Física Moderna FI-3102
Tarea 3: Tensores

Prof. Gonzalo Palma. - Aux. Esteban Castillo.

Fecha: Viernes 24 de Septiembre 2010

INDICACIONES: Fecha de Entrega: Jueves 30 de Septiembre, Clase Auxiliar. No se aceptarán tareas entregadas después.

PROBLEMA 1

a.- La transformación de Lorentz que lleva de un sistema K a otro K', ambos inerciales, puede ser representado mediante el cambio de coordenadas

$$\Delta x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \Delta x^{\nu'} \tag{0.1}$$

donde $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ puede ser pensada como una matriz de 4×4 en donde los indices μ y ν' corresponden a filas y columnas respectivamente. Usted ya sabe que en el caso particular de que el sistema K' que se mueve con velocidad v en la dirección x del sistema K, entonces $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ corresponde a un boost y puede ser expresado de la forma

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \to \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v$ (con $c = 1$). A partir de $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ deduzca todas las componentes de la transformación inversa $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \equiv \eta^{\mu'\nu'}\eta_{\nu\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$. (No utilice la notación matricial! en su lugar explote la notación de Einstein). ¿Cuál es la representación matricial de $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$?

b.- Observe que $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ también puede ser utilizada para representar rotaciones! Por ejemplo, considere ahora el caso en que $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ corresponde a una rotación en torno al eje x^3:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.3}$$

Repita lo solicitado en la parte anterior (parte a) de este problema. (Nota: Observe que las rotaciones, al igual que los boosts, dejan invariante el intervalo Δs^2.)

PROBLEMA 2

Considere el siguiente tensor T tipo $(0,2)$ que en un sistema K tiene por componentes:

$$T_{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} 0 & V_1 & V_2 & V_3 \\ -V_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ -V_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ -V_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

Observe que es un tensor anti-simétrico. Calcule explícitamente el valor de este tensor en el sistema K', que se mueve con respecto a K con una velocidad v en la dirección de $+x$. Es decir, calcule $T_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} T_{\mu\nu}$ donde $\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}$ corresponde a una transformación de Lorentz (le será útil recordar la expresión (0.2) del problema anterior).

PROBLEMA 3

Considere el mismo tensor antisimétrico de la pregunta anterior escrito en un sistema de referencia K. Escriba este tensor en un sistema de referencia K' rotado en un ángulo θ con respecto a K alrededor del eje x^3 (esta vez le será útil recordar la expresión (0.3) del problema anterior). Discuta la forma que presentan los valores de las componentes $V_{i'}$ y $U_{i'}$ del nuevo tensor $T_{\mu'\nu'}$.

PROBLEMA 4

c.- El tensor totalmente anti-simétrico (Levi-Civita) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se define como sigue. Si dos de sus índices son iguales, su valor es 0. Si sus índices están ordenados como $\{0\,1\,2\,3\}$ o cualquier otra permutación par de ellos, toma un valor igual a $+1$. Si es una permutación impar del orden correlativo, su valor es -1. Por ejemplo:

$$\epsilon_{0123} = 1, \qquad \epsilon_{1023} = -1. \tag{0.5}$$

(Note que hay muchas otras componentes de $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ con valores distintos de cero). Calcule explícitamente el valor de este tensor en el sistema K', que se mueve con respecto a K con una velocidad v en la dirección de $+x$.