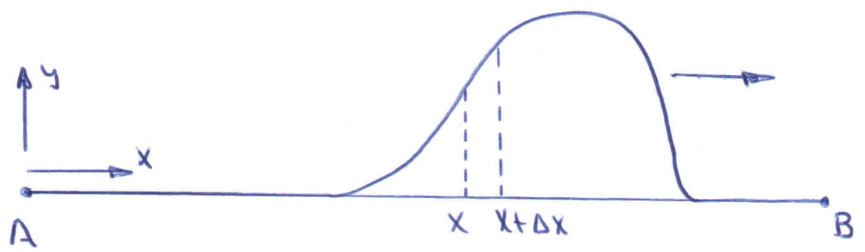
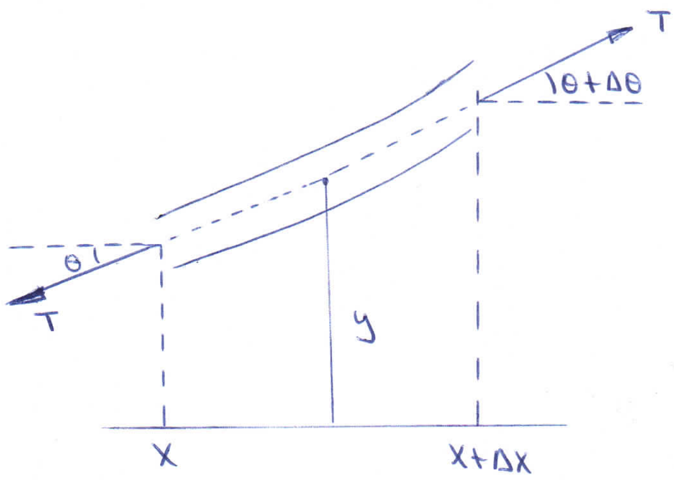
PROPAGACIÓN DE ONDAS: ECUACIÓN DE ONDA

Una cuerda tensada, de tensión T, longitud ℓ y masa m, posee una densidad lineal de masa $\mu = \frac{m}{\ell}$. La cuerda es perturbada en uno de sus extremos, creandose un pulso (u onda) que viaja de un lado hacia otro de la cuerda



Queremos describir el movimiento de la onda que viaja a través de la cuerda.

Consideremos una pequeña porción de la cuerda entre las posiciones x y $x+\Delta x$:



Asumiendo que la tensión es la misma en ambos lados de la cuerda y haciendo uso de la segunda ley de Newton en la dirección y, tenemos:

$$F_y = T\,\mathrm{sen}(\theta+\Delta\theta) - T\,\mathrm{sen}\,\theta$$

si θ es pequeño, podemos aproximar $\mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \quad F_y = \Delta m\, \ddot{y} = T(\theta+\Delta\theta) - T\theta = T\Delta\theta$$

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x} \Rightarrow \Delta m = \mu \Delta x$$

Entonces: $\mu \Delta x \, \ddot{y} = T \Delta\theta$ . . . . (1)

$$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\tan\theta) = \cancelto{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

reemplazando en (1): $\mu \Delta x \, \ddot{y} = T \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{. . . . . (2)}$$

Qué tipo de función $y = f(x,t)$ satisface la ecuación (2) ?

Resulta que, toda función de un único valor de la forma $f(x \pm ct)$ satisface la ecuación diferencial (2) !

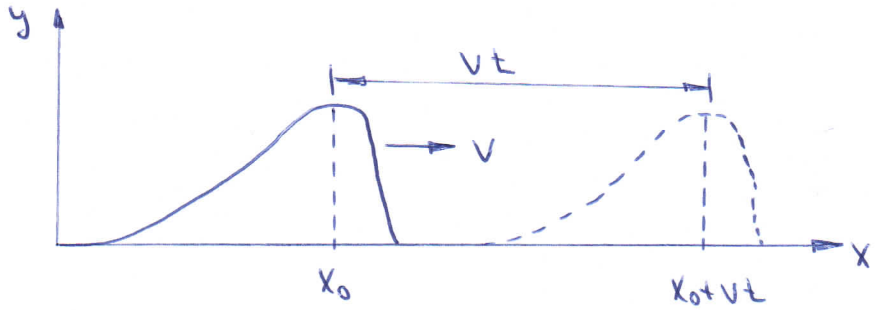
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 f \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{T} c^2 f = f \Rightarrow c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \, [m/s]$$ velocidad !

