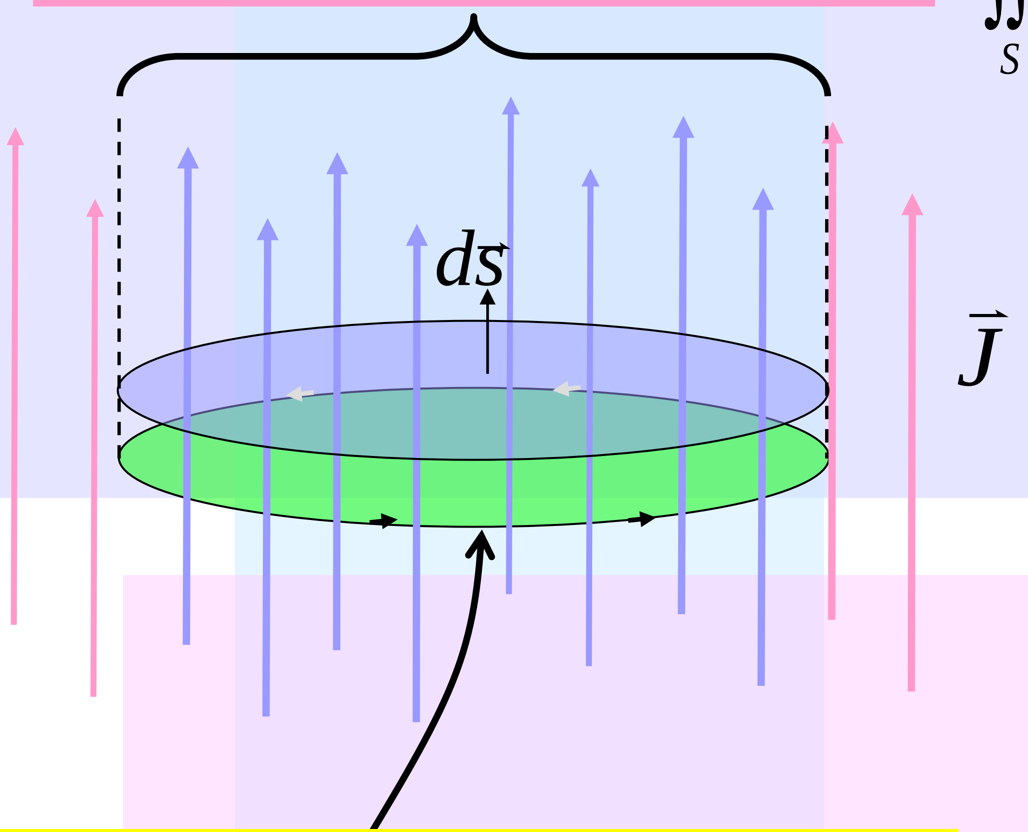
Corriente que atraviesa por S



Plano S por donde atraviesan líneas de corriente

Ley Circuital de Ampere

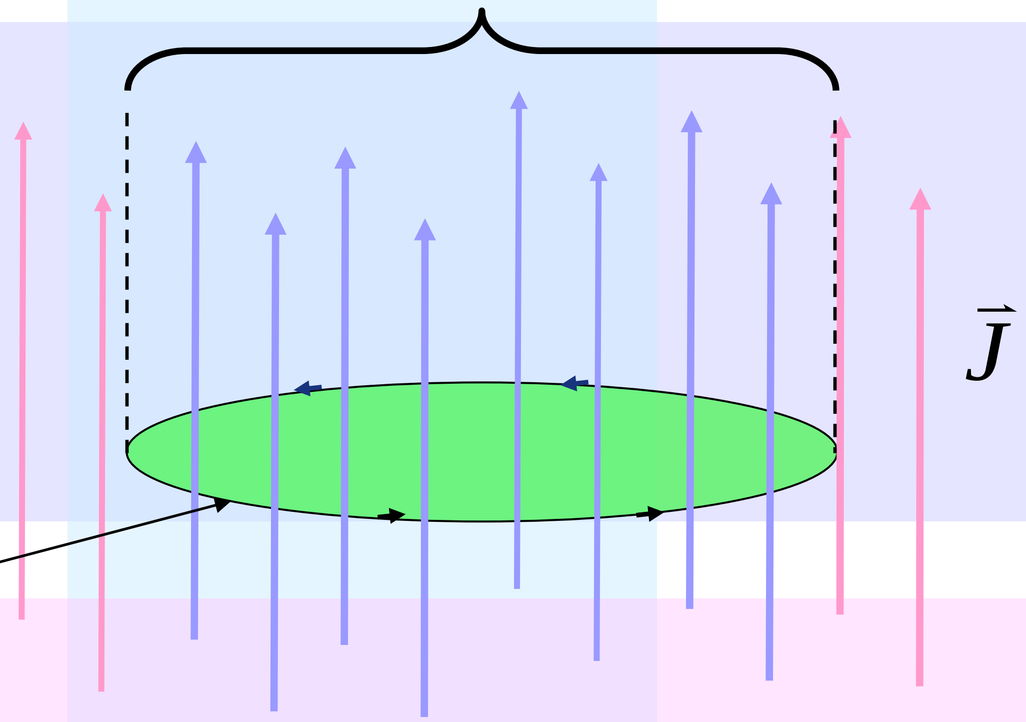
Corriente enlazada por $\Gamma(s)$ $= \iint_S \vec{J} \bullet d\vec{s}$



Trayectoria cerrada $\Gamma(S)$

Ley Circuital de Ampere

$I_{enlazada}$ = Corriente enlazada por $\Gamma(s)$



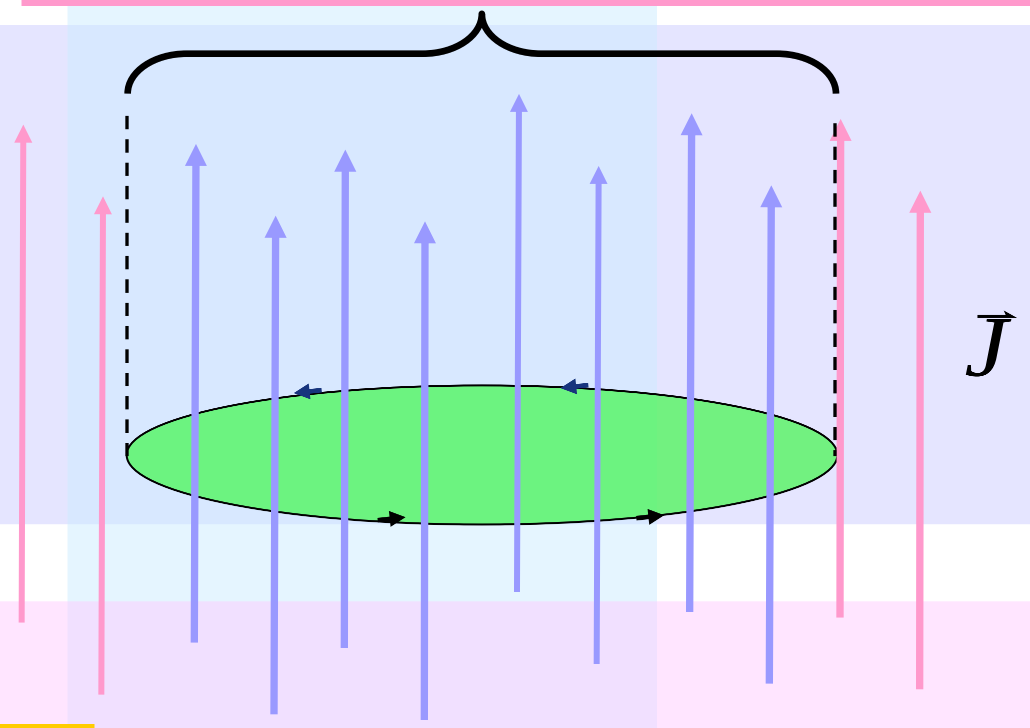
Trayectoria cerrada $\Gamma(s)$

$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

Ley Circuital de Ampere

Ley Circuital de Ampere

$I_{enlazada}$ = Corriente enlazada por $\Gamma(s)$



$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$\vec{H}$: Vector Intensidad de Campo Magnético

