Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Programación Dinámica Estocástica

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

1. Problemas de Programación Dinámica Estocástica

1. (*) El gerente de operaciones de una fábrica desea programar la operación de un proceso para los siguientes T períodos. Para realizar este proceso se necesita una máquina cuyo costo de operación depende de su antigüedad y es igual a C_n por año, con n representando la edad de la máquina ($n = 0$, 1, 2, ...).

   Cada año se tiene la opción de reemplazar este equipo por otro, nuevo o usado, el costo de adquisición de un equipo con n años de uso es de I_n. Por otra parte el gerente puede vender un equipo con n años de uso a un precio de venta V_n.

   Actualmente la gerencia NO dispone de la máquina, por lo que necesariamente tendrá que comprarla, además todos los años debe tener el proceso funcionando.

   a) Plantee el problema de operación y reemplazo de equipo como un problema de programación dinámica determinística, con el fin de minimizar el costo total.

   Considere ahora que el equipo tiene una probabilidad de fallar al final de un cada uno de los períodos. Esta probabilidad depende exclusivamente de la edad de la máquina y es igual a q_n. En este caso necesariamente deberemos reemplazar el equipo por uno nuevo, pagando un sobreprecio de un 50 %, al inicio del período siguiente. Un equipo que falla pierde su valor económico (nadie lo compra).

   b) Plantee este problema de operación y reemplazo de equipo como un problema de programación dinámica estocástica, con el fin de minimizar el costo total esperado.

2. (*) Un estudiante de ingeniería ha decidido participar en un concurso. Éste consiste en que debe armar un rompecabezas en menos de T horas. Si consigue hacerlo recibirá un premio de S, mientras que si no lo logra debrá pagar $S/2$. Por otra parte, cada hora que dedica al juego tiene un costo de oportunidad de C. A intervalos de 1 hora a nuestro jugador se le da la opción de retirarse (sin premio ni castigo).

   La probabilidad que en la próxima hora el jugador ponga k piezas es de $P_n(k)$ con n el número de piezas que faltan por poner. Formule un modelo de programación dinámica que permita al estudiante tomar, hora a hora, la decisión de continuar o no.

3. (*) Juan Pérez, fanático del fútbol, vende poleras del equipo de sus amores al final de los partidos en que juega su equipo. Juan sabe que si ganan vende 400 poleras, pero que si el equipo pierde vende sólo 200 unidades (por simplicidad suponga que este equipo nunca empata). Además Juan ha observado que las probabilidades de ganar o perder son iguales.

   Cada vez que Juan hace un pedido paga 500 pesos de costo fijo más 5 pesos por cada polera que encargue, las cuales vende en 8 pesos. Una exigencia de su proveedor es que todos los pedidos deben ser realizados en múltiplos de 100 poleras, y la entrega de éstas es inmediata.

   Debido al costo de capital, almacenamiento, y obsolescencia Juan carga un costo de 2 pesos por cada polera no vendida al final de un partido (poleras que llevó al estadio para vender pero nadie compró). La capacidad de almacenamiento de Juan es de 400 poleras como máximo.

   Juan está interesado en encontrar la política óptima de pedido para los primeros 3 partidos (su inventario actual de poleras es cero). Cualquier polera que sobre después del tercer partido se valoriza en 6 pesos. ¿Qué debería hacer Juan? (resuelva utilizando programación dinámica).

4. Una central hidroeléctrica recibe el flujo de agua proveniente de un embalse de río arriba. Los dueños del embalse deben, al comienzo de cada año, indicar la cantidad de agua(O_t) que entregarán a la central. El ingreso percibido es c[$/U.V.].

