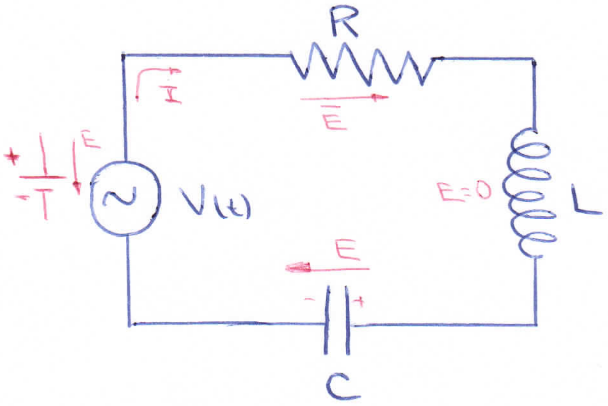
CIRCUITO RLC

Consideremos el siguiente circuito RLC en serie y alimentado por una corriente alterna $V_{(t)}$



$$V_{(t)} = V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$\Delta V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow IR + O + \frac{Q}{C} - V_{(t)} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$Q_{(t=0)} = 0 \quad y \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad L\frac{d^2Q}{dt} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Ecuación diferencial no-homogénea de 2do orden.

Una solución para la ecuación de arriba es:

$$\boxed{I_{(t)} = I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \phi)}$$

donde: $I_0 = \dfrac{V_0}{Z}$ y $\tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R}$

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ (Impedancia del circuito en Ω)

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Los voltajes en cada elemento del circuito vienen dados por:

$$V_R(t) = I_0 R \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = I_0 \omega L \cos(\omega t - \phi) = I_0 X_L \cos(\omega t - \phi)$$

$$V_C = -I_0 X_C \cos(\omega t - \phi)$$

$$\Rightarrow \quad V_R(t) = V_{R0} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \qquad V_{R0} = I_0 R$$

$$V_L(t) = V_{L0} \cos(\omega t - \phi) \qquad V_{L0} = I_0 X_L$$

$$V_C(t) = -V_{C0} \cos(\omega t - \phi) \qquad V_{C0} = I_0 X_C$$

El fenómeno de resonancia esta asociado a las condiciones en la cual I_0 alcanza un máximo.

$I_0 = \frac{V_0}{Z}$ $\qquad$ $I_0 \to$ máx cuando $Z \to$ mínimo

$\Rightarrow$ Z es mínimo cuando $X_L - X_C = 0$

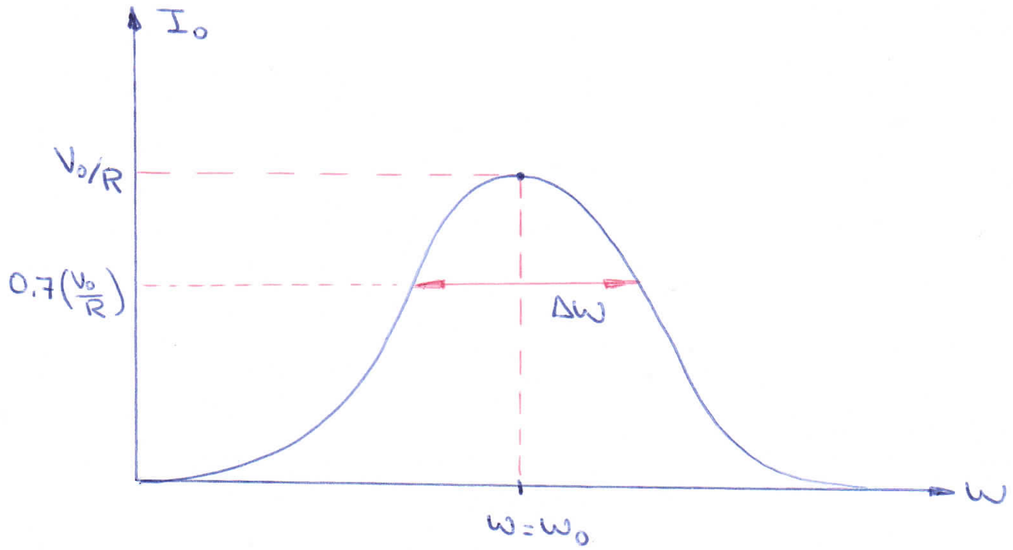
$\Rightarrow \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ Frecuencia de Resonancia.