$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

Ley Circuital de Ampere

Unidades

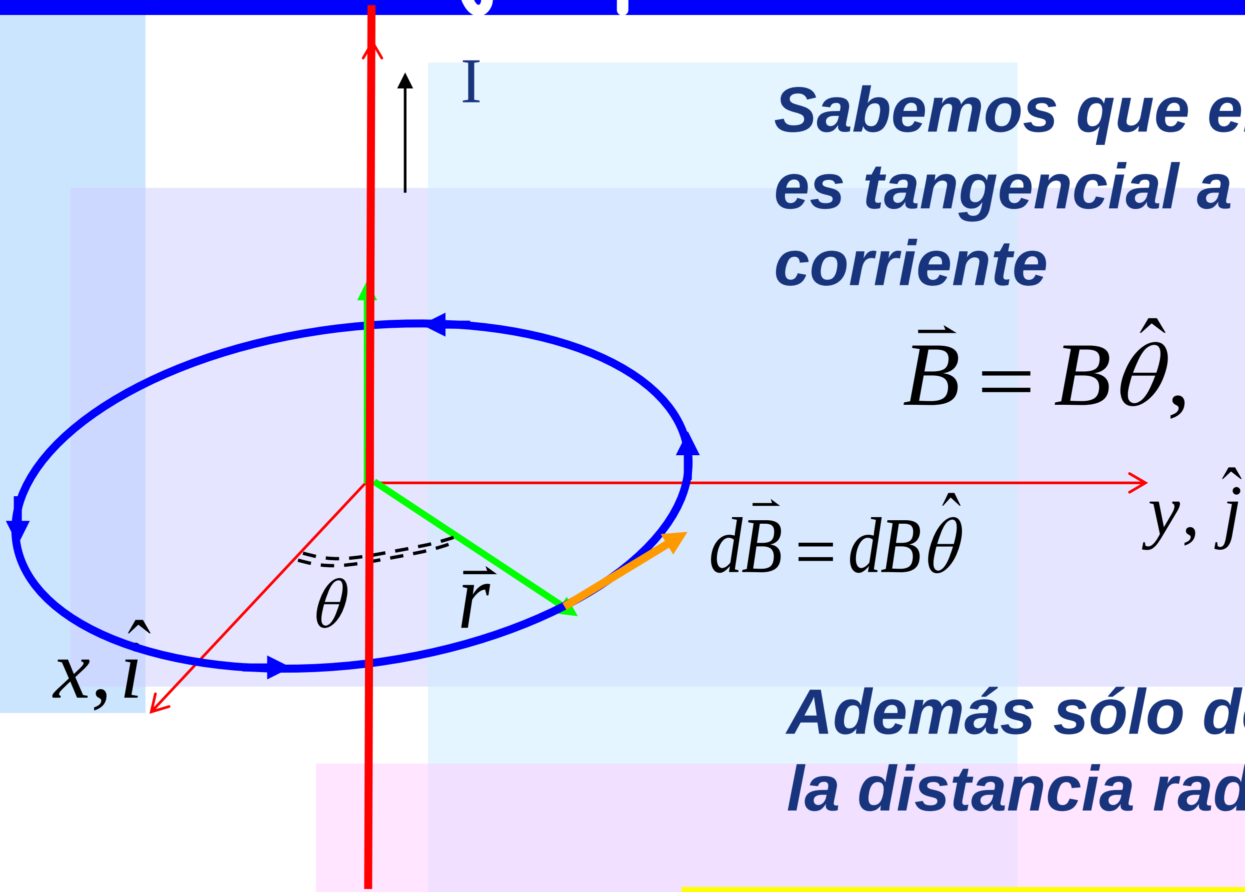
	ϕ	$\vec{B}$
Sistema CGS	[líneas]	[líneas/cm^2]
Sistema MKS	[Wb] (Weber)	[Wb/m^2] = [Tesla]
Equivalencias	1 [Wb] = 10^8 [líneas]	1 [Tesla] = 10^4 [Gauss] = 10 [kGauss]

Ejemplo 1

Calcular el campo magnético de una corriente unifilar infinita

$$\vec{B} = ?$$

Ejemplo 1



Sabemos que el campo es tangencial a la corriente

$$\vec{B} = B\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H\hat{\theta}$$

Además sólo depende de la distancia radial r

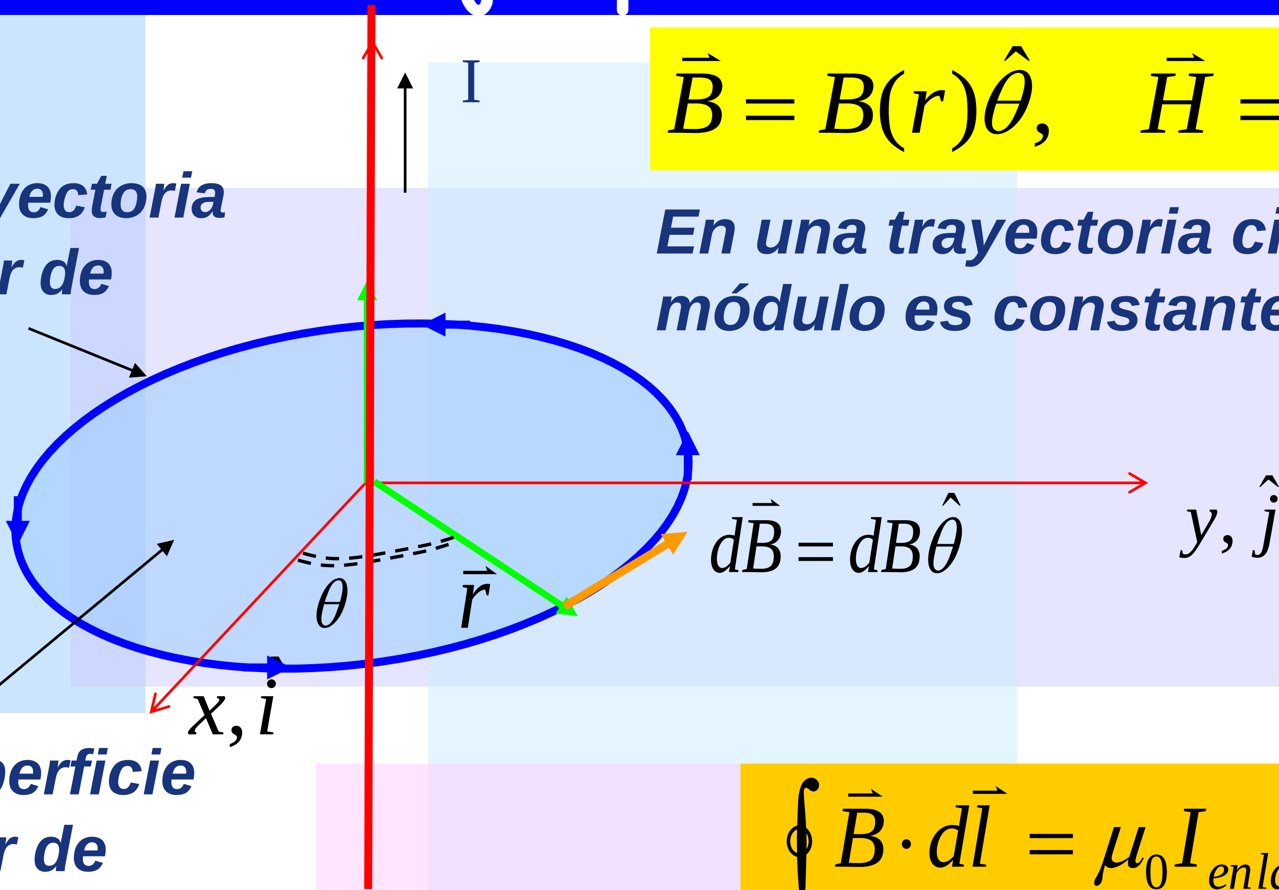
$$\boxed{\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}}$$

