



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 19

Magnetostática IV

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Repaso
- Dipolo magnético
- Torque de campo magnético sobre dipolo
- Energía potencial del dipolo
- Campo magnético de dipolo
- Modelo atómico de los materiales
- Energía de dipolo en presencia de campo magnético

Salvador Dalí, “La Persistencia de la Memoria”, 1931



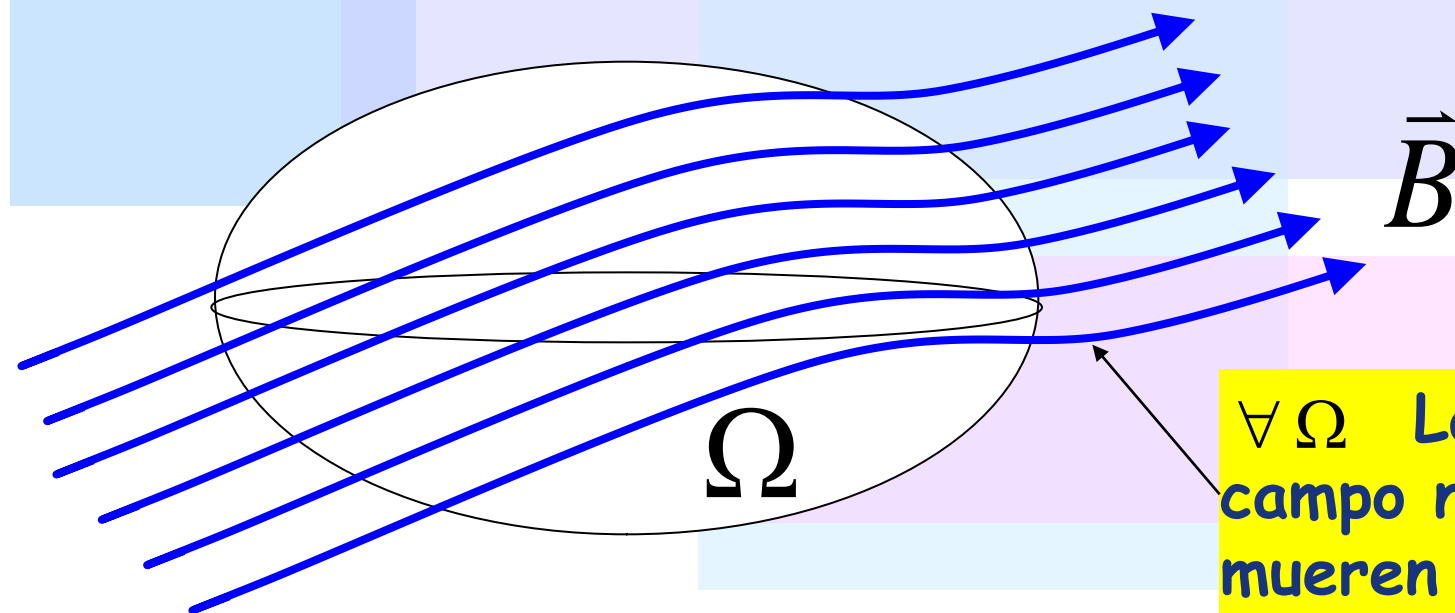


3ª Ecuación de Maxwell

Hasta hoy no se han encontrado fuentes desde donde nazcan líneas de campo, es decir, no hay "cargas magnéticas"

$$\therefore \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell



$\forall \Omega$ Las líneas de campo no nacen ni mueren en parte alguna



4ª Ecuación de Maxwell

Ley Circuital de Ampere $\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Podemos escribir $\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}$

Además $I_{enlazada}(S) = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{Válido } \forall S$$

$$\therefore \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell



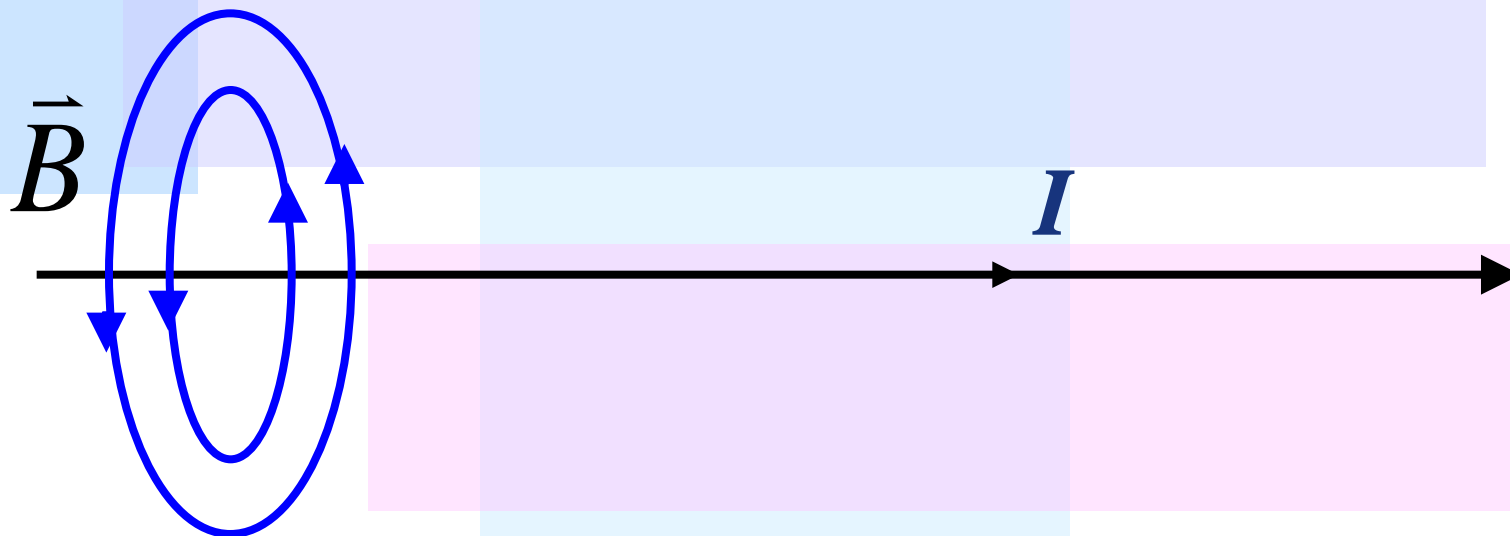
Origen del campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell





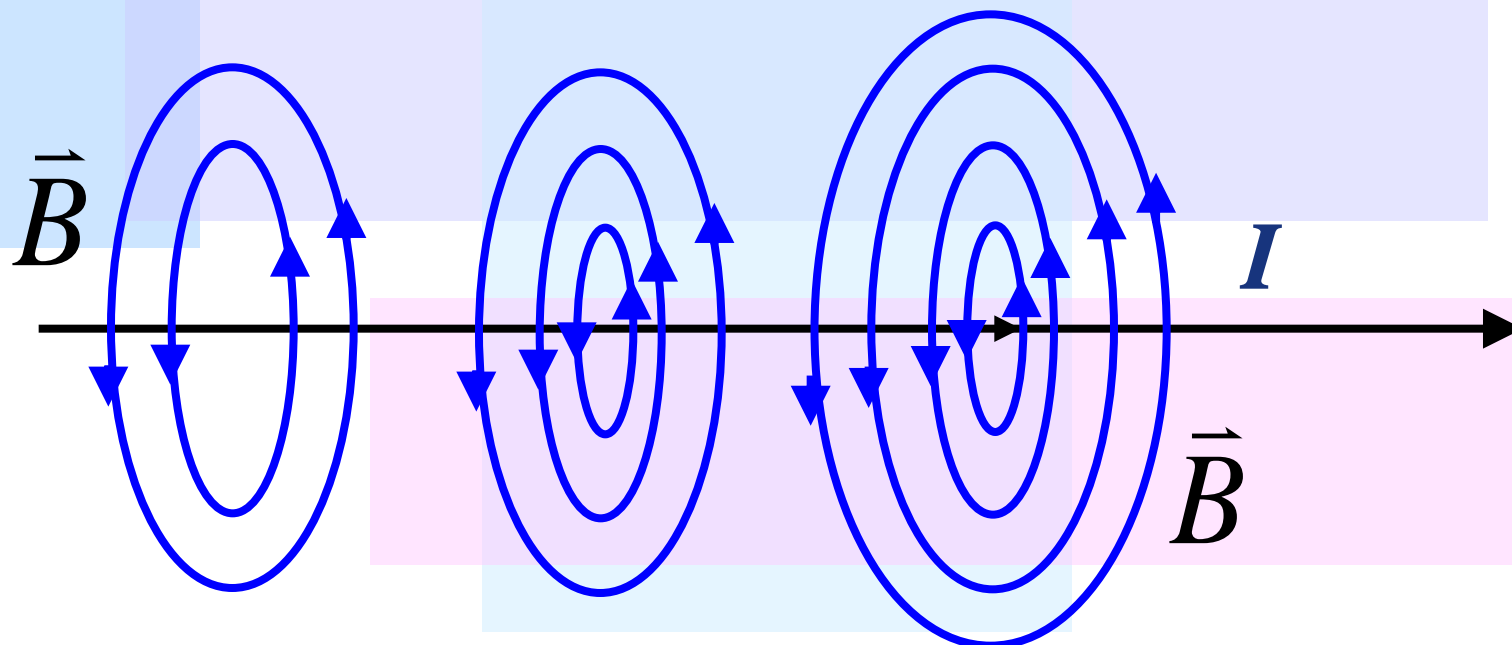
Origen del campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell





Potencial Magnético Vector

Un campo vectorial cualquiera cumple con $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

Por otra parte todo campo magnético cumple $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Luego podemos escribir $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

\vec{A} es el potencial magnético vector

Usaremos la definición de campo magnético para encontrar una expresión del potencial magnético vector



Potencial Magnético Vector

Usaremos la identidad $\nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

Recordemos que el campo magnético de circuitos lineales es $\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

Luego podemos escribir $\vec{B} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} I d\vec{l}' \times \left(\nabla_r \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$

Usando ahora la identidad $\nabla \times (f \vec{F}) = f \nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$

$$\nabla_r \times \left(\frac{I d\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla_r \times I d\vec{l}' + \nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times I d\vec{l}' \quad \text{pero } \nabla_r \times I d\vec{l}' = 0$$



Potencial Magnético Vector

$$\Rightarrow \nabla_r \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times Id\vec{l}'$$

Invirtiendo el producto cruz $Id\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times Id\vec{l}'$

$$\Rightarrow Id\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

Luego podemos escribir $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$



Potencial Magnético Vector

Notemos que
$$\vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

tiene la forma
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Luego
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Es el potencial magnético vector de una corriente I en un circuito

$$[\vec{A}] = \frac{T}{m}$$



Potencial Magnético Vector

Por extensión, y siguiendo un análisis similar, se concluye que para distribuciones continuas de corriente