$\Rightarrow \quad I_0 = \frac{V_0}{R}$ y $\phi = 0$

Podemos graficar I_0 versus ω:

si $\omega \to 0 \Rightarrow Z \to \infty \Rightarrow I_0 \to 0$

si $\omega \to \infty \Rightarrow Z \to \infty \Rightarrow I_0 \to 0$



El ancho de línea se define para el valor de I_0 en la cual la potencia se reduce a la mitad en la resonancia. La Potencia es máxima en la resonancia, entonces cuando $I_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{V_0}{R}\right)$ (es decir, 0,707 el valor de la corriente a $w = w_0$), entonces la potencia es la mitad de su valor máximo.

En un circuito RLC en serie:

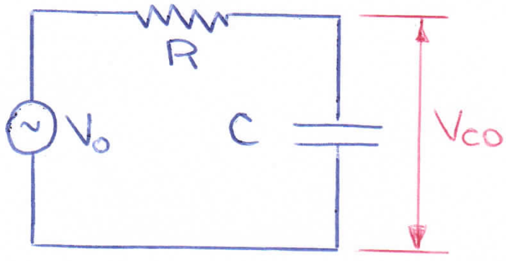
$$\boxed{\Delta w = \frac{R}{L}}$$

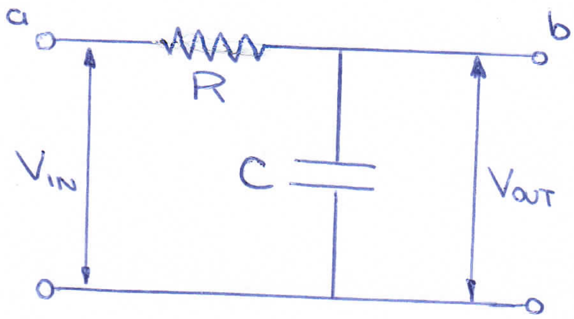
Se define el factor de calidad en la resonancia Q como:

$$\boxed{Q = \frac{w_0 L}{R} = \frac{w}{\Delta w}}$$

FILTRO PASA BAJO

Un circuito del tipo filtro pasa bajo tiene por función principal el permitir el paso de frecuencias bajas y atenuar las frecuencias más altas.





Si los voltajes de entrada y de salida del circuito son V_{IN} y V_{OUT} respectivamente, entonces

$$V_{IN} = V_o = I_o Z$$

$$V_{OUT} = I_o X_c = \frac{I_o}{wC}$$

Se denomina función de transferencia del sistema A_v a la relación salida/entrada del circuito. A_v depende de la frecuencia w.

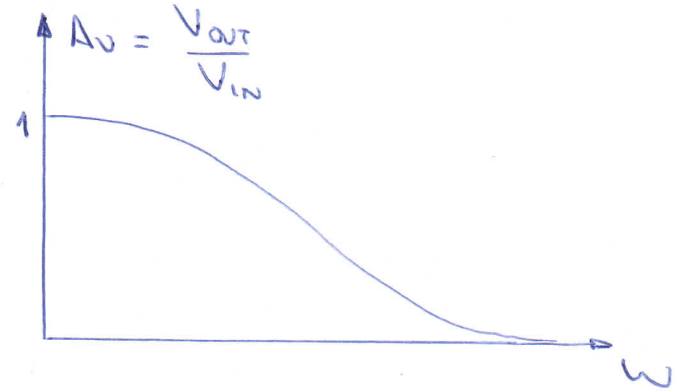
$$\Rightarrow \quad A_v = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{I_o/wC}{I_o Z} = \frac{1}{wC\sqrt{R^2+(1/wC)^2}}$$