   Por otro lado, la única alimentación del embalse es a través de aguas lluvias. Por experiencia, se sabe que el volumen anual de aguas lluvia es una v.a. que sigue la siguiente distribución:

Volumen[U.V.]	Pbb.
O	P_1
M	P_2
2M	P_3

Con $P_1 + P_2 + P_3 = 1$. Además, si el embalse no es capaz de cubrir el mínimo pactado de Q[U.V] cada año, debe comprar el agua faltante a un precio de w[$/U.V.]. Suponga que el embalse tiene una capacidad máxima de K[U.V.] y que inicialmente dispone de R[U.V.].

a) Plantee un modelo que permita encontrar la política óptima.

b) Encuentre la política óptima para los próximos tres años si se sabe que:
$P_1 = 0,25$ $P_2 = 0,5$ $P_3 = 0,5$
M=1 c=1 Q=1
K=3 R=1 w=1

5. (*) Se están jugando las últimas fechas del Campeonato Nacional de Fútbol. Un hincha ha decidido que para lo que resta del torneo destinará una cantidad fija de dinero para ir al estadio. Así, semana a semana debe decidir si ir o no a ver el partido en el que juega su equipo, considerando que si va al estadio hoy le quedará menos plata para lo que resta del torneo (la entrada es fija y cuesta S). El hincha en cuestión, cuando va a el estadio, percibe un beneficio B si su equipo gana, un beneficio $e\times B$ si empata, y una pérdida de bienestar $q\times B$ si el equipo pierde ($e < 1$ y $q < 1$). Si no va al estadio no percibe ningún tipo de de beneficios. Además, si está presente en el juego en que el quipo de sus amores conquista el campeonato, percibe un aumento de bienestar extra de K. La probabilidad de que un partido se gane, empate o pierda depende del número de puntos que falte para que el equipo en cuestión asegure el campeonato (ganar otorga 3 puntos, empatar 1 y perder 0). Cuando faltan n puntos para "ponerse la corona" las probabilidades de ganar, empatar y perder son $P_n(g)$, $P_n(e)$ y $P_n(p)$ respectivamente (la suma de ellas es uno, por supuesto).

a) Formule un modelo que permita decidir semana a semana si ir o no al estadio, cuando faltan T partidos por jugar, al hincha le quedan C [$] y al equipo en cuestión le faltan n puntos para adjudicarse el campeonato.

b) Para los siguientes valores, determine si al hincha le conviene o no ir este fin de semana al estadio.
$C = 3$ $B = 6$ $q = 0{,}8$ $e = 0{,}5$
$K = 12$ $S = 3$ $T = 3$ $n = 2$

Probabilidades / n	2	1	0
$P_n(g)$	0,4	0,5	0,3
$P_n(e)$	0,5	0,4	0,1
$P_n(p)$	0,1	0,1	0,6

6. (*) Suponga que Ud. sale de su casa a comprar un medicamento para una persona a la cual quiere mucho y desea volver en el mínimo tiempo posible. Si no lo compra, la persona sufrirá un perjuicio en su salud, cosa que por supuesto Ud. no desea. En la ciudad hay N farmacias.

El tiempo de viaje para ir desde la farmacia i a la farmacia j es t_{ij} $\forall\,(i,j) \in 0,\ldots,N$, donde la "farmacia 0" representa su casa.

El medicamento que desea comprar es muy escaso y es posible que no se encuentre en todas las farmacias. Existe una probabilidad a priori p_i que el medicamento esté en la farmacia i. La presencia del medicamento en dos farmacias cualesquiera son v.a. dependientes en probabilidad: si visita algunas farmacias y no encuentra el medicamento disponible, esa información afecta las probabilidades de encontrarlo en las restantes (en general disminuye la probabilidad de encontrarlo en las que están cerca de una farmacia donde no está el medicamento). Es decir, la probabilidad de encontrarlo en la farmacia i es función del itinerario que se siguió para llegar a ella.

Entrar a una farmacia a preguntar por el medicamento toma un tiempo de τ.

a) ¿Cuántas farmacias visitará como máximo?.

b) Formule un modelo de programación dinámica que permita decidir su itinerario de manera de minimizar el valor esperado del tiempo hasta volver a su casa con el medicamento.

7. (*) Usted ha decidido ir a mochilear a Bongwutsi, un pequeño país africano. Luego de arribar al aeropuerto de Bongwutsi, usted se encuentra al comienzo de la calle principal listo para buscar alojamiento.