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para corrientes superficiales $[\vec{K}] = \frac{A}{m}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J} dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para corrientes en volumen $[\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$



Formas de calcular Campo Magnético

Usando la definición

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Usando el potencial magnético vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

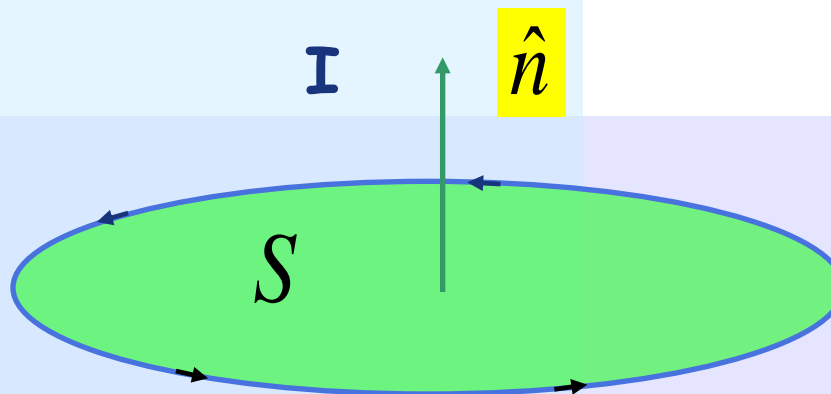
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

4ª Ecuación de Maxwell



Dipolo Magnético

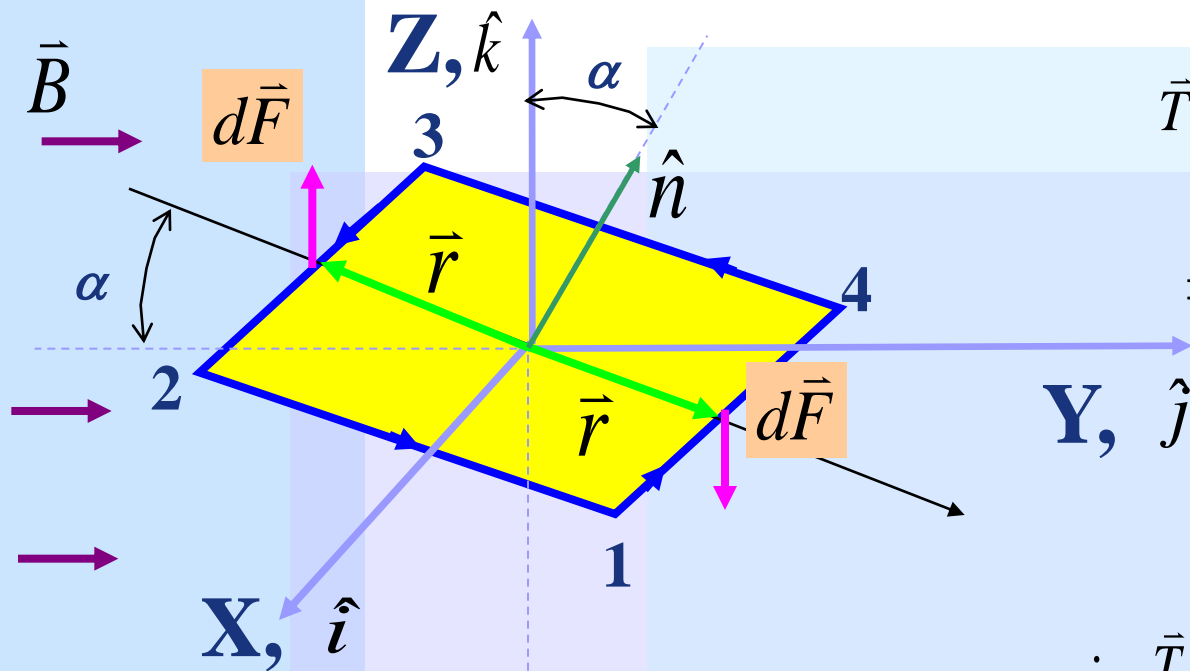


Definición Dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} \text{ [Am}^2\text{]}$$



Torque Magnético



$$\vec{T} = I \int_2^3 \vec{r} \times dx \hat{i} \times \vec{B} + I \int_4^1 \vec{r} \times dx \hat{i} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \frac{IBwl}{2} \cos \alpha \hat{i} + \frac{IBwl}{2} \cos \alpha \hat{i}$$

Torque neto sobre el circuito

$$\therefore \vec{T} = IBwl \cos \alpha \hat{i} = AIB \cos \alpha \hat{i}$$

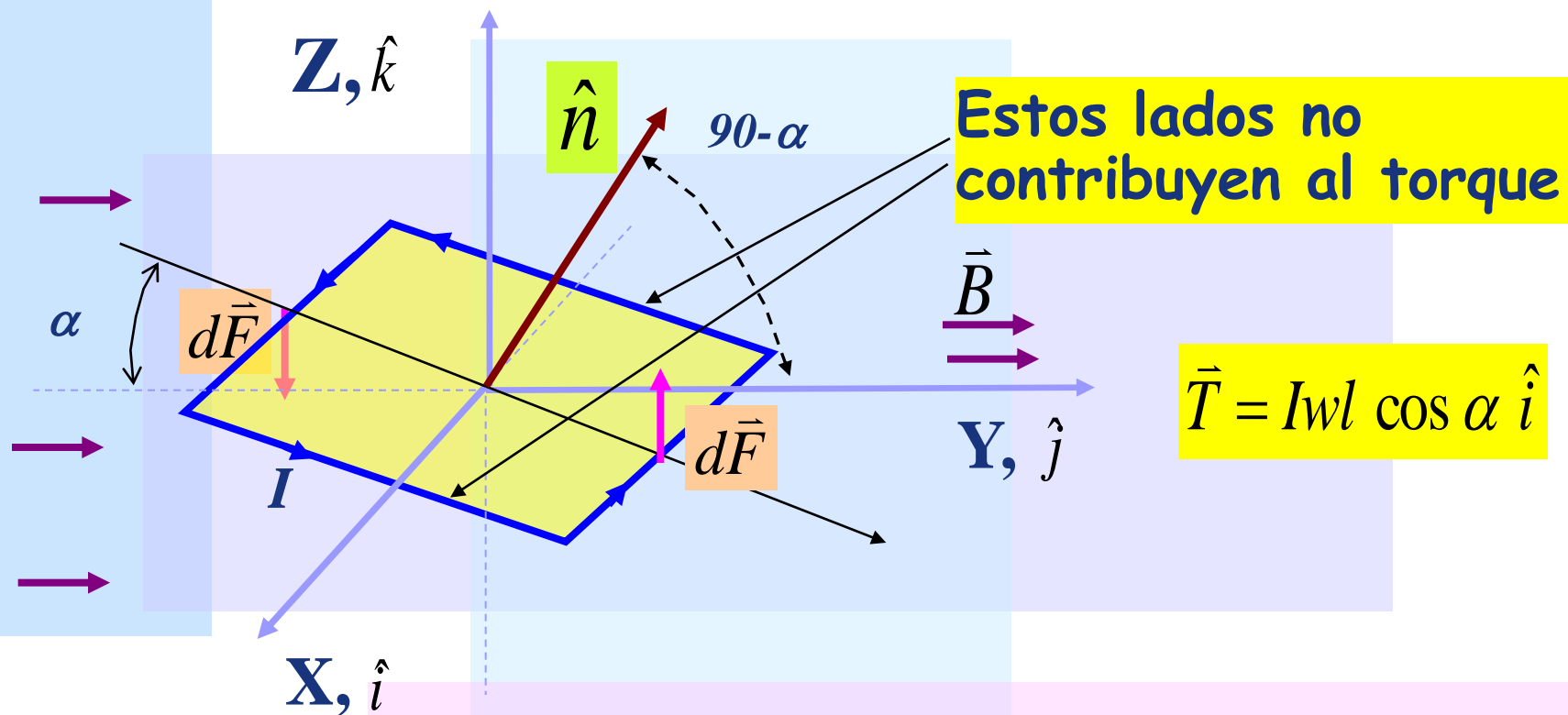
$$Area = A = wl$$

Notar que el torque se puede escribir como

$$\vec{T} = IA \|\hat{n}\| \bullet \|\vec{B}\| \sin(90 - \alpha) \Rightarrow \vec{T} = IA \hat{n} \times \vec{B}$$



Torque de campo sobre circuito rectangular

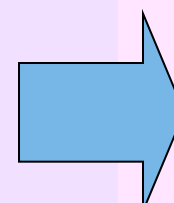


Torque

$$\vec{T} = IA \hat{n} \times \vec{B}$$

Dipolo magnético

$$\vec{m} = IA \hat{n}$$



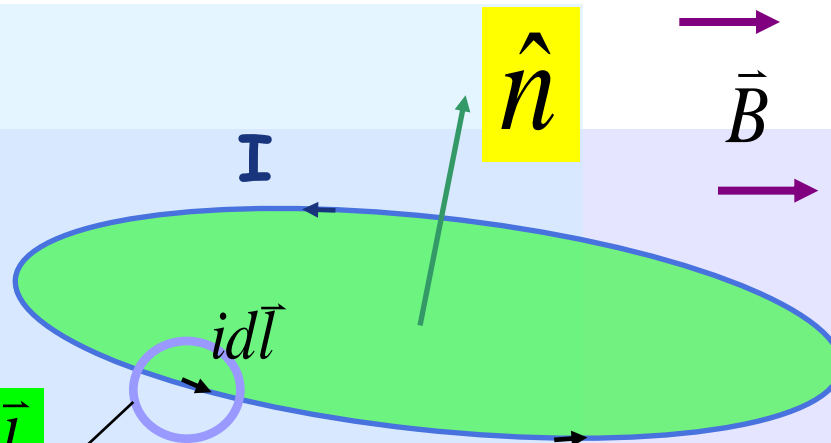
$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$