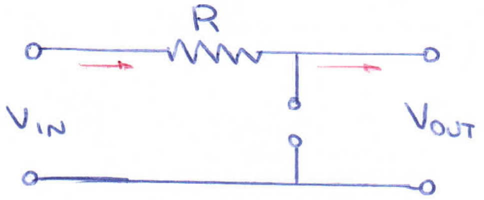
$$\Rightarrow \quad \boxed{A_v = \frac{1}{\sqrt{(wRC)^2+1}}}$$

Podemos graficar A_v en función de w:

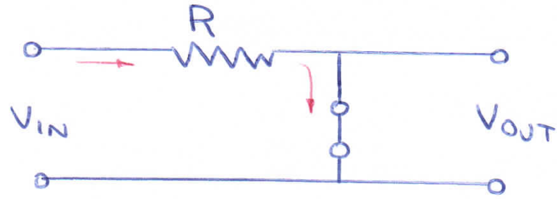
si $w \to 0 \Rightarrow A_v = 1 \quad (V_{OUT} = V_{IN})$

si $w \to 0 \Rightarrow A_v = 0 \quad (V_{OUT} = 0)$



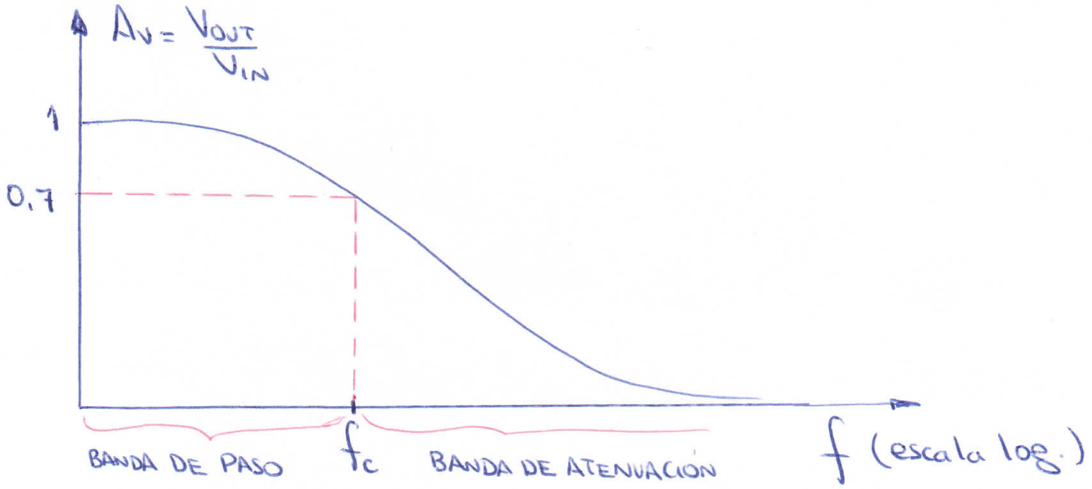


Bajas frecuencias



Altas frecuencias

Podemos graficar A_V en función de $f = \frac{\omega}{2\pi}$

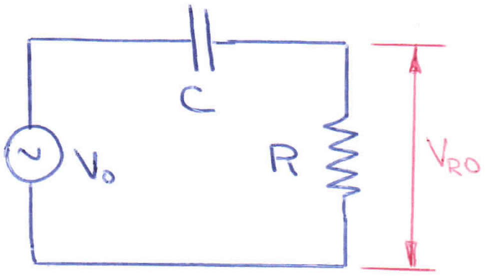


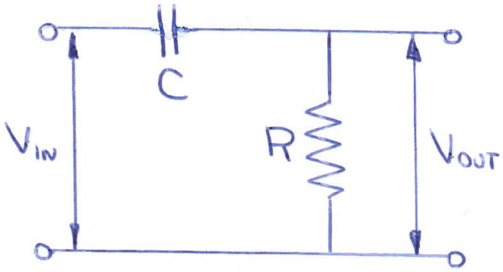
La frecuencia de corte f_C viene dada por:

$$\boxed{f_C = \frac{1}{2\pi RC}}$$

FILTRO PASA ALTO

Un circuito del tipo filtro pasa alto tiene por función principal el permitir el paso de frecuencias altas y atenuar las frecuencias más bajas.





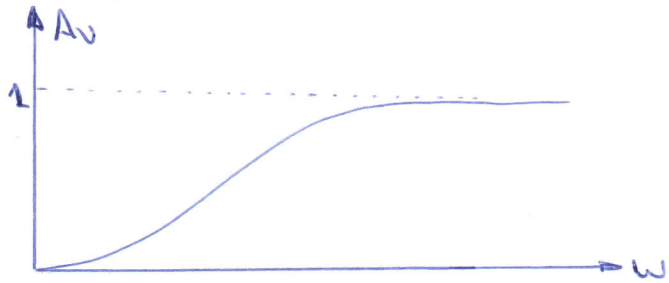
si los voltajes de entrada y de salida del circuito son V_{IN} y V_{OUT} respectivamente, entonces

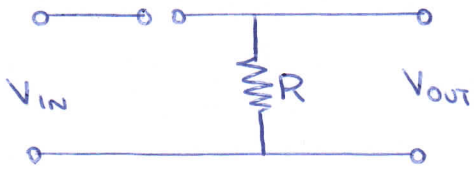
$$V_{IN} = V_o = I_o Z$$

$$V_{OUT} = I_o R$$

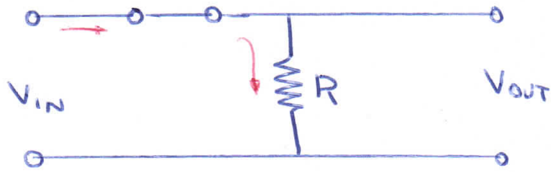
$$\Rightarrow A_V = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/wC)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_V = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{wRC}\right)^2}}}$$