Ejemplo 1

$$\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$

Γ *: trayectoria circular de radio r*

En una trayectoria circular el módulo es constante



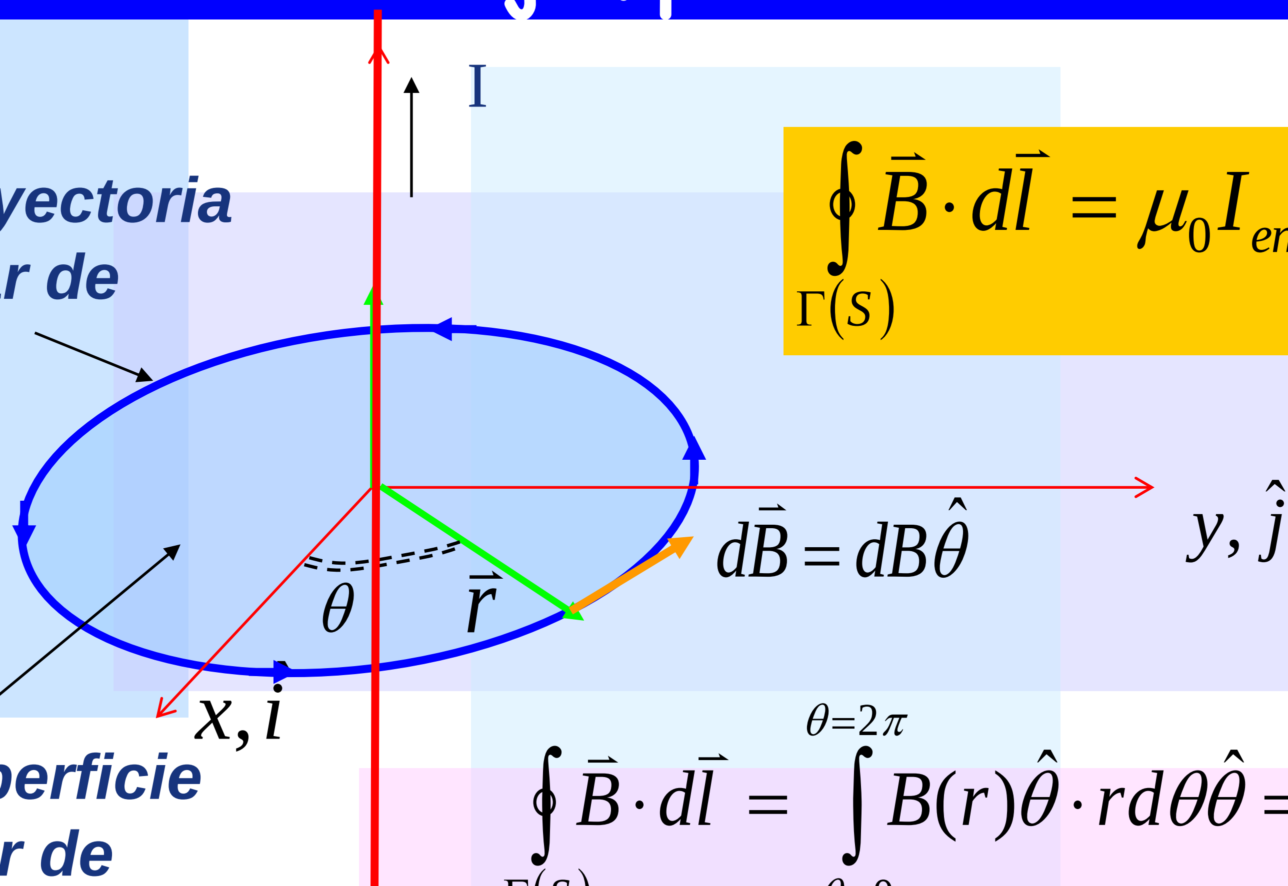
S *: superficie circular de radio r*

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}(S)$$

Ejemplo 1

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}(S)$$

Γ ***: trayectoria circular de radio r***



S ***: superficie circular de radio r***

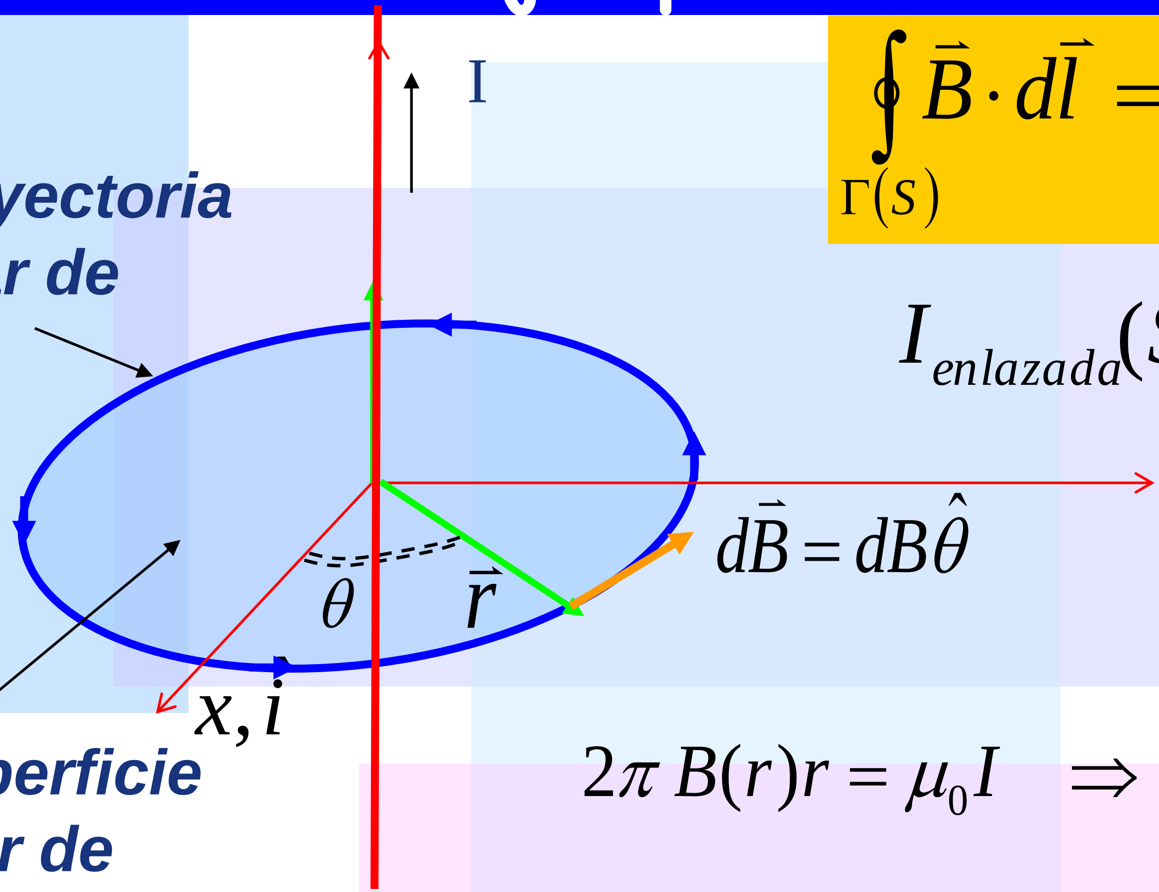
$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} B(r)\hat{\theta}\cdot r d\theta\hat{\theta} = B(r)r\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{\Gamma(S)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi\, B(r) r$$