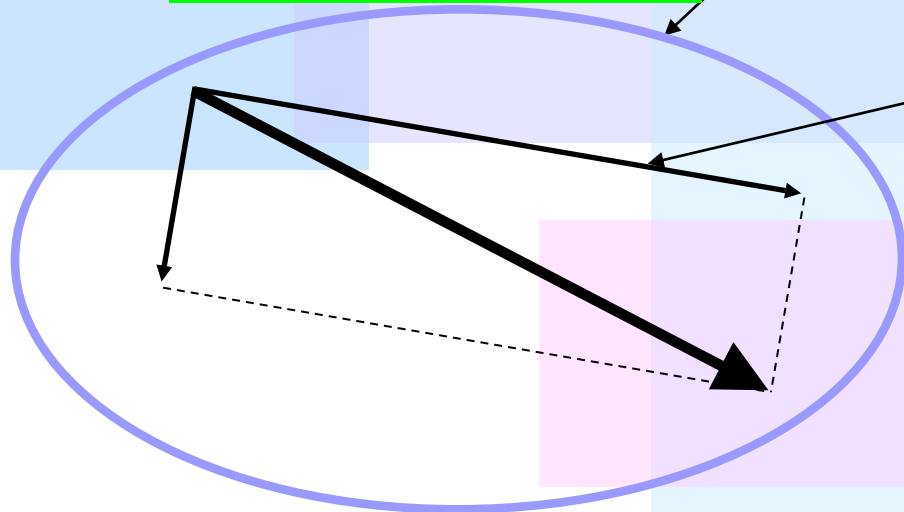
Torque de campo sobre dipolo

Dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



"Zoom de" $id\vec{l}$



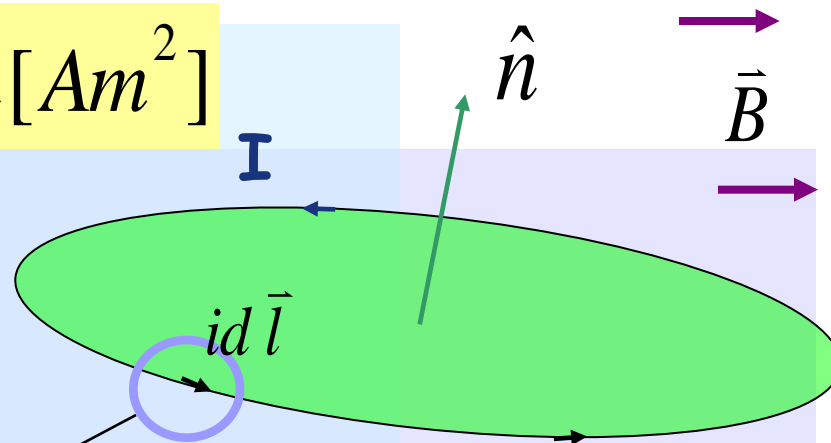
Este lado no contribuye al torque



Torque de campo sobre dipolo

Dipolo magnético $\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$

"Zoom de" $id\vec{l}$



Este lado no contribuye al torque

Luego torque se puede expresar como $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$



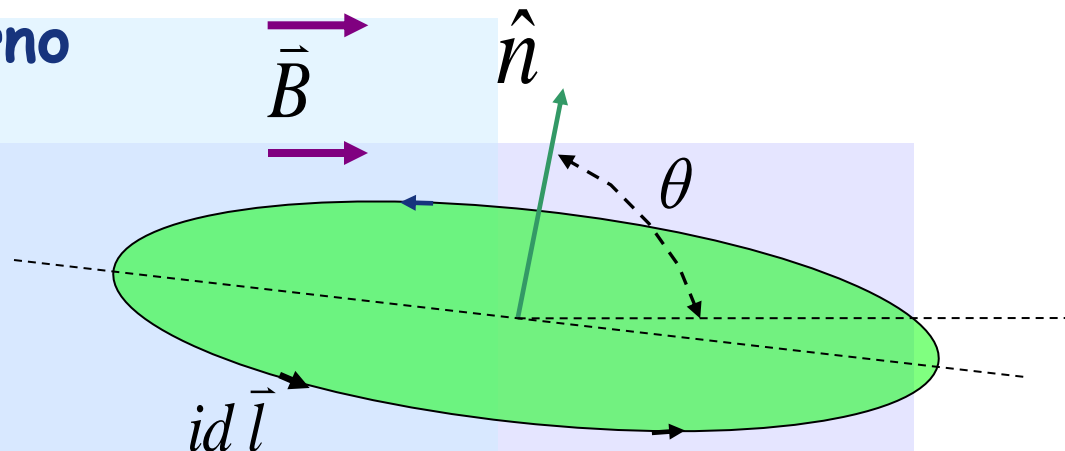
Energía potencial de un dipolo

Trabajo del campo externo

$$dW = -Td\theta$$

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$dW = -mB \sin \theta d\theta$$



Este trabajo debe ser igual al cambio de energía potencial del dipolo

$$dU = -dW = mB \sin \theta d\theta$$

Integrando $\Rightarrow U = -mB \cos \theta + U_0$

Tomando como referencia de energía $U = 0$ para $\theta = 90^\circ$

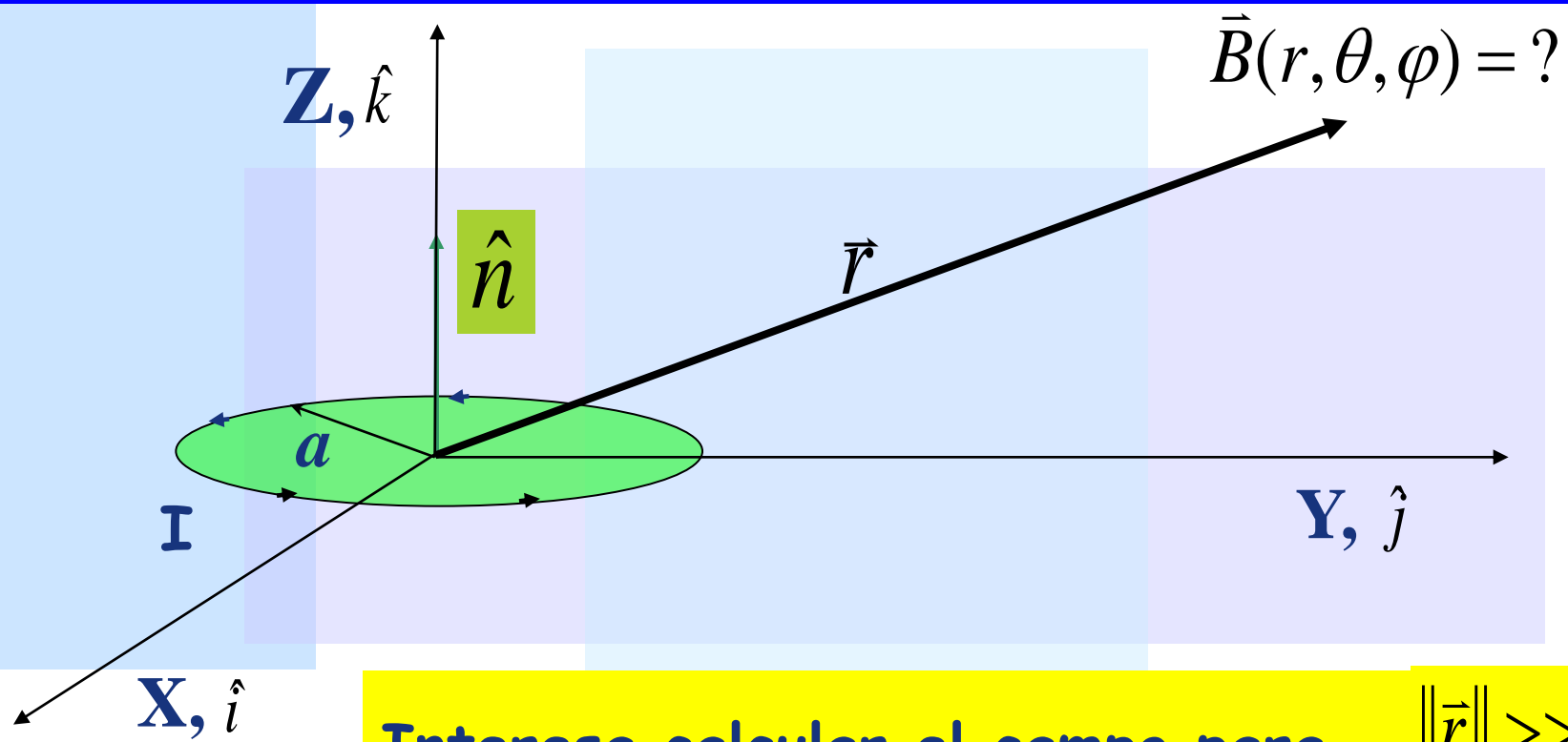
$$\Rightarrow U = -mB \cos \theta$$

Es decir

$$\Rightarrow U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$



Campo magnético de un dipolo



Interesa calcular el campo para $\|\vec{r}\| \gg a$

Usaremos el potencial magnético vector

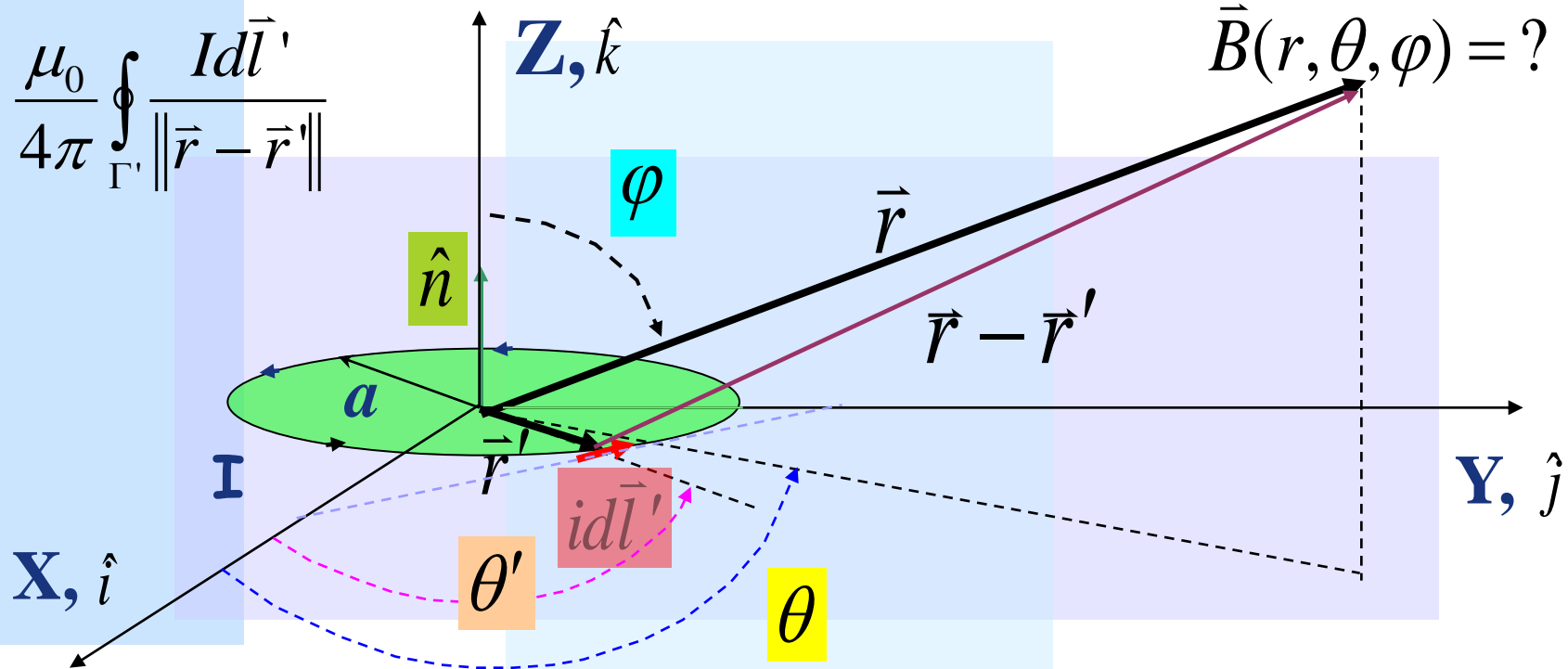
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



