FI2002 Electromagnetismo

Pauta Pregunta 1 Control 3, primavera 2010

Autores: Claudio Burgos y Sebastián Fehlandt

1. Pregunta

Considere un péndulo simple de masa m cuyo eje de rotación es paralelo a la dirección Este – Oeste, o sea, que se mueve en el plano determinado por la vertical y la dirección Norte-Sur. La longitud del péndulo es L y en el extremo inferior se ha fijado una pequeña bobina circular plana, de radio r y de N vueltas, cuyo eje coincide con la longitud del péndulo, según se muestra en la Figura 1.

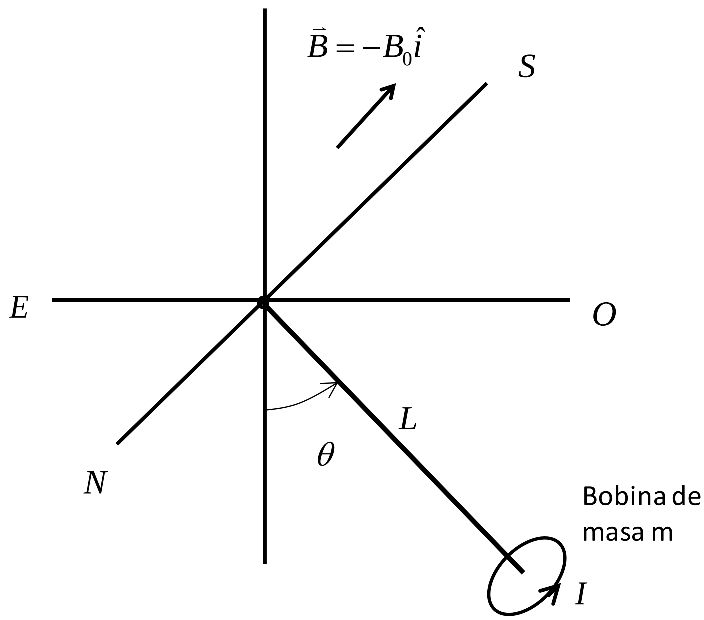
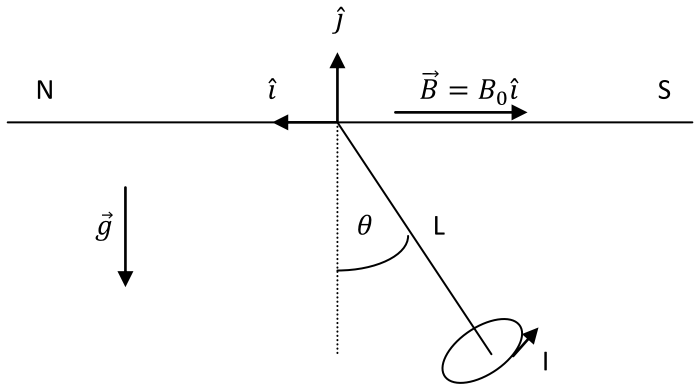


Figura 1

Al hacer pasar una corriente *I* por la bobina, el péndulo sale de la posición vertical, girando hasta alcanzar un punto de equilibrio en un ángulo θ, a causa de la presencia del campo magnético terrestre, que tiene una magnitud B y una orientación Norte - Sur. Se pide encontrar la relación entre θ, B, r, I, N, m, L en la situación de equilibrio.

2. Pauta

El sistema queda de la siguiente manera:



La condición de equilibrio se obtiene imponiendo equilibrio dinámico ($\sum \vec{F} = 0$) y equilibrio rotacional ($\sum \vec{T} = 0$). En este caso solo basta imponer el equilibrio rotacional, como se verá a continuación.

La interacción entre el campo magnético terrestre y la corriente circulando por la bobina produce un torque magnético sobre la barra. Para calcular este torque es posible considerar la bobina de N vueltas como N dipolos magnéticos, así el torque que el campo produce sobre cada dipolo, como se vio en clases, corresponde al siguiente:

$$\overrightarrow{T_{dip}} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Donde $\vec{m}$ corresponde al momento dipolar magnético, y tiene la siguiente expresión:

$$\vec{m} = IS\hat{n} = \pi r^2 I\hat{n}$$

Donde $S = \pi r^2$ corresponde a la superficie encerrada por el circuito que conforma el dipolo, y $\hat{n}$ al vector normal a esta superficie. Luego el momento dipolar de los N dipolos corresponde a la superposición de los momentos dipolares individuales:

$$\overrightarrow{m_{eq}} = \pi r^2 NI\hat{n}$$

Luego el torque que el campo magnético produce sobre la bobina corresponde a:

$$\vec{T} = \pi r^2 NI\hat{n} \times -B_0\hat{\imath}$$

Este torque es aplicado sobre la bobina, sin embargo, para analizar el equilibrio, se considera que este torque se traspasa a la barra con pivote en el eje de rotación, sin ninguna alteración. Así el torque anterior corresponde al torque magnético, y para calcularlo se descompone el vector normal en los ejes cartesianos:

$$\hat{n} = (\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

Y luego

$$\overrightarrow{T_m} = \pi r^2 NI(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) \times -B_0\hat{\imath} = \pi r^2 NIB_0 \cos\theta\,\hat{k}$$

Por otro lado la presencia de la aceleración de gravedad produce una fuerza, y con ello un torque, gravitacional sobre la bobina (de masa m). Luego:

$$\overrightarrow{T_g} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Donde

$$\vec{r} = -L(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) \quad \wedge \quad \vec{F} = -mg\hat{\jmath}$$

Y así el torque gravitacional corresponde a:

$$\overrightarrow{T_g} = -L(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) \times -mg\hat{\jmath} = mgL\sin\theta\,\hat{\mathrm{k}}$$

Luego imponiendo la condición de equilibrio:

$$\sum \vec{T} = \overrightarrow{T_g} + \overrightarrow{T_m} = 0 \Rightarrow mgL\sin\theta + \pi r^2 NIB_0 \cos\theta\,\hat{k} = 0$$

De donde se obtiene:

$$\boxed{tg(\theta) = -\frac{\pi r^2 NIB_0}{mgL}}$$

Nota: El signo depende de cómo se considera el ángulo θ, es decir, hacia qué lado de la vertical se considera como positivo. Según el enunciado debe considerarse como acá. Sin embargo, en caso de haber un dibujo indicando lo contario se analizará la consistencia entre lo considerado y el resultado

3. Distribución de Puntaje

- Torque Magnético 2 ptos
- Torque Gravitacional 2 ptos
- Relación pedida 2 ptos