   Según la información de la guía, se sabe que a lo largo de la calle existen los únicos N hoteles de la ciudad. Cada hotel está separado por 3 cuadras del siguiente. La probabilidad que el hotel $i-$ésimo tenga habitación disponible es P_i, donde P_i es decreciente en i (si no hay habitación, usted no puede quedarse en ese hotel).El precio de hotel i es S_i, también decreciente en i. Si pasa frente a uno de los hoteles y no entra, usted no puede regresar a él. En buenas cuentas, usted sólo puede recorrer la calle una vez, de principio a fin, sin volver atrás.

   Los costos considerados son los siguientes:

   - Costo de caminar desde el hotel $i-$ésimo al $i+1$ es C_i, creciente en i.
   - Costo de entrar a preguntar a un hotel, si hay o no habitación disponible, es igual a Q para todos los hoteles (refleja la caminata hacia el interior del lugar y la pérdida de tiempo en aquello).
   - Si luego de pasar a lo largo de toda la calle usted no se queda en ningún hotel, tiene un costo residual de dormir en la calle valorado en K.

   A usted lo único que le interesa es minimizar el costo total, independiente de la calidad del hotel en el cual se hospeda.

   a) Formule un modelo de programación dinámica que le permita resolver el mismo problema en el caso general. Fundamente intuitivamente, por qué es útil usar programación dinámica para resolver este problema.

   b) Resuelva el modelo para los siguientes parámetros:
   $N = 3$ $\quad P_1 = 0,8$ $\quad P_2 = 0,6$ $\quad P_3 = 0,4$
   $S_1 = 500$ $\quad S_2 = 250$ $\quad S_3 = 150$
   $Q = C1 = C2 = 100$ $\quad K = 450$

8. Suponga que a comienzos de la próxima semana usted tendrá a su disposición cierta cantidad de dinero M para sus gastos personales hasta fin de año. Usted desea gastar todo el dinero antes del próximo año, por lo tanto, el valor que para usted tiene un peso de los M es cero después del 31 de diciembre del presente, (suponga que el fin de año corresponde a un domingo).

   Usted debe decidir cuánto gastar semana a semana de modo de maximizar su beneficio esperado. La decisión de cuánto gastar en una semana dada se toma a comienzos de esa semana y no se cambia (como buen ingeniero planificador y mal vividor). Si la semana $k,\ k = 0, ..., T$ usted gasta G pesos, entonces el beneficio percibido puede ser representado por:

   $$\sqrt{(a_k + b_k) \cdot G}$$

   Donde $a_k > 0$ es una constante y b_k es una variable aleatoria positiva con función de densidad $f_{b_k}(x)$. La variable aleatoria intenta modelar el hecho que usted no sabe todas las actividades que realizará en la semana y sus respectivos beneficios. Por ejemplo, si una semana decide gastar \$5.000 y el día miércoles se entera que hay un recital de su conjunto favorito por \$5.000 entonces su beneficio aumentará.

a) Determine el valor esperado de su beneficio en la semana k si decide gastar G.

b) Formule un modelo de programación dinámica que le permita resolver el problema. Entregue variable de estado, de decisión, aleatoria, función de beneficio acumulado, etc.

c) Explique cómo resolvería el problema utilizando el algoritmo de programación dinámica.

9. Un inversionista posee acciones de la Empresa A y una cierta cantidad de dinero. Cada semana puede comprar o vender acciones de A al precio vigente para la acción esa semana. El inversionista piensa retirarse dentro de un año (52 semanas), y desea maximizar el valor esperado de su capital al momento de retirarse.

No existe la posibilidad de endeudarse (no puede comprar acciones si no tiene dinero para pagarlas). El precio de la acción de A toma valores enteros positivos. Si en una semana cualquiera el precio es i [$], existe una probabilidad q_{ij} que el precio sea j [$] la semana siguiente.

a) Formule (y no resuelva) un modelo de programación dinámica que represente el problema del inversionista y le permita tomar decisiones óptimas semana a semana.

b) Suponga que el inversionista llega a la semana 51 con X acciones de A y D [$], y que el precio de la acción de A esa semana es de j [$]. Encuentre la política óptima para las 2 últimas semanas. Hint: Suponga que $\exists M > 0$ t.q. $\sum_k kq_{jk} \leq M \forall j, k$. Puede ayudar si interpreta el término $\sum_k kq_{jk}$ como una esperanza condicional.