$$id\vec{l}' = Iad\theta' \hat{\theta} = Iad\theta' (-\sin\theta' \hat{i} + \cos\theta' \hat{j})$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta' \hat{i} + \cos\theta' \hat{j}$$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} + TOS$$

$$\|\vec{r}\| \gg a \Rightarrow$$

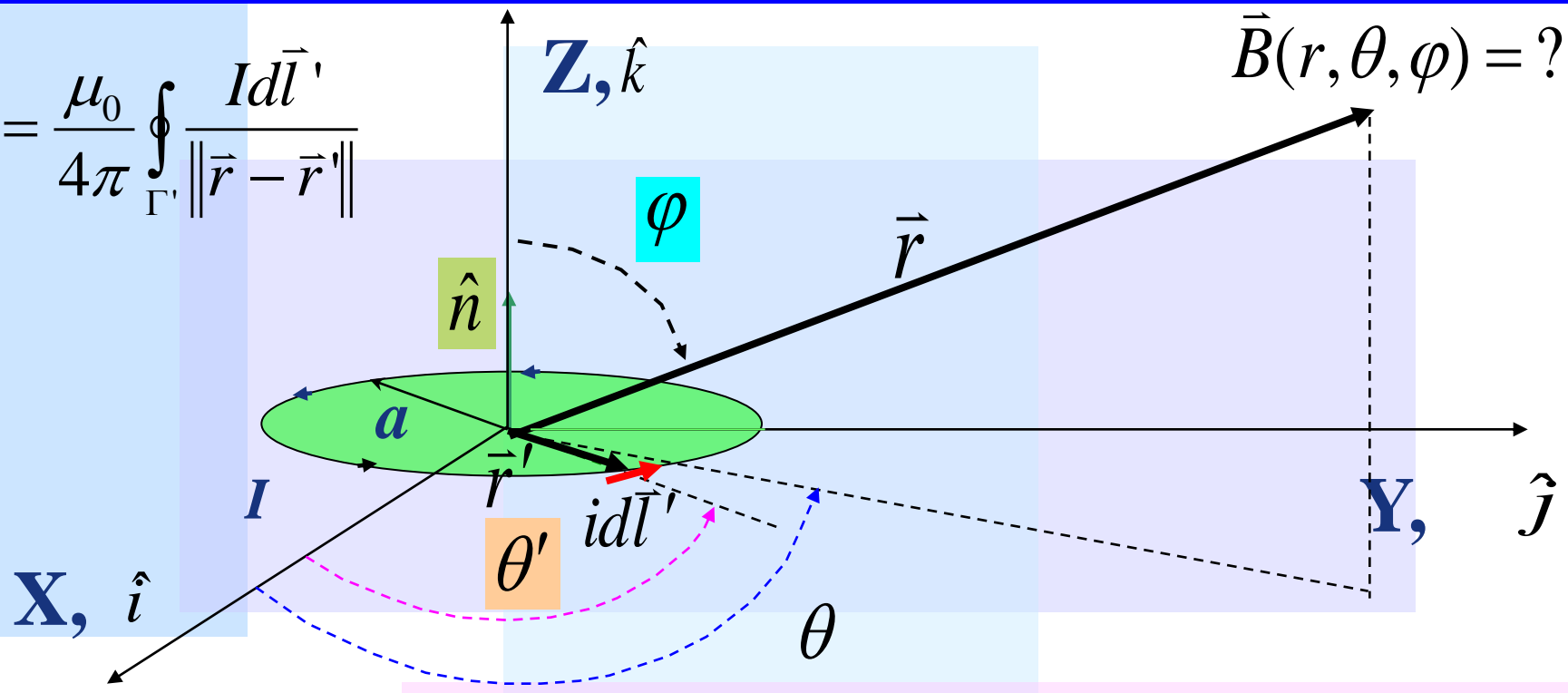
$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \approx \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3}$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



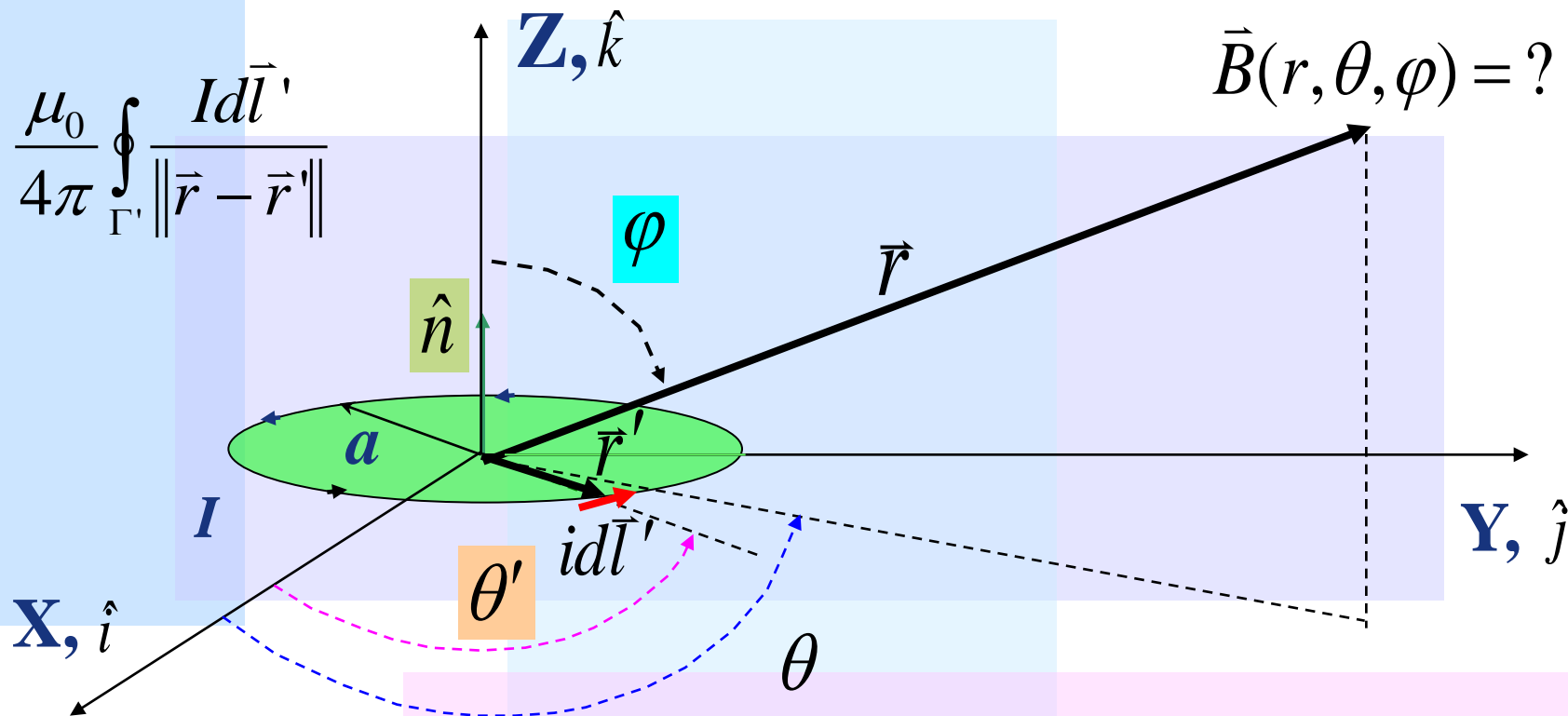
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} \right) I a d\theta' (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$

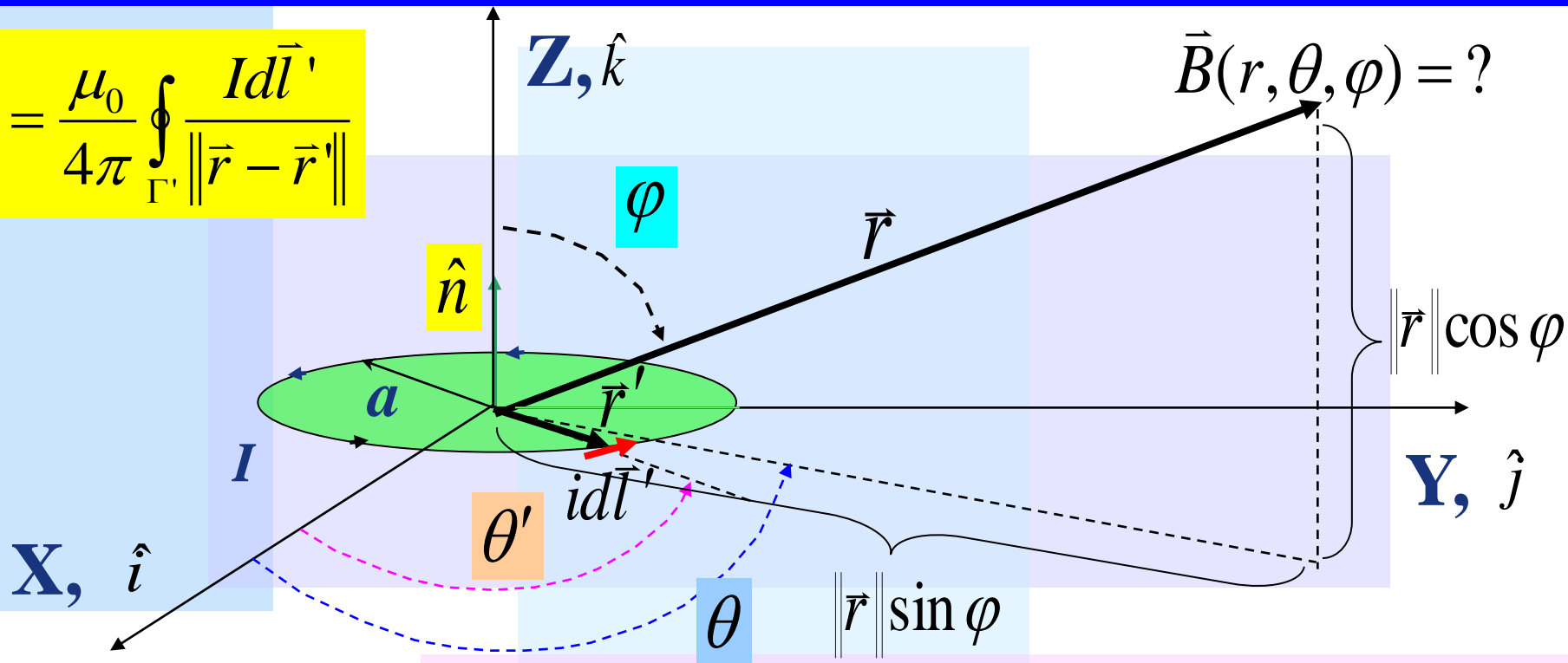


$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi \|\vec{r}\|^3} \int_0^{2\pi} \vec{r} \cdot \vec{r}' I a d\theta' (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



$$\vec{r}' = a \cos \theta' \hat{i} + a \sin \theta' \hat{j}$$

$$\vec{r} = r \sin \varphi \cos \theta \hat{i} + r \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + r \cos \varphi \hat{k}$$