Ejemplo 1

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}(S)$$

Γ : trayectoria circular de radio r



S : superficie circular de radio r

$$I_{enlazada}(S) = I$$

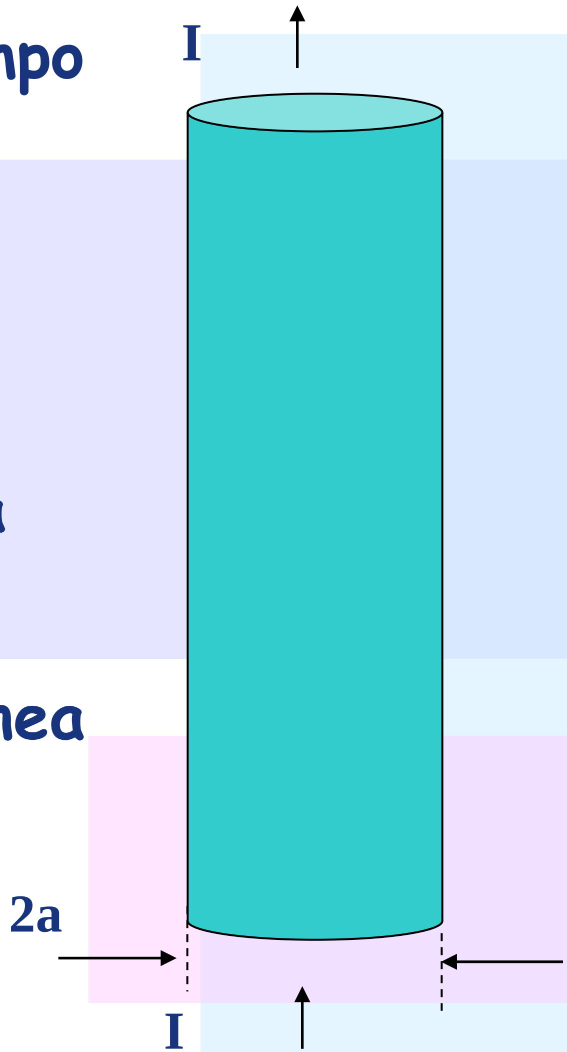
$$2\pi B(r) r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\therefore \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Ejemplo 2

Calcular el campo magnético al interior de un cilindro macizo de corriente infinito.

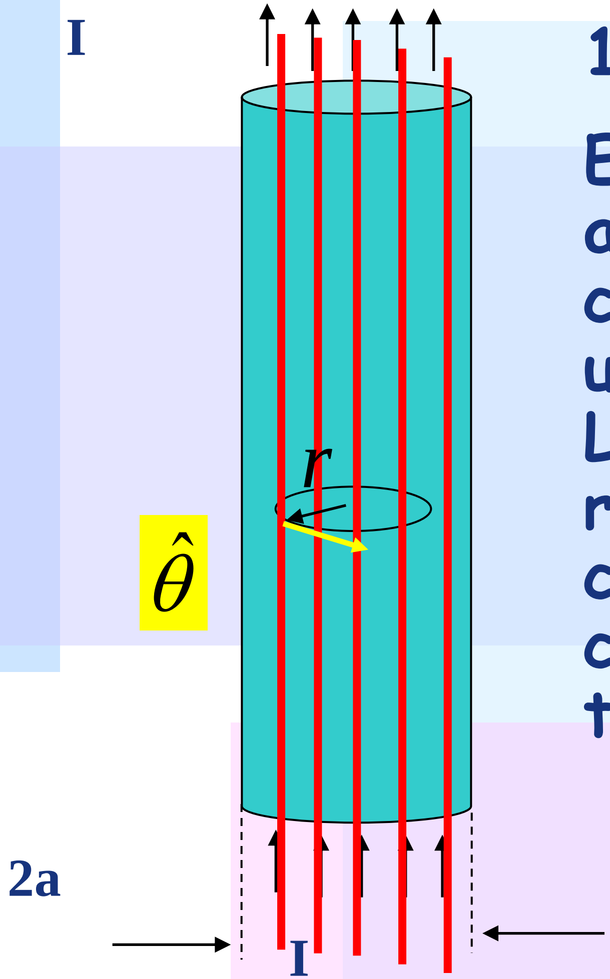
Suponga que la corriente se distribuye en forma homogénea



$$\vec{B} = ?$$

Ejemplo 2

Zona r<a



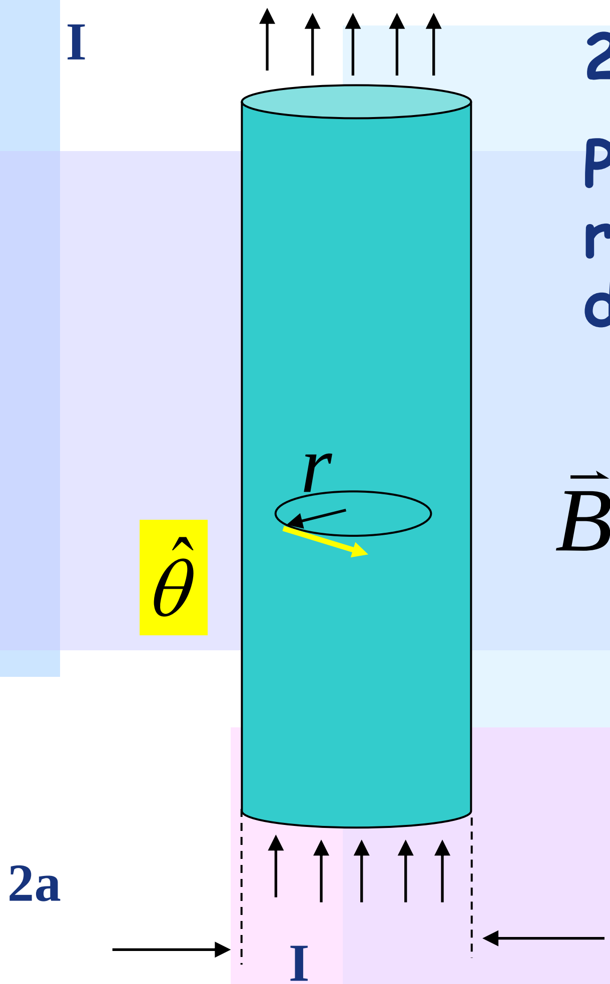
1ª Observación:

El interior del cilindro puede asimilarse a líneas de corriente paralelas que forman un todo densamente poblado. Luego el campo magnético resultante es la suma de los campos de c/u de las líneas de corriente, es decir, el campo tiene la siguiente forma:

$$\vec{B} = B\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H\hat{\theta}$$