10. Una cadena de tiendas ha importado C unidades de una estufa, las cuales espera vender durante la temporada Otoño-Invierno. Al comenzar la temporada las C unidades están almacenadas en la bodega central de la cadena en cuestión. La temporada dura T semanas. Al comienzo de cada semana salen camiones a repartir mercaderías a cada una de las N tiendas que componen la cadena y el product manager a cargo de las estufas puede enviar en ellos estufas a cada una de las tiendas. No es posible enviar mercadería desde una tienda a otra ni tampoco devolverla desde las tiendas a la bodega central. Al final de cada semana, las tiendas informan al product manager el número de estufas que vendieron (y por tanto la cantidad que quedó en sus respectivas bodegas para la semana siguiente). Llamemos D_i^t a la demanda de la tienda i en la semana t, las cuáles son parmetros conocidos. El precio de venta de las estufas es p. Al terminar la temporada, las unidades que hayan quedado en las tiendas pueden ser vendidas a una liquidadora a un precio $s < p$.

Por simplicidad suponga que no hay restricciones de capacidad en los camiones ni en las bodegas de cada una de las tiendas. Suponga también que no existen costos por mantener el producto en bodega ni tampoco por enviar mercadería desde la bodega central a las tiendas y que dichos envíos son instantáneos.

Formule el problema de programación dinámica que debe resolver el product manager a cargo de las estufas para decidir cuantas unidades enviar a cada tienda al comienzo de cada semana.

11. (*) Un destacado tenista tiene dos clases de saque: uno fuerte (F) y otro suave (S). La probabilidad de que saque el saque fuerte y caiga dentro es p_H, y la de que saque suave y caiga dentro es p_S. Si el saque fuerte del tenista cae dentro, hay una probabilidad w_H de que el tenista gane el punto. Si su saque suave cae dentro hay una probabilidad w_S que gane el punto. Suponemos que $p_S > p_H$ y que $w_H > w_S$. La meta del deportista es maximizar la probabilidad de ganar un punto cuando sirve.

a) Use programación dinámica para ayudar al tenista a seleccionar una estrategia óptima de servicios. Recuerde que si los dos servicios caen fuera el punto se pierde.

b) Ahora considere que una fracción q de los saques del tenista tocan la red, sin cambiar su condición de caer dentro o fuera (recuerde que si un saque toca la red y cae dentro debe repetirse). Plantee un modelo de programación dinámica para esta nueva situación

12. Cuando Bryan Boitano llega al banco le quedan 30 minutos de tiempo para su almuerzo. Si Boitano se forma en la cola y le atienden antes de que termine su tiempo, obtiene una recompensa r. Sin embargo, a Bryan Boitano no le gusta esperar en la cola y para reflejar su disgusto incurre en un costo c por cada minuto que espera. Si hay n personas delante de Bryan Boitano en la fila del banco, se conoce la probabilidad de que x personas terminen sus transacciones en el siguiente minuto, $Pr[x|n]$. Si cuando llega Bryan Boitano hay N presonas delante de él en la fila, ¿Cuál será la estrategia que permitirá maximizar su ganancia neta esperada?.

13. (*) La tienda de departamentos Ryplabella trata de determinar una política óptima de administración de efectivo. Durante cada día, se puede describir la demanda por una variable aleatoria D donde $Pr[D = d] = P(d)$. Al inicio de cada día la tienda manda un empleado al banco a depositar o retirar fondos. Cada transacción bancaria cuesta K [$]. Entonces la demanda de efectivo se satisface por el efectivo que quedó del día anterior más el dinero retirado (o menos el dinero depositado). Al final del día, la tienda determina su balance de efectivo en la tienda. Si el balance de efectivo es negativo se carga un costo de carencia de s [$] por cada peso faltante. Si el balance final es positivo, se incurre en un costo de i [$] por cada peso retenido, debido a la pérdida de intereses que se podrían haber ganado al depositar el efectivo en el banco (considere la tasa de interés diaria compuesta continua r, es decir $1 + i = e^r$). Al inicio del día 1, la tienda tiene $10.000 de efectivo disponible y una existencia de $100.000 en el banco. Formule un modelo de programación dinámica que pueda emplearse para maximizar el costo esperado de satisfacer las demandas de efectivo de la tienda durante los siguientes N días.