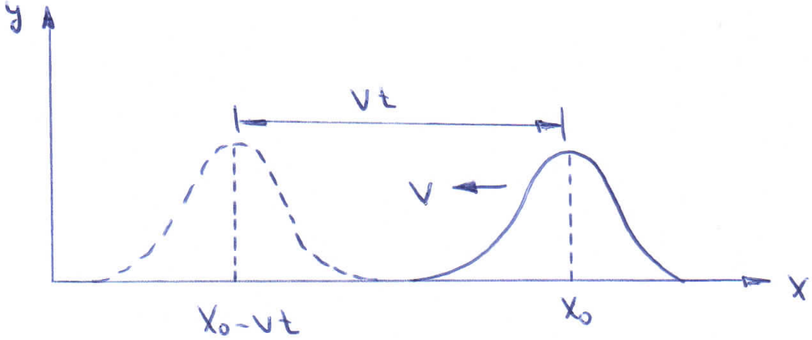
$$\Rightarrow \boxed{y = f(x \pm vt)}$$ función de onda, con $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

y $$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$ Ecuación de onda !

si $y = f(x - vt)$



si $y = f(x + vt)$



Supongamos que $y_1 = f_1(x \pm vt)$ y $y_2 = f_2(x \pm vt)$ satisfacen la ecuación de onda. Sea $y_3 = y_1 + y_2$

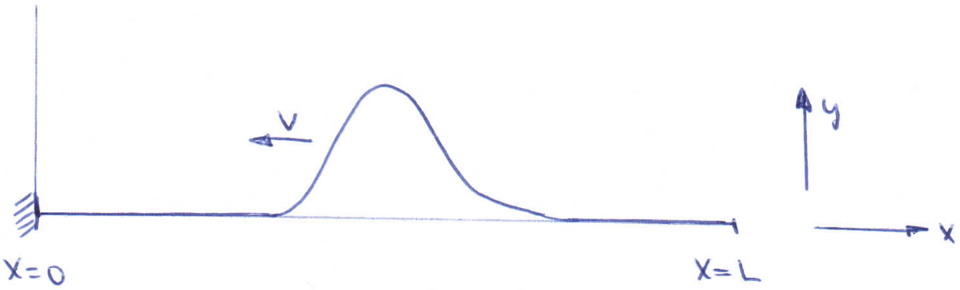
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = v^2 (y_1 + y_2)$$

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = (y_1 + y_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}$$

Por tanto y_3 también satisface la ecuación de onda : Principio de Superposición !

Si mantenemos fijo uno de los extremos de la cuerda (por ejemplo en $x=0$), entonces cuando la onda llegue a ese punto, necesariamente retornara (rebotara) cambiando de dirección. En estas condiciones la amplitud de la onda en $x=0$ será cero.