Ejemplo 2

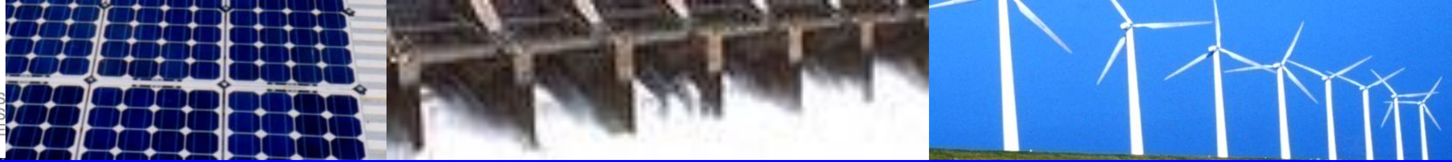
Zona r<a



2ª Observación:

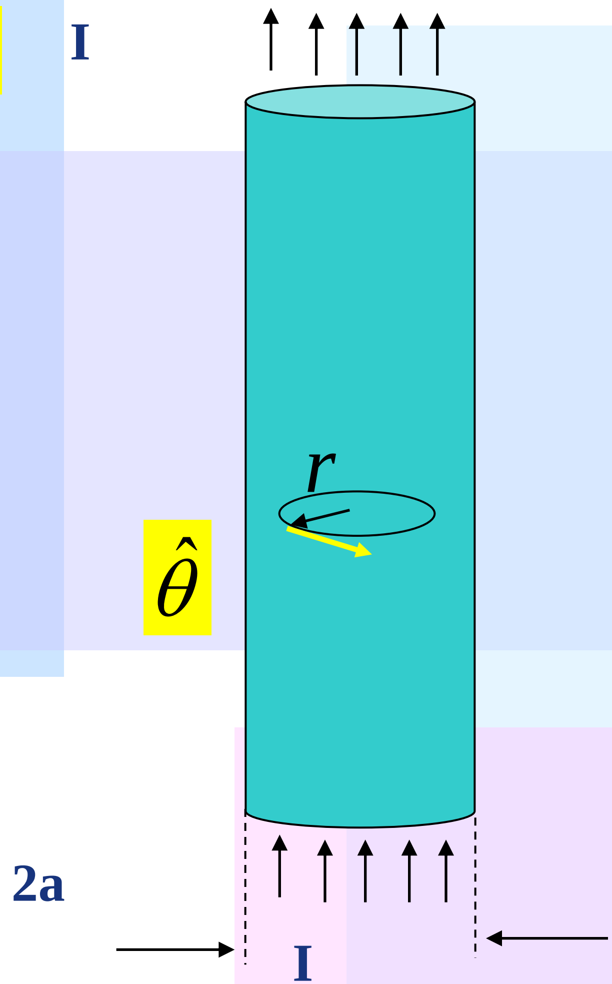
Por simetría, el campo para un radio dado no debiera cambiar de magnitud

$$\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$



Ejemplo 2

Zona r<a

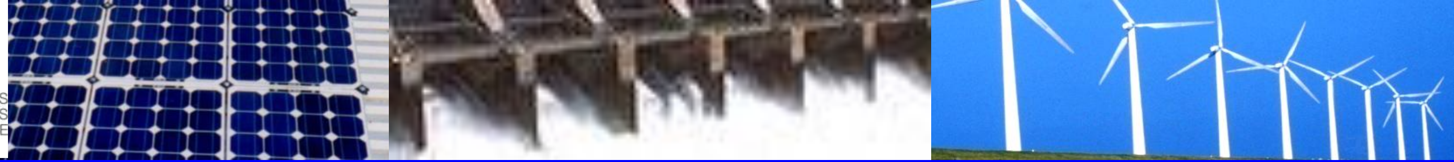


$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} H(r)\hat{\theta} \cdot r d\theta \hat{\theta}$$

$$= H(r) r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi H(r) r$$

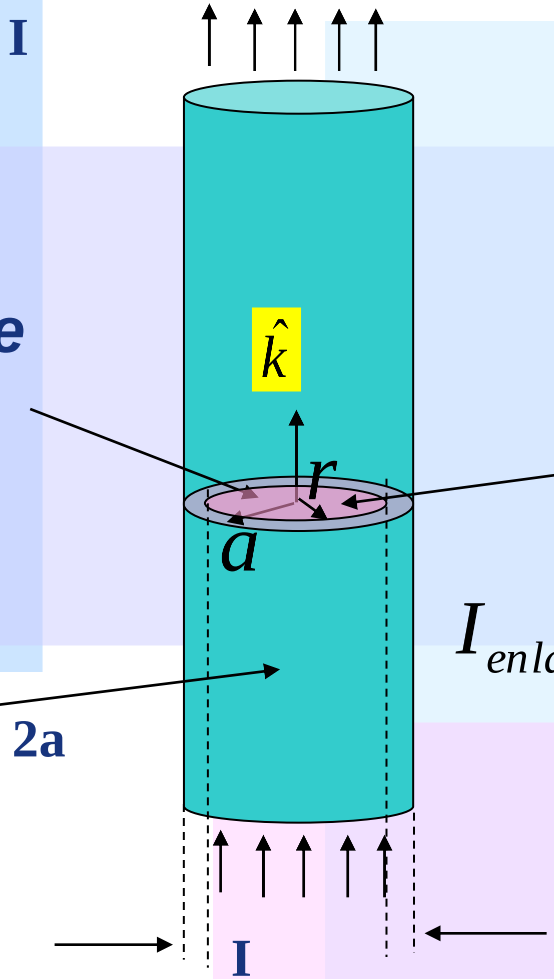


Ejemplo 2

Zona r<a

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

S: superficie circular de radio r



$$I_{enlazada}(S) = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

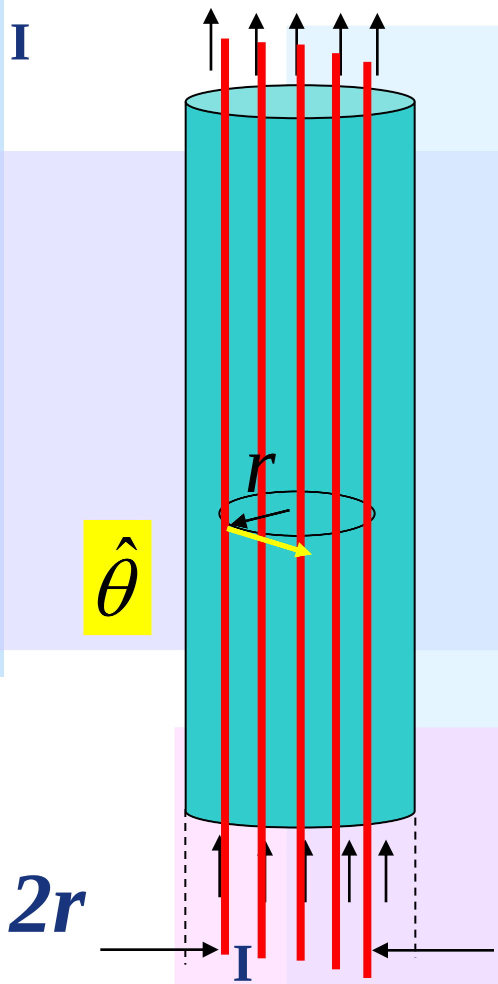
$$\vec{J} = \frac{I}{A}\hat{k}$$

$$I_{enlazada}(S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=r} \frac{I}{\pi a^2}\hat{k} r\, d\theta\, dr\, \hat{k}$$

$$I_{enlazada}(S) = \frac{Ir^2}{a^2}$$

Ejemplo 2

Zona r<a



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi H(r)r = \frac{Ir^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \vec{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2}\hat{\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\hat{\theta}$$