14. (*) Ignatius Reilly trata de encontrar un estacionamiento cerca de su restaurante favorito. Se acerca al restaurante desde el oeste y su meta es estacionarse tan cerca como sea posible del restaurante. Los puestos de estacionamiento disponibles comienzan desde el puesto $-T$ al oeste, llegan hasta el puesto 0 (justo enfrente del restaurante) y siguen hasta el puesto T al este del restaurante. Ignatius es miope y no puede ver lo que hay adelante; sólo puede ver si el puesto donde se encuentra está o no vacío. Cuando Ignatius llega a un puesto vacío, debe decidir si estacionarse allí o continuar buscando un lugar más cercano. Una vez que pasa por un puesto de estacionamiento no puede regresar a él. Ignatius estima que la probabilidad que el cajón t esté vacío es p_{tn} donde n es el número de puestos que ya ha pasado y han estado vacíos. Si no encuentra estacionamiento se confunde e incurre en un costo P_n (n con el mismo significado), creciente en n. Si se estaciona en un puesto a t lugares del restaurante incurre en un costo proporcional t. Demuestre cómo puede Ignatius usar la programación dinámica para elaborar una estrategia de estacionamiento que reduzca al mínimo su costo esperado.

15. (*) El pueblo de Gville cuenta con una única estación de buses, a la cual acuden sus habitantes con el fin de asistir a la *gran ciudad*, único destino de los buses. Los pasajeros al llegar a la estación se forman en una única fila y abordan los buses respetando el orden de llegada y la capacidad de los buses (igual a K pasajeros). La probabilidad que al comienzo del minuto i lleguen n pasajeros es P_{in} $(i = 1, \ldots, T)$. Minuto a minuto el administrador debe decidir (al comienzo de cada minuto) autorizar o no la partida de uno o más buses destino a la capital. Esta tarea debe realizarla tomando en cuenta el número de buses presentes en el terminal. Sin embargo los buses que ya han iniciado su recorrido retornan a la estación de buses X minutos después de haber partido. Por cada viaje y por cada bus se incurre en un costo F (por combustible). Considere que el pasaje del bus cuesta P y que sólo se dispone de B buses al comienzo del día. Excepcionalmente la empresa incurre en un costo de E_t pesos por cada pasajero que pasa el minuto t en el terminal de buses y no sube a uno al término de éste , y en un costo de H por cada pasajero que no puede viajar a la ciudad por falta de capacidad.

    a) Plantee un modelo de programación dinámica que permita al administrador asignar la partida de los buses de forma de maximizar la ganancia diaria.

    Ahora considere que el costo E_t en realidad es E_{tk}, donde k es el número de minutos que el pasajero lleva esperando su bus al comienzo del minuto t.

b) Plantee un modelo de programación dinámica que considere la nueva situación

16. (*) Considere una tienda que cada mes debe decidir cuánto ordenar de un determinado producto. El costo de cada unidad de producto es c [$] y existe un costo fijo de poner una orden igual a K [$]. Se sabe que en general, el tiempo que se demora en llegar una orden es de un mes (lo que se ordena un mes estará disponible para el mes siguiente), pero existe una probabilidad p que la orden se atrase y demore dos meses en llegar. Una orden nunca demora más de dos meses en llegar.

    Actualmente la tienda tiene N clientes, cada uno de los cuales demandará una unidad de producto en un mes con una probabilidad q. El precio de venta es P [$], donde $P > c$. Además, si llega un cliente y no hay unidades en stock se incurre en un costo i [$] por cada uno de ellos.

    Por otra parte, la bodega en que se almacena el producto es de capacidad limitada y sólo permite guardar L unidades, con $L > N$ (todas las unidades por sobre esta capacidad que intente almacenar serán dañadas perdiendo completamente su valor).