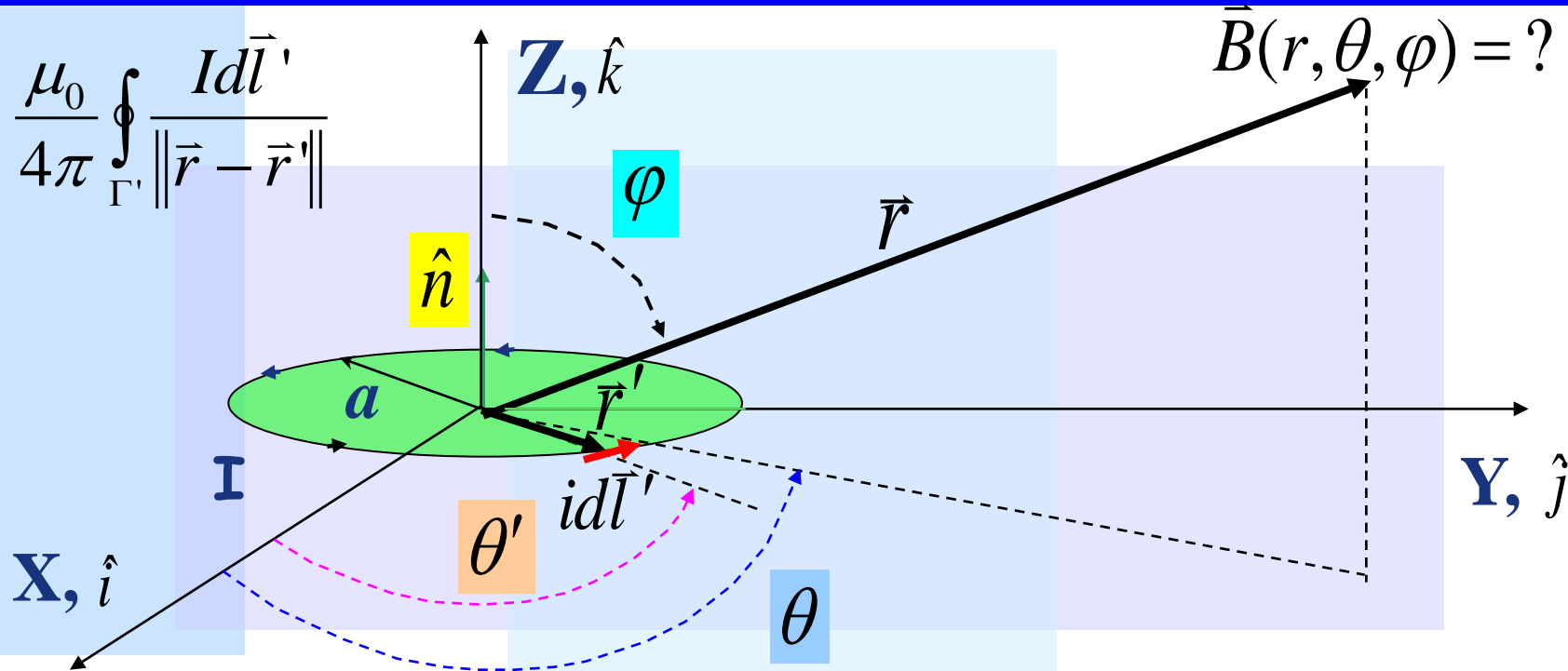
$$\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}' = r a \sin \varphi \cos \theta \cos \theta' + r a \sin \varphi \sin \theta \sin \theta'$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



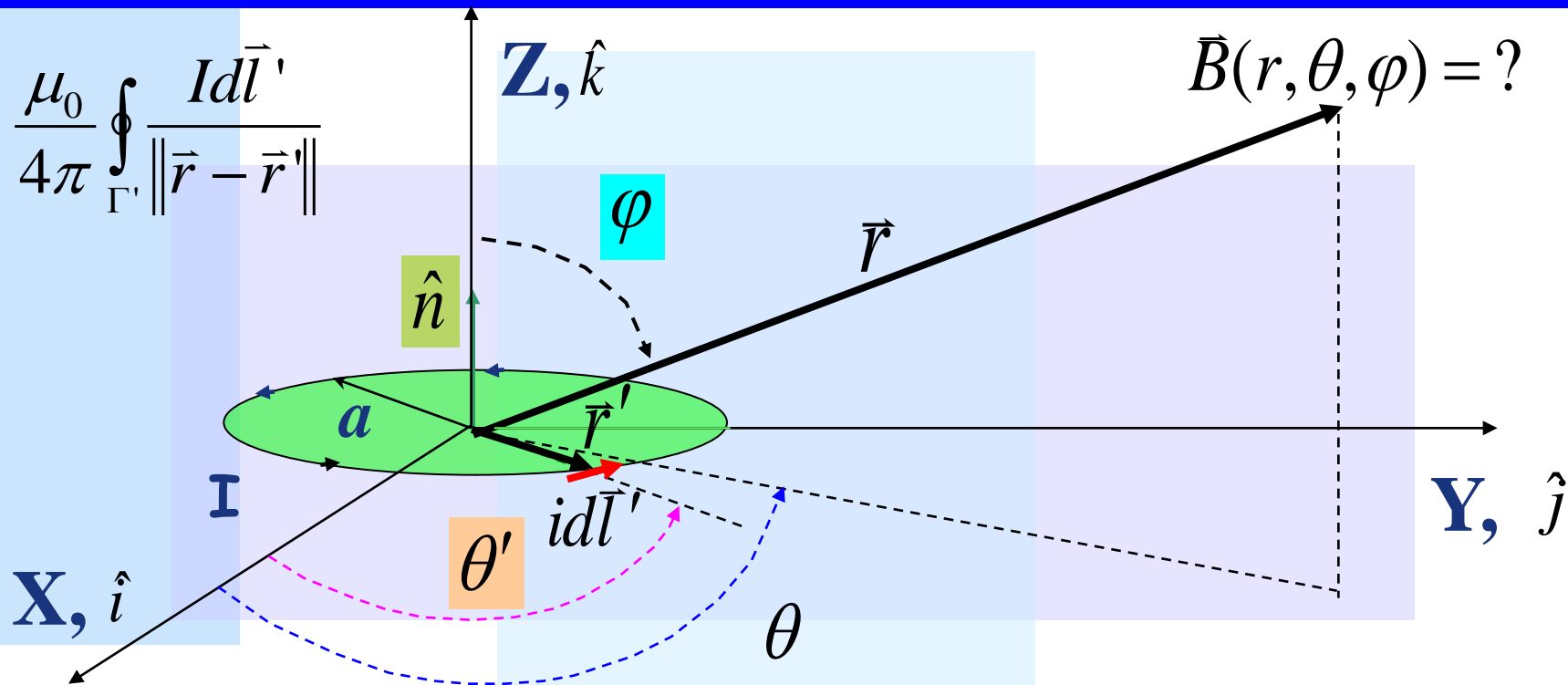
$$\vec{A} = \frac{Ira^2 \sin \varphi \mu_0}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\theta' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta') (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



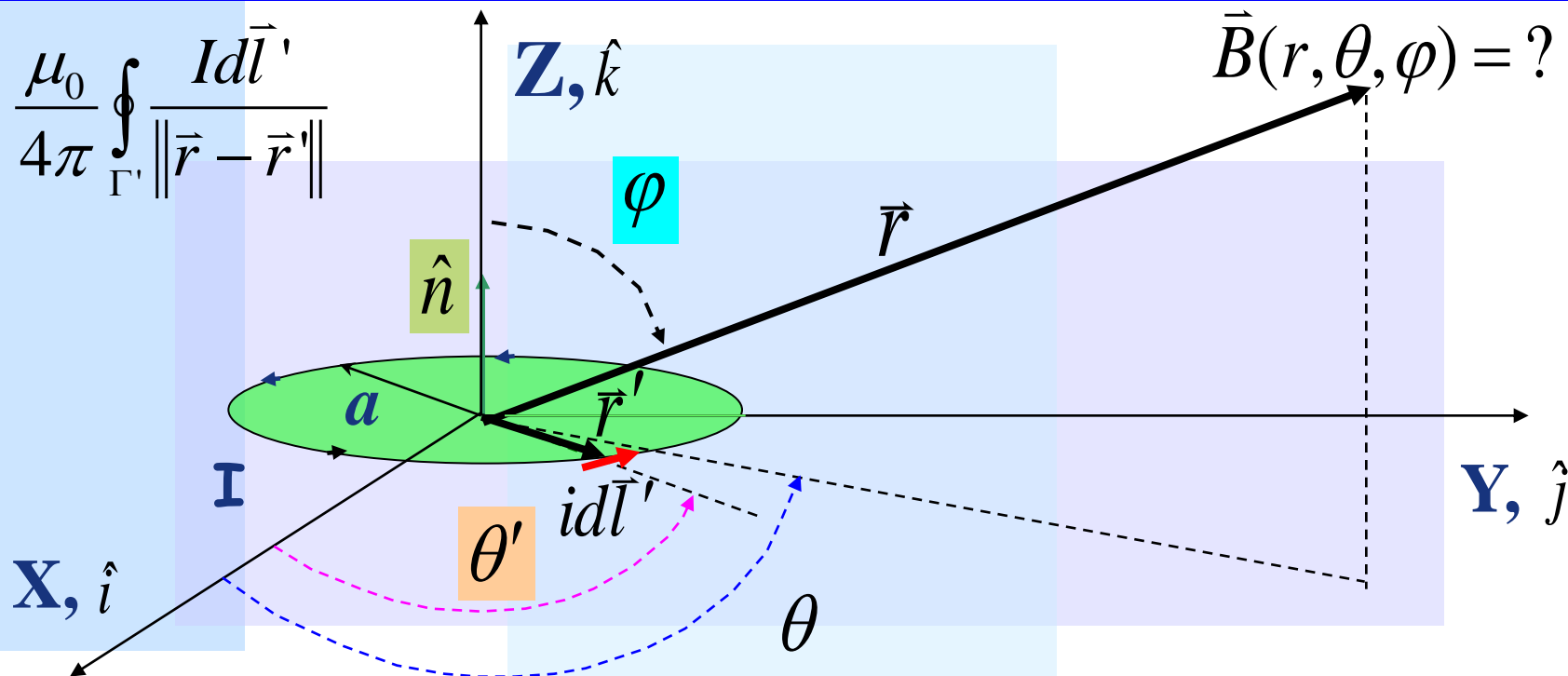
$$\vec{A} = \frac{Ira^2 \sin \varphi \mu_0}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\theta' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta') (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$