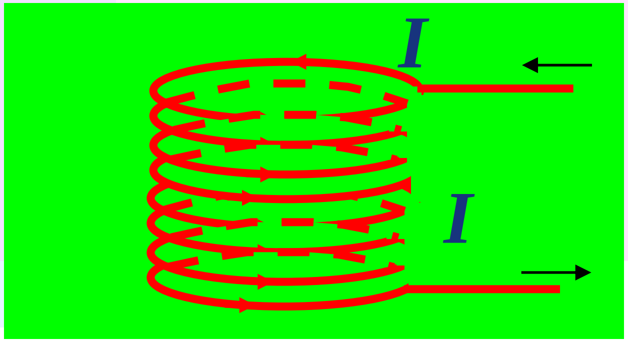
Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

- Requiere ver el campo magnético con antelación
- Requiere destreza para escoger apropiadamente la trayectoria de integración $\Gamma(s)$

Propuesto: Calcular campo magnético de bobina infinita con N vueltas por unidad de largo. Hint campo afuera es nulo y constante adentro.

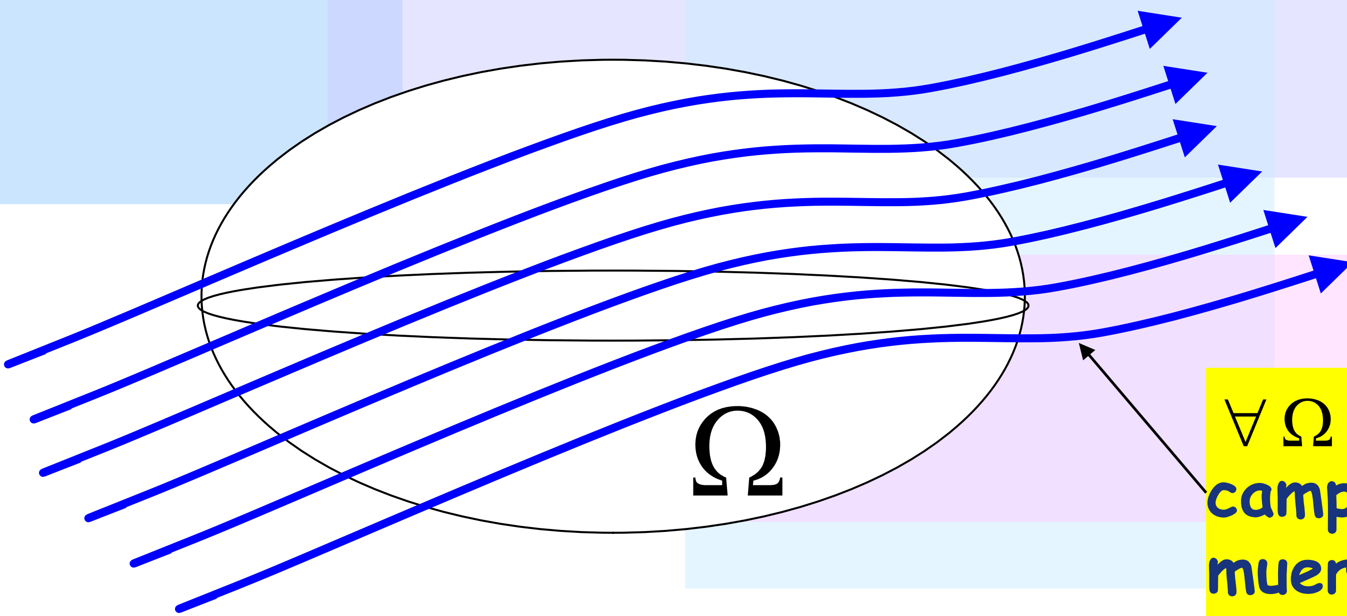


3ª Ecuación de Maxwell

Hasta hoy no se han encontrado fuentes desde donde nazcan líneas de campo, es decir, no hay “cargas magnéticas“

$$\therefore \quad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell



$\vec{B}$

$\forall\, \Omega$ Las lineas de campo no nacen ni mueren enparte alguna

4ª Ecuación de Maxwell

Ley Circuital de Ampere $\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$ $\quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Podemos escribir $\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}$

Además $I_{enlazada}(S) = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Válido $\forall S$