    El dueño de la tienda actualmente cuenta con S unidades en la bodega y está interesado en contar con un sistema que le permita, mes a mes, decidir cuánto producto ordenar con el fin de maximizar sus utilidades para los próximos T períodos, fecha en que cerrará su negocio y las unidades de producto que sobren no tendrán valor comercial.

    a) ¿Por qué una técnica como programación dinámica es útil para resolver el problema de pedidos de productos de esta tienda?. Explique los efectos contrapuestos (trade-off) que dificultan la decisión de cuántas unidades pedir en un mes cualquiera.

    b) Formule el modelo de programación dinámica que permitiría apoyar las decisiones del dueño de la tienda. Escriba explícitamente las expresiones de los valores esperados que puedan aparecer en este modelo.

    c) Explique esquemáticamente como incluiría en su modelo la siguiente situación: El dueño de la tienda sabe que si un cliente en dos meses seguidos no encuentra el producto en stock se retirará indignado y nunca más volverá a la tienda lo que implica un costo I, con I mucho mayor que i.

17. Considere que el ingreso fiscal del país está determinado por los impuestos recaudados y por las utilidades de Codelco. El Gobierno debe decidir cuánto destinar cada año para el gasto público en función del ingreso fiscal y los ahorros del año anterior.

    La decisión del gasto público en un año determinado se toma luego de conocer cuál será el ingreso fiscal para ese año.

    Para capturar el hecho de que la utilidad marginal del gasto fiscal en un año es decreciente como función del gasto, la utilidad anual para el país se ha modelado como el logaritmo del gasto fiscal.

    El dinero proveniente del ingreso fiscal de un año que no es gastado se guarda para el año siguiente y pasa a formar parte del ahorro fiscal del siguiente período.

    Defina $F_t(S_t, Y_t)$ = utilidad total esperada para el país desde el año t hasta el final del horizonte de planificación (T) si se comienza el año t con un ahorro S_t y el ingreso fiscal de ese año es de Y_t (Y_t tiene una función de probabilidad $f_{Y_t}(\mathrm{y})$). Use β como el factor de descuento respectivo.

    a) Formule el problema que determina el gasto óptimo en cada año considerando las variables de estado del problema (S_t e Y_t). Especifique la condición de borde al final del horizonte de planificación.

    b) Para el caso particular en el cual hay dos períodos, $\beta = 1$, ahorro fiscal inicial igual a cero, e ingreso fiscal en el primer año igual a 200. Además, se sabe que el ingreso fiscal toma sólo dos valores: 100 con probabilidad 0,2 y 200 con probabilidad 0,8. Determine el gasto óptimo en el período uno y la utilidad esperada máxima.

18. (*) El destacado dúo de humoristas universitarios J&M se encuentra semana a semana muy complicado al tener que elegir entre dos alternativas:

- Crear una nueva rutina para su show
- Repetir alguna de la temporada anterior

Crear una nueva rutina en la k-ésima semana de la presente temporada requiere un esfuerzo que ellos valoran en $C(k)$. Repetir una rutina antigua no requiere esfuerzo, pero si se usa un rutina antigua se corre el riesgo de que sus seguidores protesten. La probabilidad de que sus seguidores reclamen en caso de usar una rutina antigua es p_n, donde n es el número de períodos consecutivos en que han existido reclamos. En estos casos, ambos integrantes del grupo ven su ánimo visiblemente afectado, malestar que puede ser cuantificado en una cantidad $D(n)$ (con n definido igual que antes).

Además, si a lo largo del semestre han repetido r rutinas antiguas existe una probabilidad q_r de que falten chistes para su gran Show de Fin de Temporada, donde no pueden repetir rutinas de temporadas anteriores. En este caso se verán obligados a crear m rutinas para presentarse a este evento, con el consiguiente esfuerzo que esto implica.

Cada temporada de "humor diferente" está compuesta por T shows, uno cada semana.

a) Describa las características que permiten modelar este problema utilizando programación dinámica estocástica.

b) Plantee un modelo de programación dinámica que le permita a nuestro estimado dúo decidir si debe crear o repetir rutinas cada semana.

c) Modifique su modelo si la probabilidad que sus seguidores reclamen por la repetición de una rutina antigua depende, además de los períodos consecutivos en que han existido reclamos, del número total de rutinas repetidas que el dúo ha presentado en la temporada.