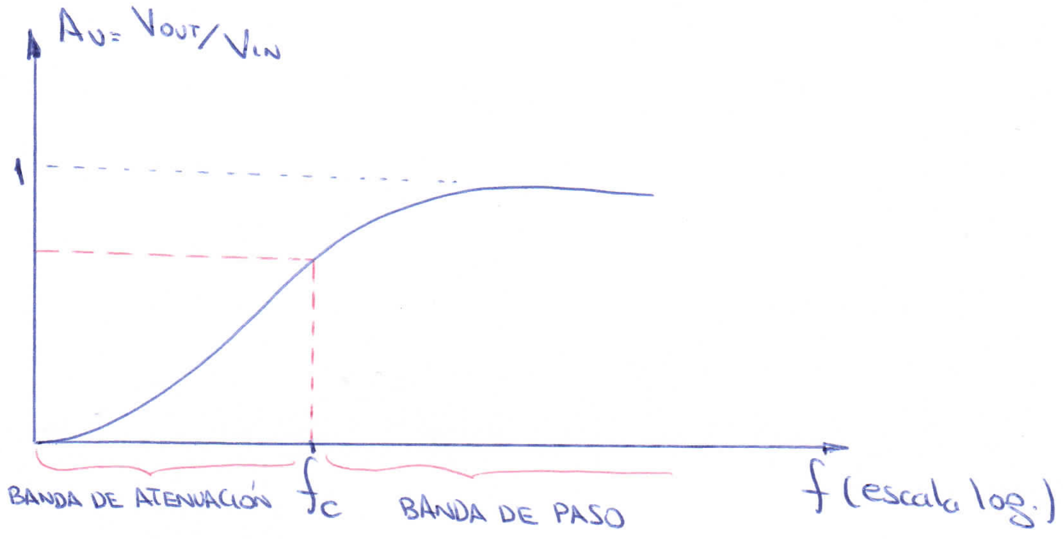


Bajas frecuencias



Altas frecuencias

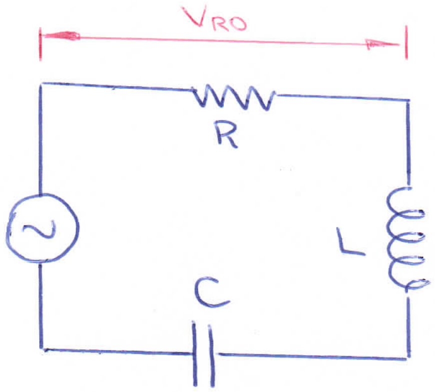
Podemos graficar A_v en función de $f = \frac{\omega}{2\pi}$



$$\boxed{f_C = \frac{1}{2\pi RC}}$$

FILTRO PASA BANDA

Un circuito del tipo filtro pasa banda tiene por función permitir el paso de frecuencias de una cierta banda y atenuar las frecuencias fuera de esa banda.

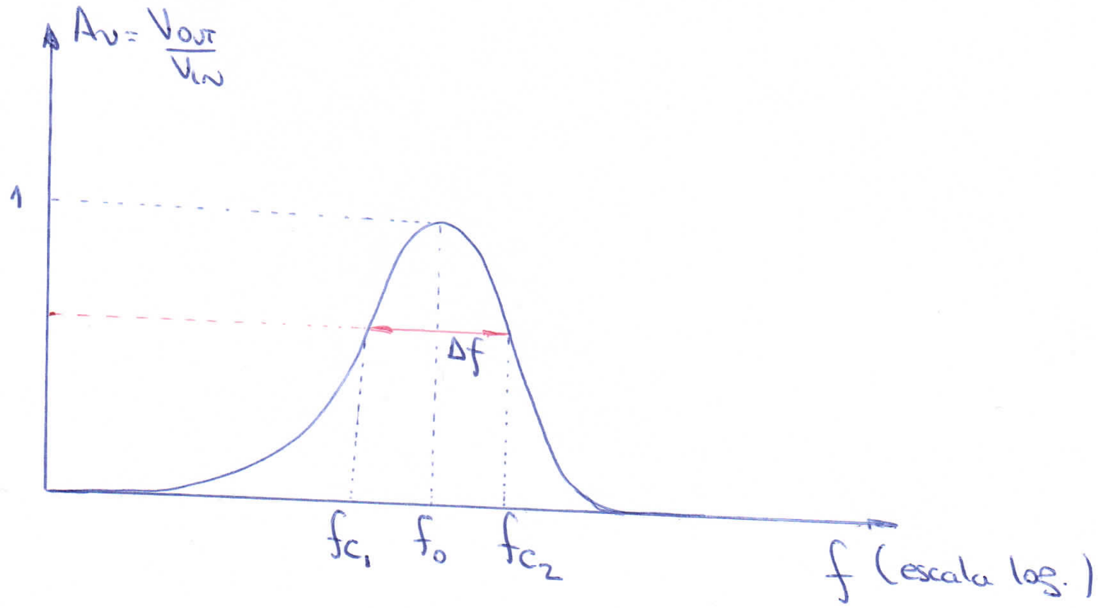


$$V_{IN} = I_0 Z$$

$$V_{OUT} = I_0 R$$

$$\Rightarrow A_V = \frac{I_0 R}{I_0 Z} = \frac{R}{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_V = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$



$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \qquad \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$$f_{c_1} = f_0 - \frac{\Delta f}{2}$$

$$f_{c_2} = f_0 + \frac{\Delta f}{2}$$