$\therefore \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

4ª Ecuación de Maxwell

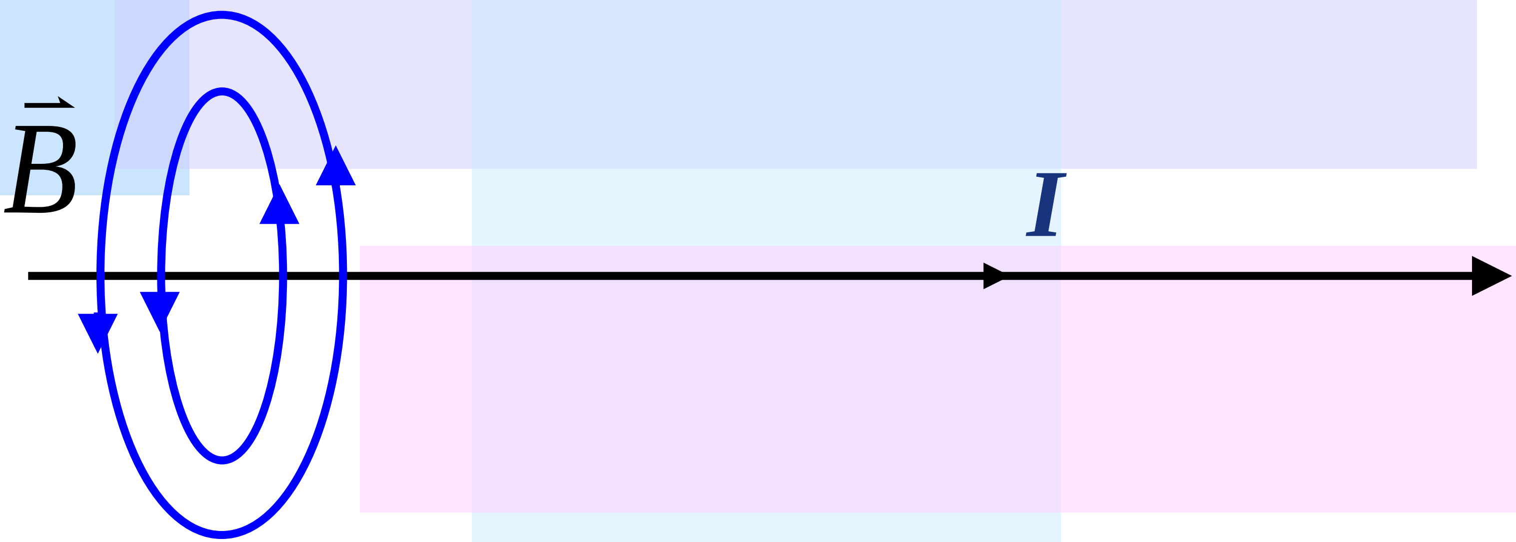
Origen del campo magnético

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell



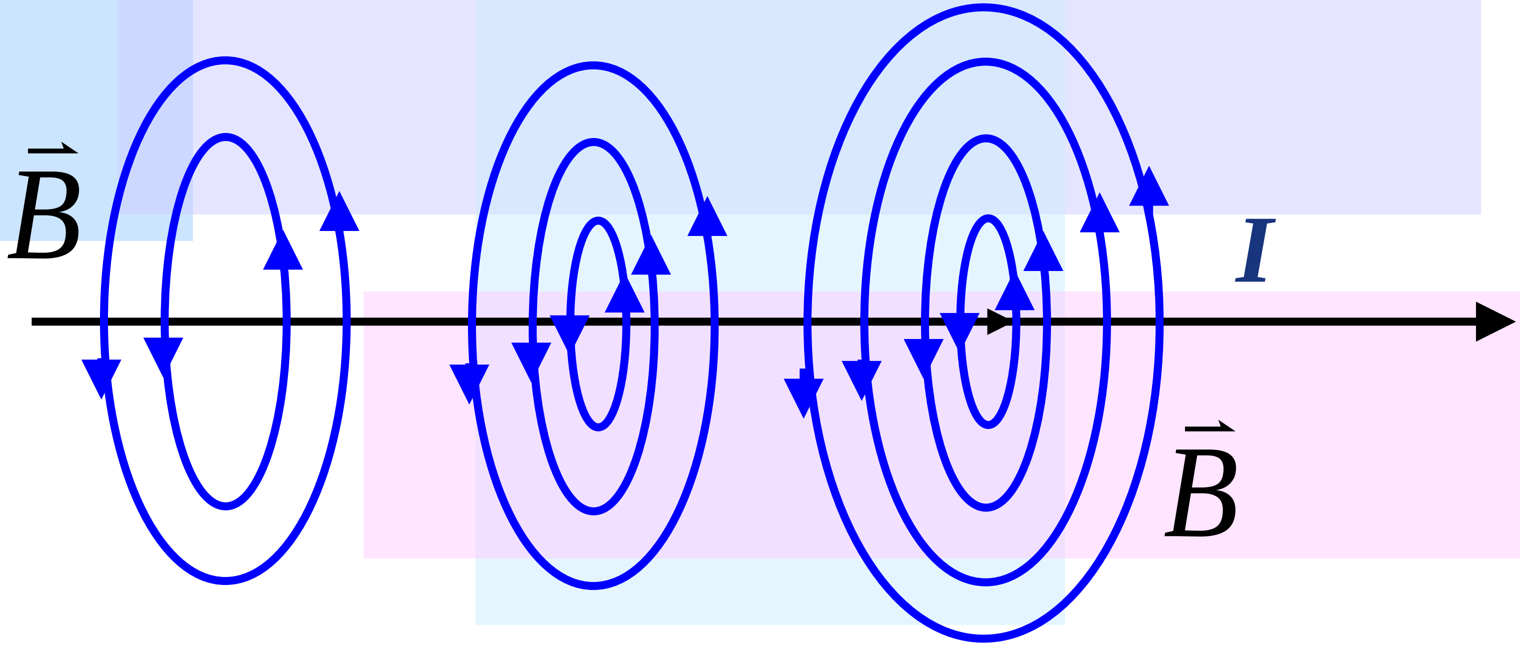
Origen del campo magnético

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell



Potencial Magnético Vector

Un campo vectorial cualquiera cumple con $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{A}) = 0$

Por otra parte todo campo magnético cumple $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Luego podemos escribir $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{A}$ es el potencial magnético vector

Usaremos la definición de campo magnético para encontrar una expresión del potencial magnético vector

Potencial Magnético Vector

Usaremos la identidad $\nabla_r\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)=\nabla\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)=-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$

Recordemos que el campo magnético de circuitos lineales es $\vec{B}=\oint_{\Gamma'}\frac{\mu_0 I d\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$

Luego podemos escribir $\vec{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma'} I d\vec{l}\,'\times\left(\nabla_r\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right)$

Usando ahora la identidad $\nabla\times\left(f\,\vec{F}\right)=f\,\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F}$

$\nabla_r\times\left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)=\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\nabla_r\times Id\vec{l}'+\nabla_r\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)\times Id\vec{l}'$ pero $\nabla_r\times Id\vec{l}'=0$

Potencial Magnético Vector

$$\Rightarrow \quad \nabla_r \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \right) = \nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \right) \times Id\vec{l}'$$

Invirtiendo el producto cruz $Id\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \right) \times Id\vec{l}'$

$$\Rightarrow \quad Id\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \right) = -\nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \right)$$

Luego podemos escribir $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} \right)$

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} \right)$$

Potencial Magnético Vector

Notemos que $\vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \right)$

tiene la forma $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Luego $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}}$

Es el potencial magnético vector de una corriente I en un circuito

$$[\vec{A}] = \frac{T}{m}$$

Potencial Magnético Vector

Por extensión, y siguiendo un análisis similar, se concluye que para distribuciones continuas de corriente

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} ds'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$

Para corrientes superficiales $\left[\vec{K}\right] = \frac{A}{m}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\Omega \frac{\vec{J} dv'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$

Para corrientes en volumen $\left[\vec{J}\right] = \frac{A}{m^2}$



Formas de calcular Campo Magnético

Usando la definición

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}$$

Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Usando el potencial magnético vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4ª Ecuación de Maxwell

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{Producida por campo eléctrico}} + \underbrace{q\vec{u} \times \vec{B}}_{\text{Producida por campo magnético}}$$

Fuerza de Lorentz

Producida por campo eléctrico

Producida por campo magnético

Cargas en Campos Magnéticos

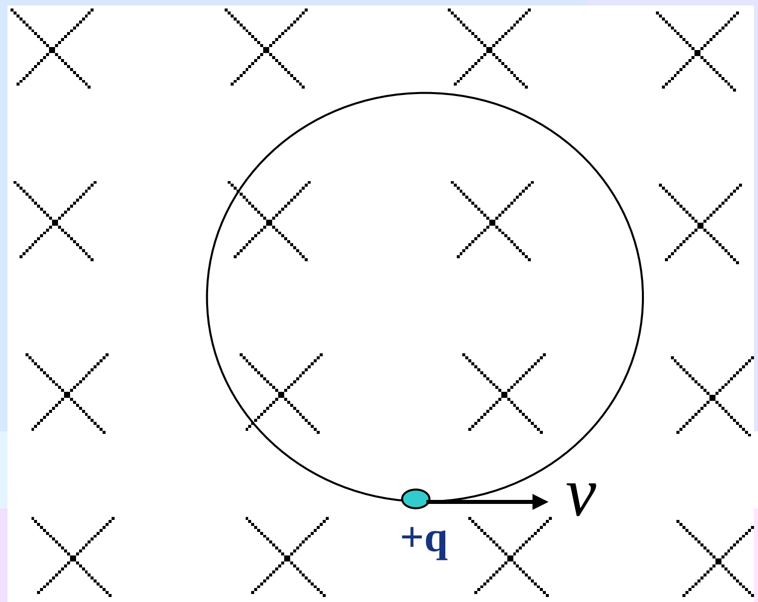
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Fuerza de Lorentz

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$qB = \frac{mv}{r}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$