2. Resolución Problemas de Programación Dinámica Estocástica

■ **1.** *a*) Modelo determinístico

Variable de estado:

S_t = años de uso de la máquina disponible al inicio del período t.

Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} \text{-} & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ \text{n} & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

Función de beneficio:

$$f_t(S_t, X_t) = \begin{cases} C_{S_t} + f^*_{t+1}(S_t + 1) & \text{En caso de no reemplazar}, X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + f^*_{t+1}(X_t + 1) & \text{En caso de reemplazar}, X_t = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

$f^*_t(S_t) = \text{mín}_{X_t} f_t(S_t, X_t)$
Donde $f^*_t(S_t)$ = costo mínimo de la operación de la máquina desde el inicio del período t hasta el final, es decir, hasta T si la antigüdad del equipo es S_t.

Condiciones de borde y función objetivo

$$\begin{aligned} f_{T+1}(S_{T+1}) &= -V_{S_{T+1}} \\ f^*_1 &= \min_{X_1=0,\,1,\,2,\,\ldots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + f^*_2(X_1 + 1) \right\} \end{aligned}$$

b) Modelo estocástico

Variable de estado

S_t = años de uso de la máquina disponible al inicio del período t.

Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} \text{-} & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ \text{n} & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

Variable aleatoria

$$w_t(S_t) = \begin{cases} 1 & \text{máquina buena al final del período } t\text{, si es de antigüedad } S_t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde la probabilidad $P[w_t(S_t) = 1] = (1 - q_{S_t+1})$

Función de beneficio:

$$E\Big[f_t(S_t, X_t)\Big] = \begin{cases} C_{S_t} + (1 - q_{S_t+1}) \cdot f^*_{t+1}(S_t + 1) + q_{S_t+1} \cdot \Big(1{,}5 I_0 + f^*_{t+1}(0)\Big) \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + (1 - q_{X_t+1}) \cdot f^*_{t+1}(X_t + 1) + q_{X_t+1} \cdot \Big(1{,}5 I_0 + f^*_{t+1}(0)\Big) \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

$f^*_t(S_t) = \text{mín}_{X_t} E\Big[f_t(S_t, X_t)\Big]$

Donde $f^*_t(S_t)$ = costo mínimo esperado de la operación de la máquina desde el inicio del período t hasta el final, es decir, hasta T si la antigüdad del equipo es S_t.

Condiciones de borde y función objetivo

Hay que notar que el valor residual ya no es tan claro, porque si la máquina se hecha a perder justo al final del último período NO necesitamos reemplazarla, así se tendrá:

$$E\Big[f_T(S_T, X_T)\Big] = \begin{cases} C_{S_T} + (1 - q_{S_T+1}) \cdot -V_{S_T+1} \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ \\ C_{X_T} + I_{X_T} - V_{S_T} + (1 - q_{X_T+1}) \cdot -V_{X_T+1} \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

$$f_1 = \min_{X_1 = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots} \Big\{ I_{X_1} + C_{X_1} + \mathbb{E}_{w_1}\Big[f^*_2(X_1 + 1)\Big]\Big\}$$

■ **2.** Lo primero es notar que no es necesario darse una variable de estado que indique si aún no he terminado (es decir, basta con ser consecuente en la modelación)

- **Etapas**: Cada una de las horas (comenzando con la 1).
- **Variables de estado**:

  N_i = Número piezas que le faltan para completar el puzzle, al comienzo de la hora i

- **Variables de decisión**:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si me retiro al comienzo de la hora i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria**:

$$P_n(k) = P[\text{Probabilidad de que en 1 hora ponga n piezas, si me faltan k para terminar}]$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Etapa T+1:
$$V^{\star}_{T+1}(N_{T+1}) = -\frac{S}{2}$$
  - Etapa i:
$$V_i(N_i, X_i) = \begin{cases} -C + \sum_{n=0}^{N_i-1} P_n(N_i) \cdot V^{\star}_{i+1}(N_i - n) + P_{N_i}(N_i) \cdot S & \text{Si } X_i = 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