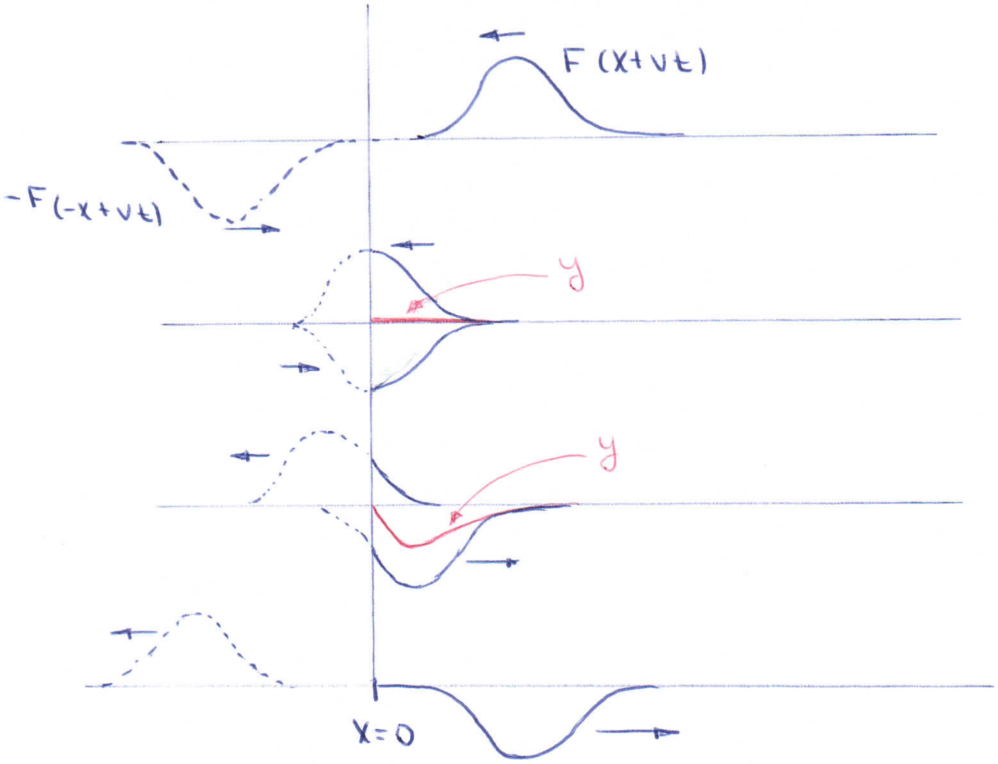


Si la onda de ida es $F(x+vt)$ y la de retorno $G(x-vt)$. Cual es la forma de la onda reflejada?

$$y = F(x+vt) + G(x-vt)$$

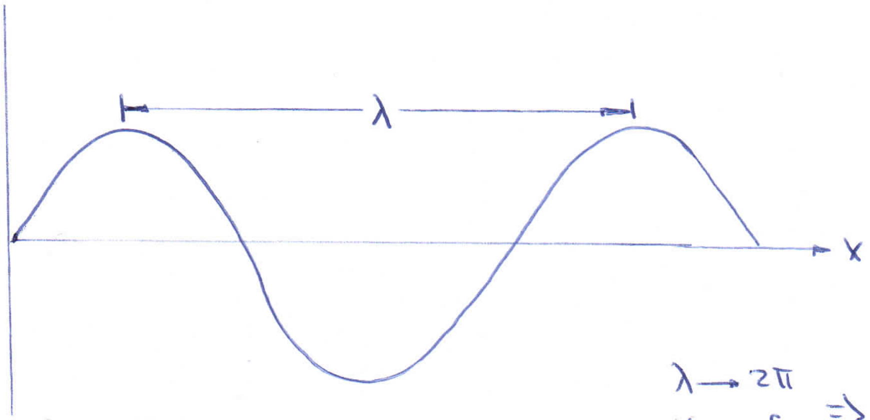
$$y(x=0) = F(vt) + G(-vt) = 0 \Rightarrow G(-vt) = -F(vt)$$