$\vec{B}$

Trayectoria circular

Cargas en Campos Magnéticos

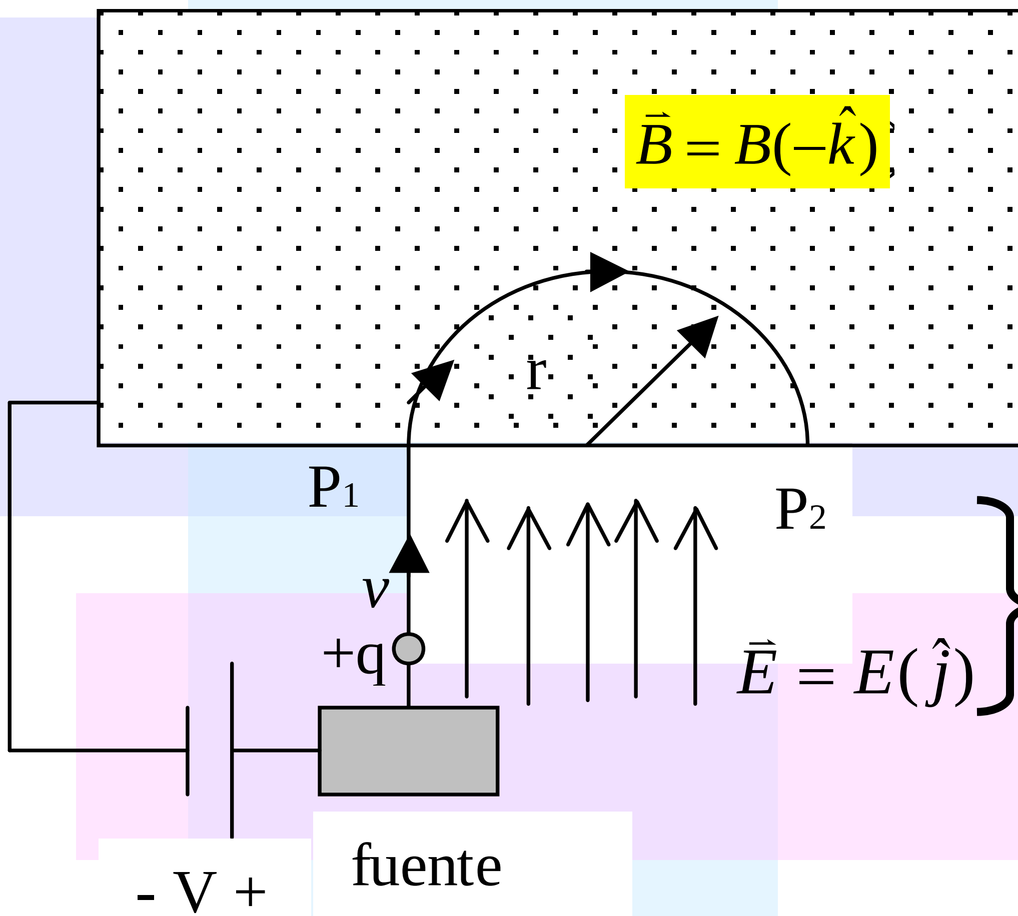
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Radio r depende de la razón masa/carga

Espectrógrafo de Masas



$$\vec{F} = q\vec{E}$$

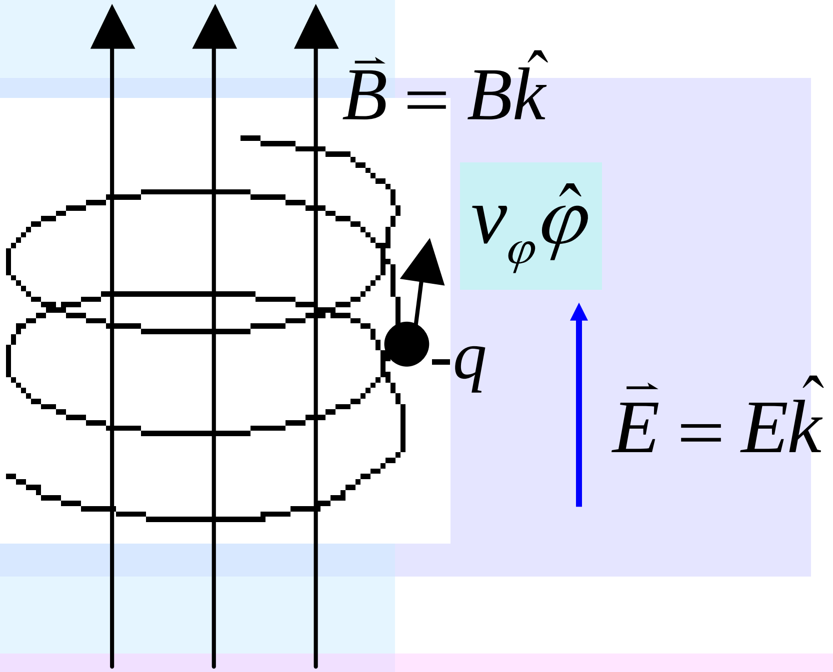
Campo eléctrico acelera las cargas

Cargas en Campos Magnéticos

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$$q v_\varphi B = \frac{m v_\varphi^{\;2}}{r}$$

$$r = \frac{m v_\varphi}{qB}$$



$$\frac{dv_z}{dt} = qE$$

$$\Rightarrow \quad v_z = qEt + v_{z_0}$$

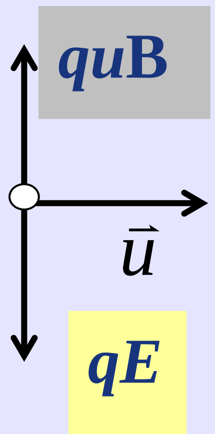
Trayectoria helicoidal

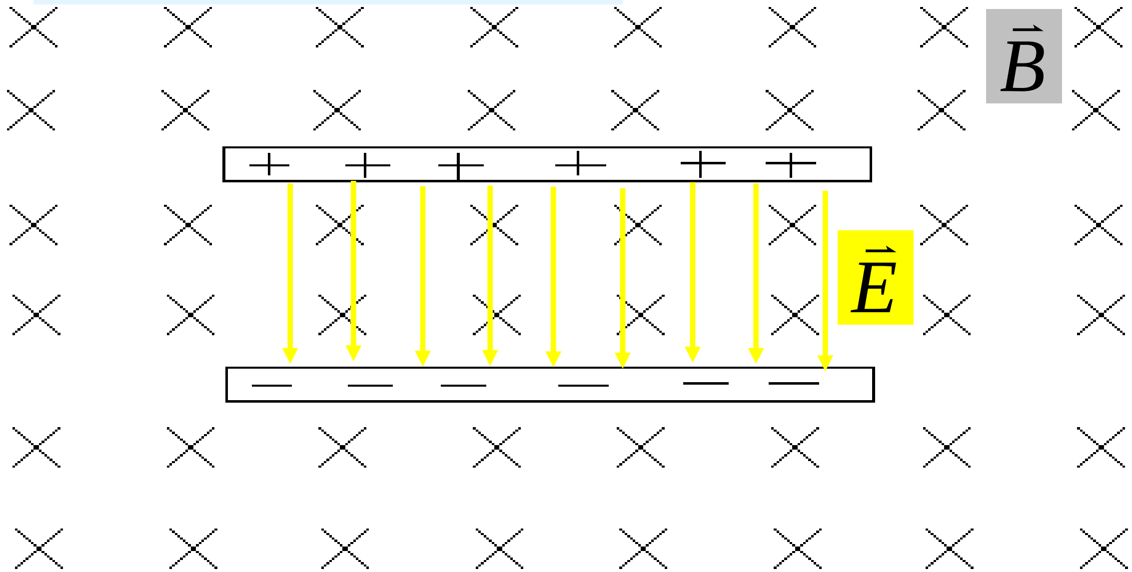
Cargas en Campos Magnéticos

Selector de Velocidades

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Fuerza y velocidad





$$\vec{F} = 0 \Rightarrow q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = 0$$

$$\therefore \quad u = \frac{B}{E}$$

Independiente de la masa y carga