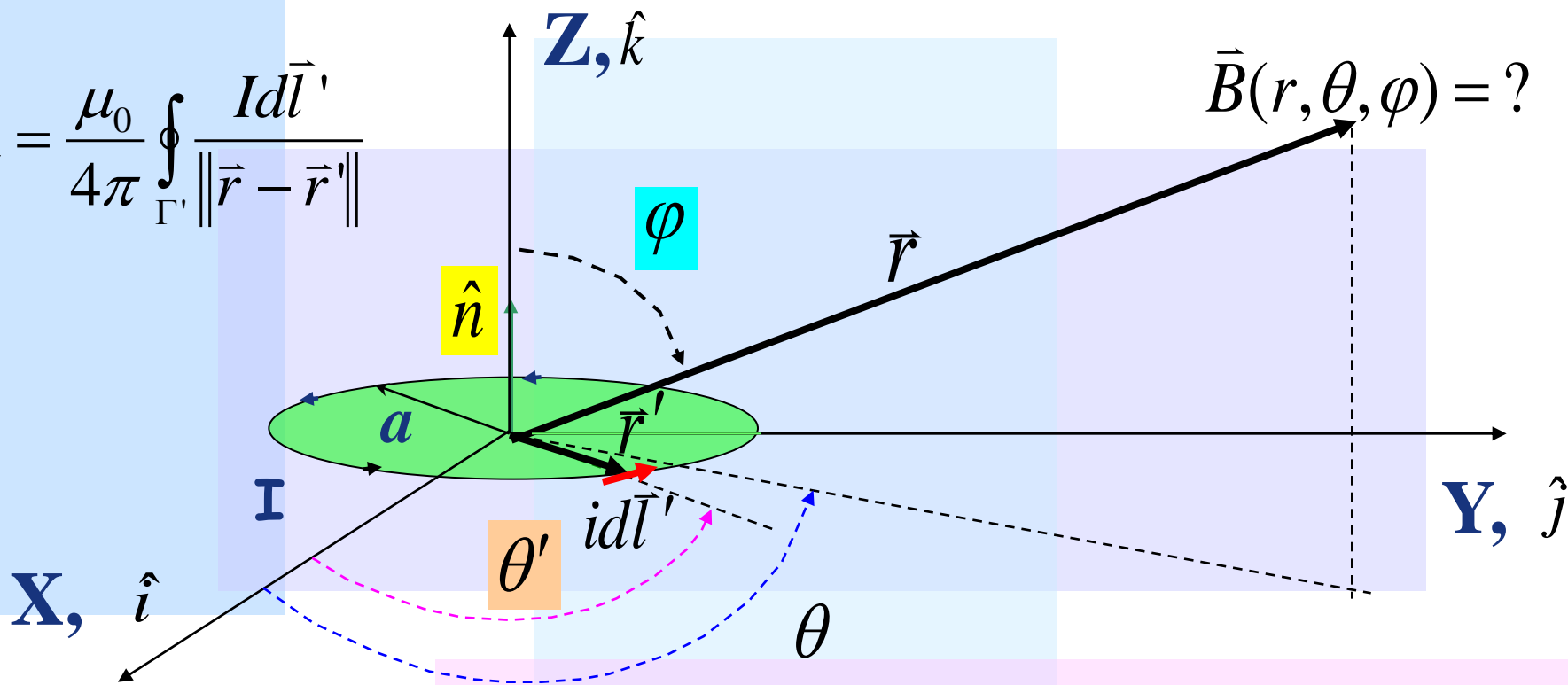


$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \cos \theta'^2 \hat{j} - \sin \theta \sin \theta'^2 \hat{i}) d\theta'$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



$$\int_0^{2\pi} \cos \theta'^2 d\theta' = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta'}{2} d\theta' = \pi$$

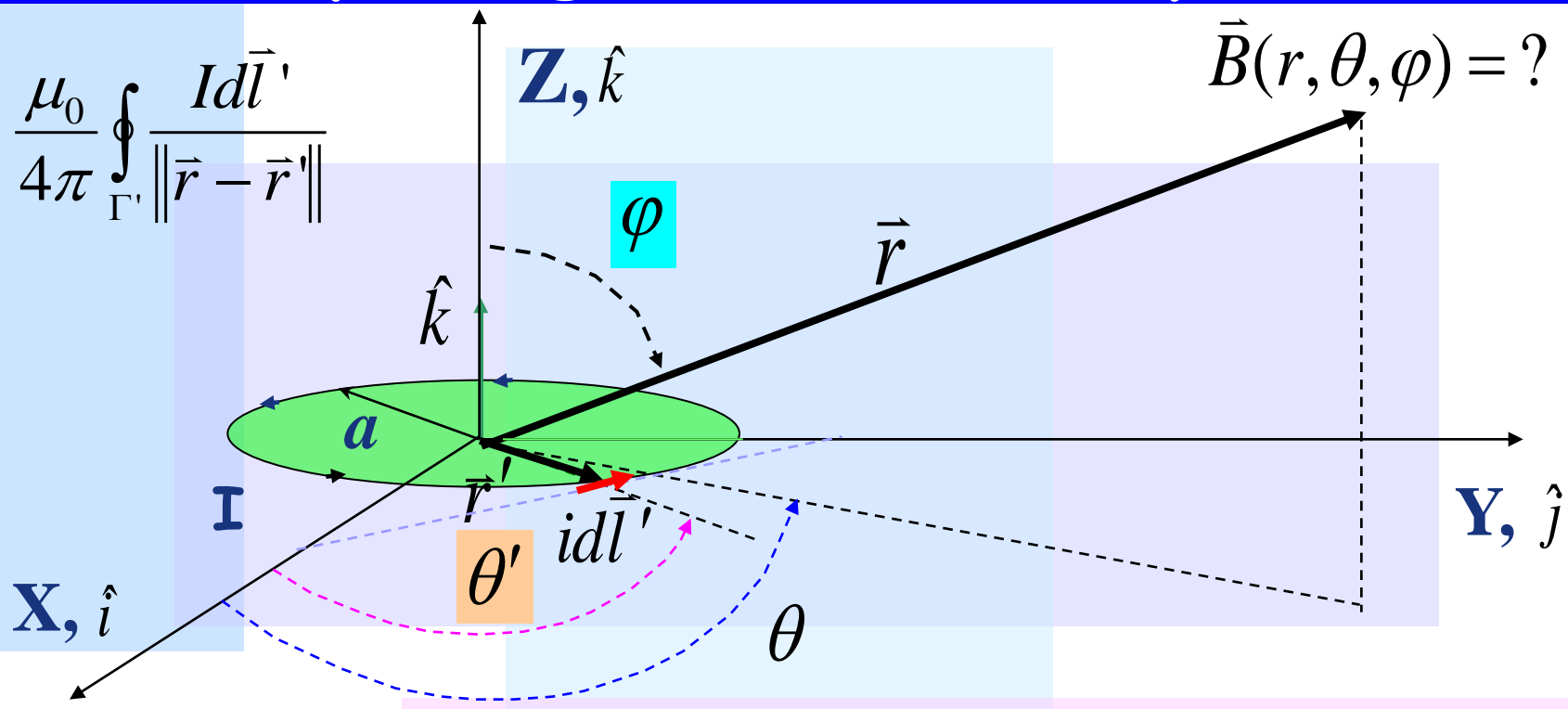
$$\int_0^{2\pi} \sin \theta'^2 d\theta' = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta'}{2} d\theta' = \pi$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i})$$

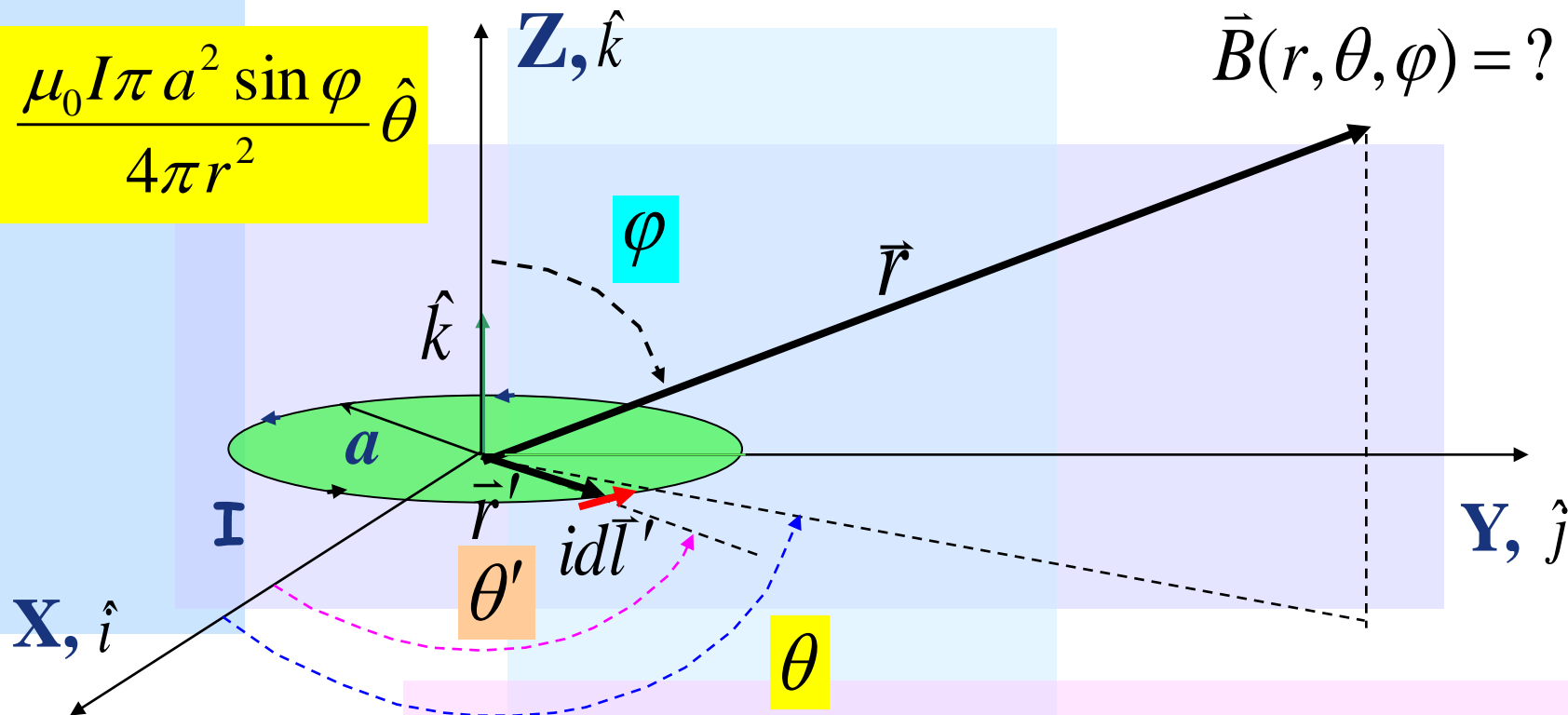
$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} \hat{\theta}$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} \hat{\theta}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



