FI2002 Electromagnetismo

Pauta Pregunta 1 Control 2, primavera 2010

Autor: Sebastián Fehlandt

1. Pregunta

Considere una esfera de radio *a* cargada con una densidad volumétrica de carga $\rho(\vec{r}) = \rho_0 r / a$ [C/m^3], donde ρ_0 es una constante conocida y r es la distancia al centro. La esfera cargada está rodeada de una corona dieléctrica de radio interno *b* y radio externo *c*, con permitividad relativa ε_r. A su vez un conductor esférico, hueco, también concéntrico, de radios interior *d* y exterior *e* envuelve a todo el conjunto, según se muestra en la Figura 1.

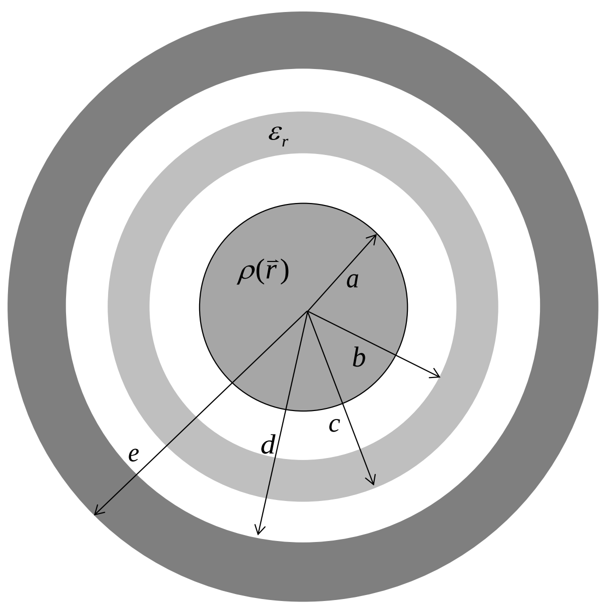

Figura 1

Se sabe que conductor exterior está cargado y que el campo medido a distancias superiores a "*e*" es nulo. Se pide determinar:

a. La densidad de carga en todo el conductor exterior (1,5ptos)
b. Las densidades de carga de polarización en el dieléctrico (1,5ptos)
c. La energía del sistema. (1,5ptos)
d. La diferencia de potencial entre el centro y el infinito. (1,5ptos)

2. Pauta

a) Por enunciado sabemos que el campo para r>d es nulo, sabemos que sólo habrá una densidad de carga en la superficie interna del conductor (σ_d), de forma que al considerar una superficie gaussiana esférica de radio r>d, tenemos que la carga encerrada será la carga en dicha superficie más la carga de la esfera interior. Como el campo es nulo, la carga neta encerrada también lo será, de esta forma tenemos:

$$-Q_d = Q_a = \iiint \rho(\vec{r})dV = \iiint_{0,0,0}^{2\pi,\pi,a} \frac{\rho_0}{a} r \cdot r^2 \sin(\theta)\, dr d\theta d\emptyset = \pi\rho_0 a^3$$

Luego, como la carga se distribuye de manera homogénea en la superficie, su densidad será:

$$\sigma_d = \frac{Q_d}{A} = -\frac{\pi\rho_0 a^3}{4\pi d^2} = -\frac{\rho_0 a^3}{4d^2}$$

Luego, como sabemos que en la otra superficie no puede haber carga, ya que no se cumpliría la ecuación anterior, y los conductores no tienen carga en volumen. Se tiene:

$\sigma_d = -\frac{\rho_0 a^3}{4d^2}\ (1pto)$	$\sigma_e = 0\ (0{,}3ptos)$	$\rho_l = 0\ (0{,}2ptos)$

b) Aplicando Gauss, considerando una superficie gaussiana esférica de radio r>a, se tiene:

$$\iint_{0,0,0}^{2\pi,2,a} D(r)r\hat{r} \cdot r^2 sin\theta dr d\theta d\emptyset = 4\pi r^2 D(r) = Q_a = \pi\rho_0 a^3 \Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0 a^3}{4r^2}\hat{r}$$

Y luego

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\vec{D} = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\frac{\rho_0 a^3}{4r^2}\hat{r}$$