$$\Rightarrow y = F(x+vt) - F(-x+vt)$$



Consideremos una onda sinusoidal de la forma

$$y(x,t) = A \,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

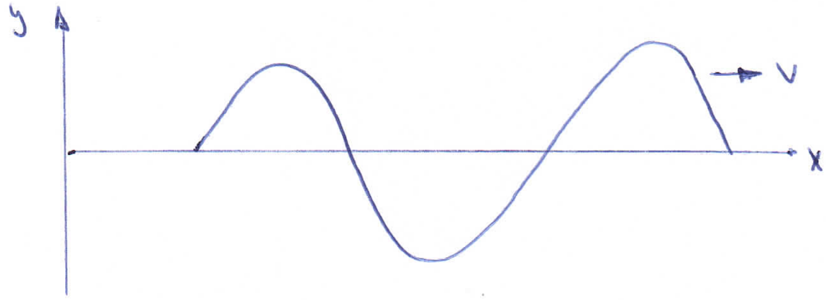


λ: longitud de onda

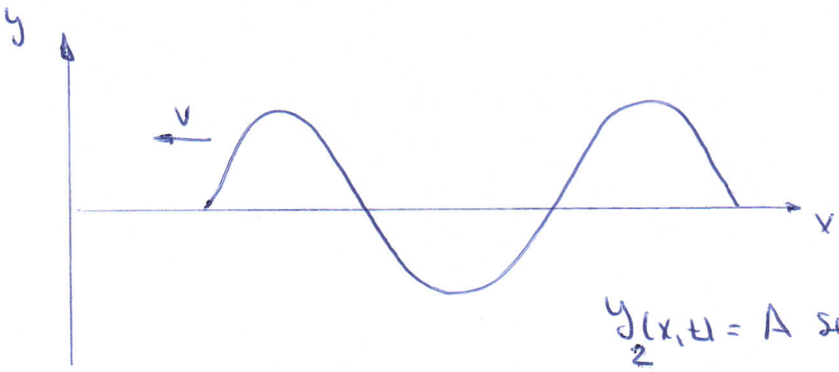
$\lambda \rightarrow 2\pi$
$x \rightarrow \xi$ $\Rightarrow$ $\xi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) x$ rad.

Definimos el número de onda k como: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

y la frecuencia angular ω como: $\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$



$$y_1(x,t) = A \,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$



$$y_2(x,t) = A \,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right]$$

Para el caso de la cuerda con uno de sus extremos fijo:

$$F(x+vt) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right]$$

$$G(x-vt) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(-x+vt)\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right] + A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(-x+vt)\right]$$

$$y = 2A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = 2A \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t)$$

Definamos la función $y = y_1 + y_2$

donde

$$y_1 = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] \qquad y_2 = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right]$$

$$\Rightarrow \quad y_{(x,t)} = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] + A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right]$$

$$\boxed{y_{(x,t)} = 2A \underbrace{\operatorname{sen}(kx)}_{\text{Componente espacial}} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{componente temporal}}}$$

Función de onda de una onda estacionaria

Si consideramos los dos extremos de la cuerda fijos (inmóviles) tendremos que

$$y(x=0) = y(x=L) = 0$$

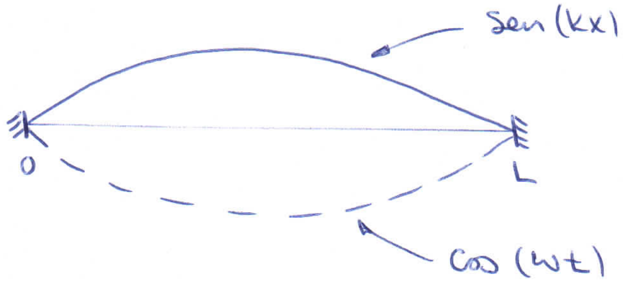
$$y(L,t) = 2A \operatorname{sen}(kL) \cos(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_n L = n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}} \quad y \quad \boxed{\omega_n = \frac{n\pi v}{L}} \qquad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nv}{2L}$$

<u>n=1</u> $\Rightarrow \lambda_1 = 2L \qquad k_1 = \frac{\pi}{L}$

$$y_1 = 2A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos \omega t$$



primer armónico : más baja frecuencia

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$: frecuencia fundamental !

<u>n=2</u> $\Rightarrow k_2 = \frac{2\pi}{L} \qquad \lambda_2 = L$