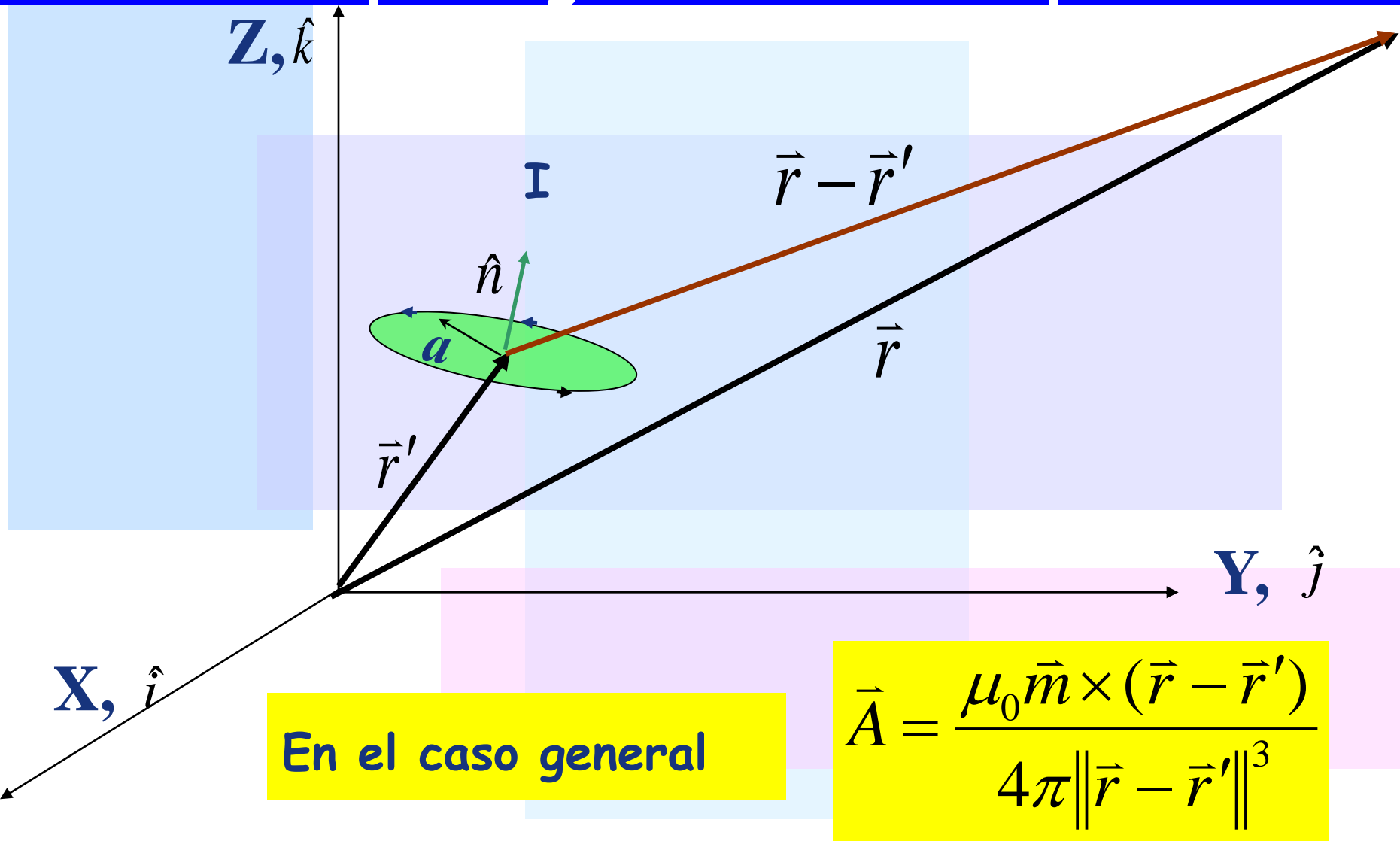
pero

$$\vec{m} = IS \hat{n} = I\pi a^2 \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$



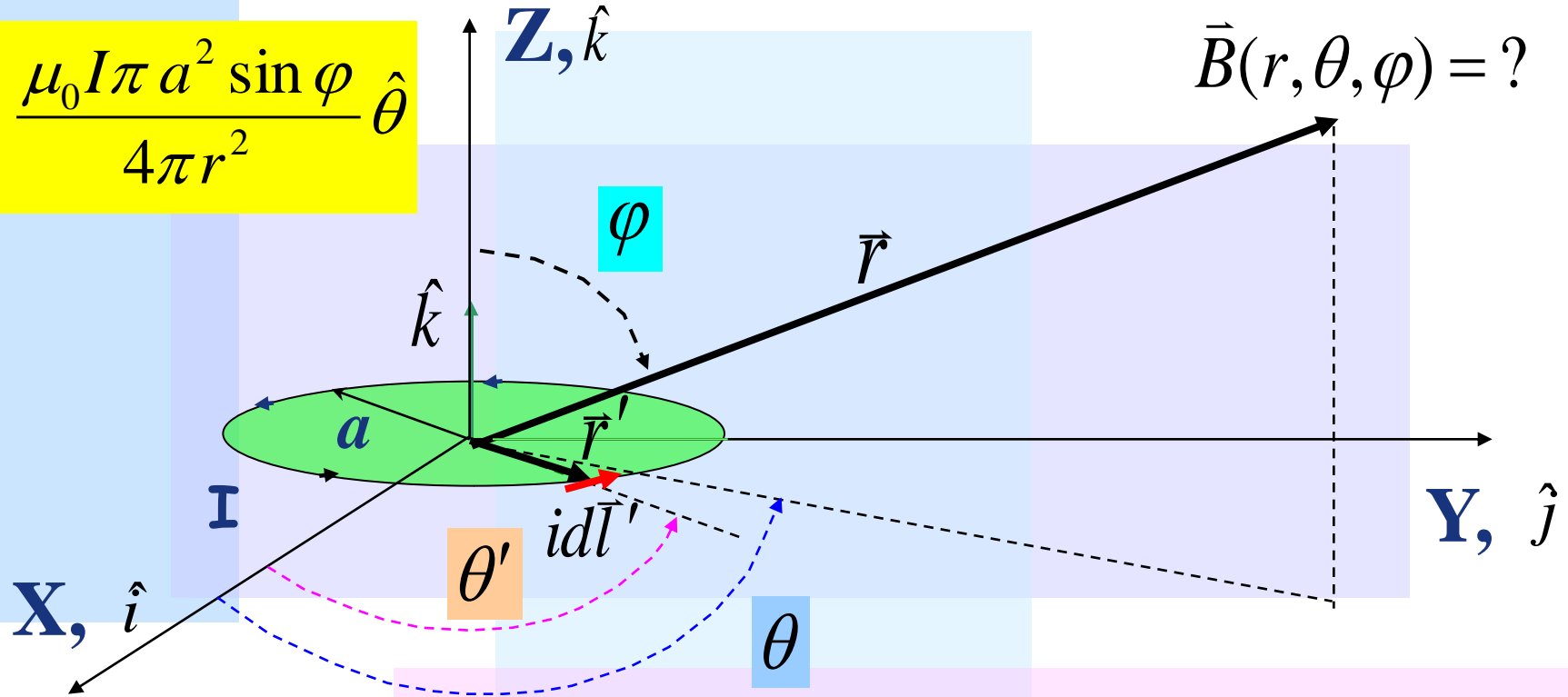
Campo magnético de un dipolo





Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} \hat{\theta}$$



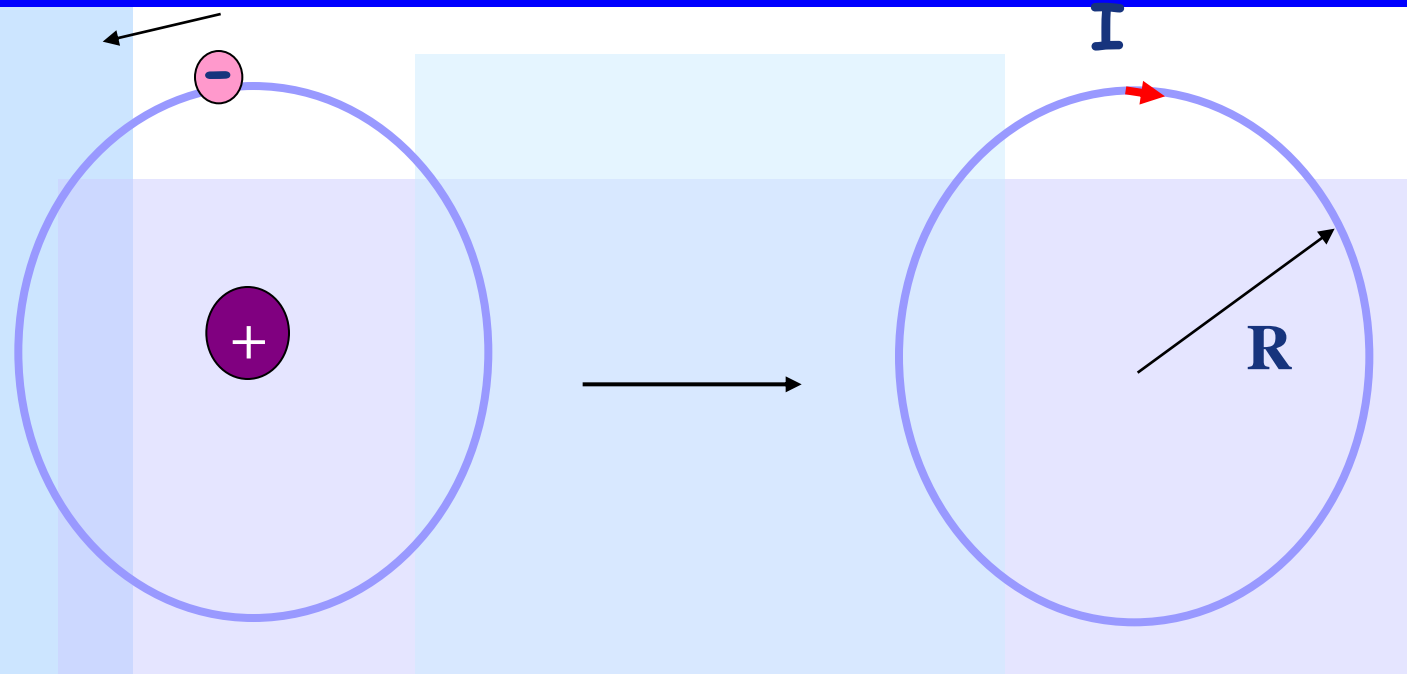
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Luego