Luego las densidades superficiales de carga son:

$\sigma_{P_b} = \vec{P} \cdot (-\hat{r}) = \left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)\frac{\rho_0 a^3}{4b^2}\ (0{,}5\ ptos)$	$\sigma_{P_c} = \vec{P} \cdot (\hat{r}) = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\frac{\rho_0 a^3}{4c^2}\ (0{,}5ptos)$

Y en volumen:

$$\boxed{\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left(r^2\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\frac{\rho_0 a^3}{4r^2}\right) = 0\quad (0{,}5\ ptos)}$$

d) Como el campo en el exterior es nulo, el potencial será constante e igual al voltaje de referencia, el cual se toma en el infinito por lo que es también nulo. En efecto:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\,(\vec{r}) \cdot dr\hat{r} + V_{\infty} = \int_{\infty}^{\vec{r}} 0 \cdot dr\hat{r} + 0 = 0$$

Esta expresión es válida hasta la cara interna del conductor ya que es donde se produce el cambio en la no nulidad del campo eléctrico.

Por otro lado necesitaremos una expresión para el campo eléctrico, dentro de la esfera de carga (r<a) se tiene que al aplicar Gauss, la integral de flujo sigue siendo la misma:

$$\iint_{0,0,0}^{2\pi,2,a} D(r)r\hat{r} \cdot r^2 sin\theta drd\theta d\emptyset = 4\pi r^2 D(r)$$

Pero la carga encerrada cambia:

$$Q_{enc} = \iiint \rho(\vec{r})dV = \iiint_{0,0,0}^{2\pi,\pi,r} \frac{\rho_0}{a} r \cdot r^2 \sin(\theta)\, drd\theta d\emptyset = \frac{\pi\rho_0 r^4}{a}$$

Luego, igualando:

$$4\pi r^2 D(r) = \frac{\pi\rho_0 r^4}{a} \Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0 r^2}{4a}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 a}\hat{r}\,, r \leq a$$

Luego el campo en todo el espacio será:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 a}\hat{r} & , r \leq a \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & , r \in [a, b] \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_r \varepsilon_0 r^2}\hat{r} & , r \in [b, c] \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & , r \in [c, d] \\ 0 & , r > d \end{cases}$$

Luego la diferencia de potencial entre el centro y el infinito será igual a la diferencia entre el centro y el conductor, es decir:

$$\Delta V = V_0 - V_d = V(r) = -\int_{d}^{\vec{r}} \vec{E}\,(\vec{r}) \cdot dr\hat{r} + V_d = -\int_{d}^{\vec{r}} \vec{E}\,(\vec{r}) \cdot dr\hat{r}$$

Luego

$$\Delta V=-\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left[\int_d^c \frac{a^3}{r^2}dr+\int_c^b \frac{a^3}{\varepsilon_r r^2}dr+\int_b^a \frac{a^3}{r^2}dr+\int_a^0 \frac{r^2}{a}dr\right]$$

Y finalmente:

$$\boxed{\Delta V=\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left[a^3\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)+\frac{a^3}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+a^3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{a^2}{3}\right]\ (1{,}5 ptos)}$$

c) Calculamos la energía mediante la siguiente relación:

$$U=\frac{1}{2}\iiint \vec{D}\cdot\vec{E}\cdot dV$$

$$U=\frac{\rho_0^2}{32\varepsilon_0}\iint_{0,0}^{2\pi,\pi}\left[\int_0^a \frac{r^4}{a^2}\cdot r^2dr+\int_a^b \frac{a^6}{r^4}\cdot r^2dr+\int_b^c \frac{a^6}{\varepsilon_r r^4}\cdot r^2dr+\int_c^d \frac{a^6}{r^4}\cdot r^2dr\right]sin\theta d\theta d\emptyset$$

Y finalmente:

$$\boxed{U=\frac{\pi\rho_0^2}{8\varepsilon_0}\left[\frac{a^5}{7}+a^6\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\right](1{,}5\ ptos)}$$

Notar que en este caso la energía del conductor es nula, en efecto:

$$U_{cond}=\frac{1}{2}V_d\cdot Q_d=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot Q_d=0$$