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \phi \hat{r} + \sin \phi \hat{\phi})$$



Modelo atómico de los materiales

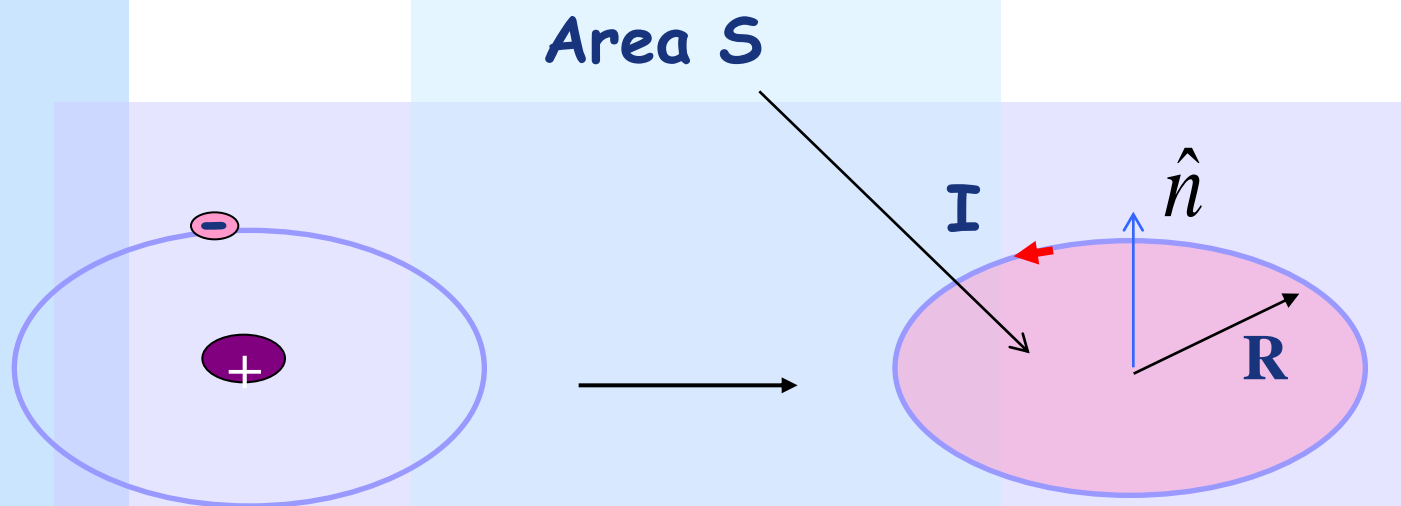


Movimiento de electrones se puede modelar como una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{qu}{2\pi R}$$



Modelo atómico de los materiales



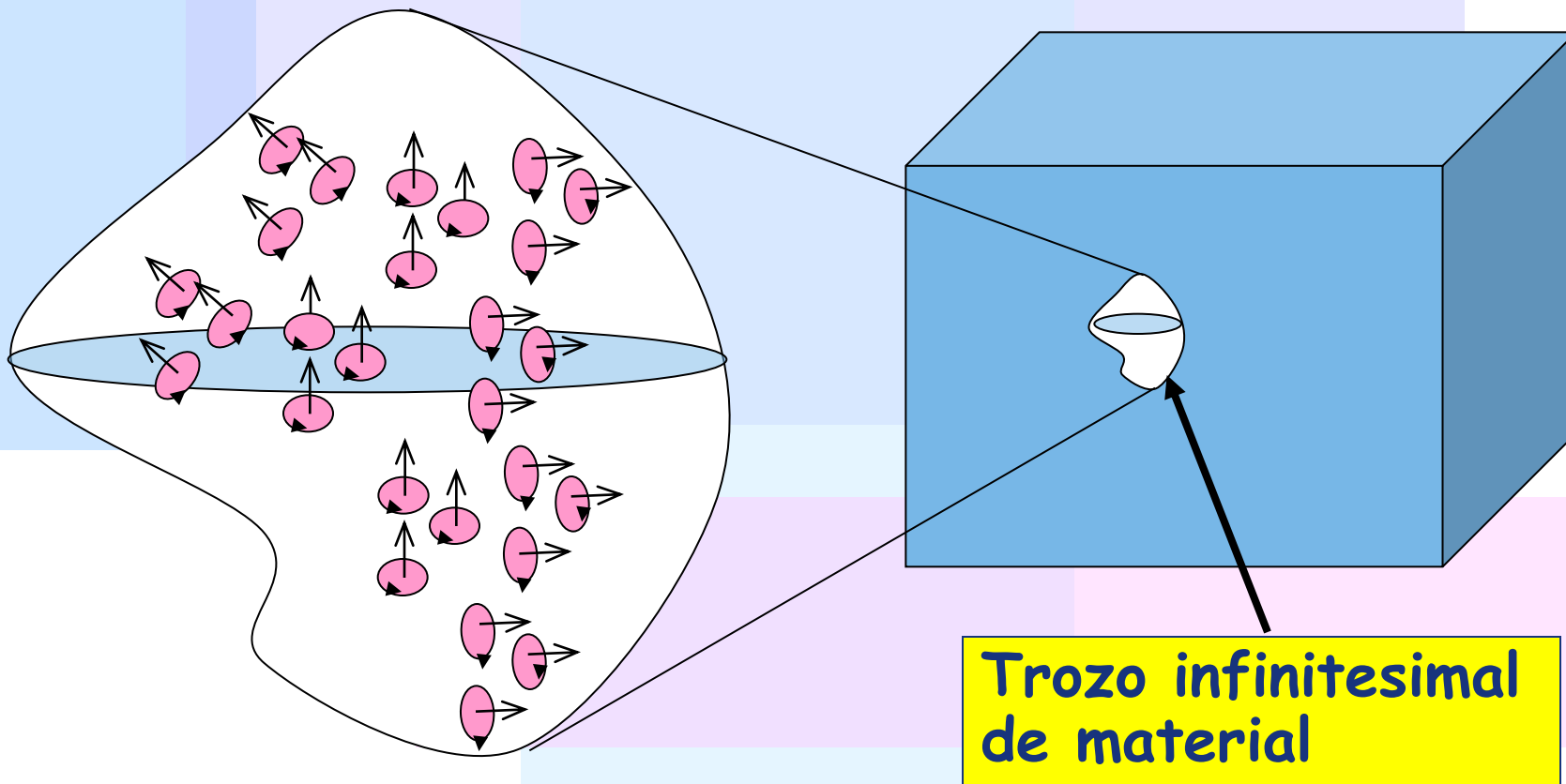
Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



Modelo atómico de los materiales

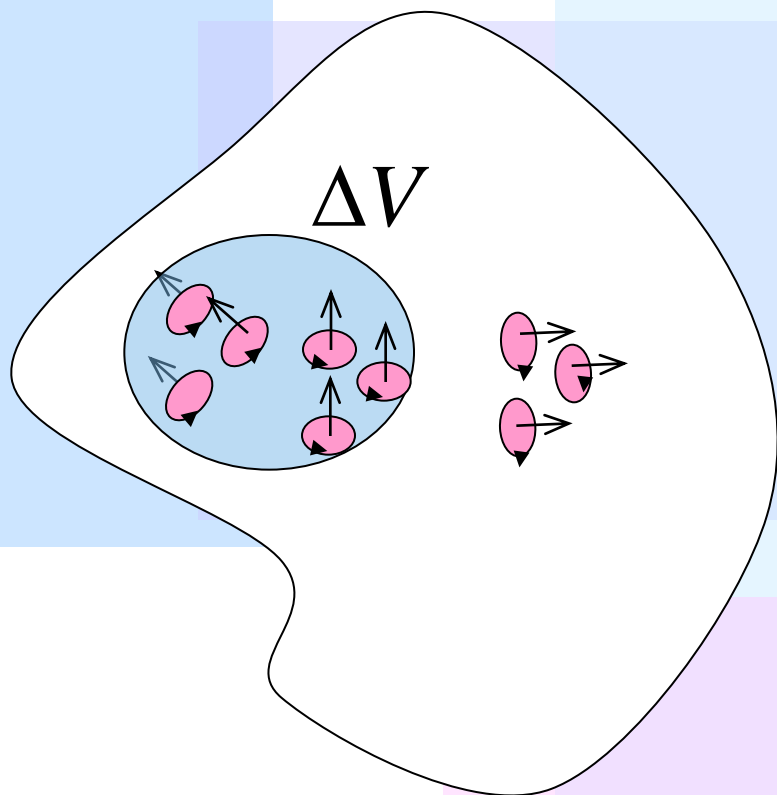
En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (átomos)





Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} [A/m]$$

En medios materiales se cumple

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$\mu = \mu_R \mu_0$ Permeabilidad magnética



Clasificación de los Materiales Magnéticos

<i>Material</i>	μ_R
Diamagnéticos	
Bismuto	0.999833
Mercurio	0.999968
Plata	0.9999736
Plomo	0.9999831
Cobre	0.9999906
Agua	0.9999912
Hidrógeno (s.t.p.)	≈ 1.0
Paramagnéticos	
Oxígeno (s.t.p.)	0.999998
Aire	1.00000037
Aluminio	1.000021
Tungsteno	1.00008
Platino	1.0003
Manganeso	1.001
Ferromagnéticos	
Cobalto	250
Níquel	600
Hierro Suave	5000
Hierro-Silicio	7000