    Entonces:
$$V^{\star}_i(N_i) = \max_{X_i} \left[V_i(N_i, X_i) \right]$$
  - Condiciones de borde:
$$N_1 = N$$

■ **3.** Valores de la función objetivo antes del último partido:

P^3	0	100	200	300	400	$(P^3)^*$	$B^*(N_3)$
0	0	-200	100	200	300	(400)	300
100	800	600	700	800	i	0 ó (300)	800
200	1600	1200	1300	i	i	0	1600
300	2200	1800	i	i	i	0	2200
400	2800	i	i	i	i	0	2800

Donde $(P^3)^*$ es el pedido óptimo de poleras antes del partido número tres si tengo N_3 en stock antes de pedir.

Antes del partido 2 se tendrá:

P^2	0	100	200	300	400	$(P^2)^*$	$B^*(N_2)$
0	300	100	400	450	650	(400)	650
100	1100	900	950	1150	i	(300)	1150
200	1900	1450	1300	i	i	0	1900
300	2450	2150	i	i	i	0	2450
400	3150	i	i	i	i	0	3150

Mientras que en la primera etapa:

P^1	0	100	200	300	400	$(P^1)^*$	$B^*(N_1)$
0	650	450	1250	1300	1475	(400)	1475

De esta manera la estrategia óptima es la siguiente:

- Partido 1: Pedir 400 poleras.
- Partido 2: Si el partido 1 lo ganó su equipo volver a pedir 400 poleras, mientras que si perdió el primer partido NO pedir.

- Partido 3: Si su equipo ganó el partido número 2 (independiente de lo que pasó en el primero) pedir 400 poleras. Si el equipo perdió el partido 1 y también perdió el partido 2 pedir 400 poleras. Si ganó el partido 1, pero perdió el partido 2 NO pedir.

■ **5.** *a*)
- **Etapas:** $k = 1, \ldots, T$. Fechas del campeonato.
- **Variables:**
  - Estado: $\left(S_k,\, n_k\right)$ donde S_k es el dinero disponible antes del partido k y n_k son los puntos que le faltan al equipo para titularse campeón antes del partido k-ésimo.
  - Decisión:
    $e_k = \begin{cases} 1 & \text{decido ir al estadio en la fecha k,} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
  - Aleatorias: $w_k = \begin{cases} 3 & \text{si el equipo gana el partido de la fecha k,} \\ 1 & \text{si el equipo empata el partido de la fecha k,} \\ 0 & \text{si pierde} \end{cases}$
- **Recursión:**
  - $n_{k+1} = n_k - w_k$
  - $S_{k+1} = S_k - S \cdot e_k$
- **Condiciones de borde:**
  - $V_{T+1}(S_{T+1}) = 0$ porque la plata que sobre no reporta utilidad.
  - $S_1 = C$, $n_1 = n$

Función de utilidad

En este problema hay que identificar las situaciones que entregan funciones de utilidad diferentes para una etapa, relacionados con la posibilidad de obtener o no el bono por estar presente en el partido en que el equipo gana el campeonato.

1) Caso $n_k = 0$ ó $n_k > 3$

$$U_k(S_k, n_k, w_k, e_k) = \begin{cases} B & \text{si } e_k = 1 \text{ y } w_k = 3, \\ e \cdot B & \text{si } e_k = 1 \text{ y } w_k = 1, \\ -q \cdot B & \text{si } e_k = 1 \text{ y } w_k = 0, \\ 0 & \text{si } e_k = 0 \end{cases}$$

2) Caso $n_k = 1,\, 2,\, 3$

$$U_k(S_k, n_k, w_k, e_k) = \begin{cases} B + K & \text{si } e_k = 1 \text{ y } w_k = 3, \\ e \cdot B & \text{si } e_k = 1,\, w_k = 1 \text{ y } n_k > 1, \\ e \cdot B + K & \text{si } e_k = 1,\, w_k = 1 \text{ y } n_k = 1, \\ -q \cdot B & \text{si } e_k = 1 \text{ y } w_k = 0, \\ 0 & \text{si } e_k = 0 \end{cases}$$

Función de beneficio acumulado

$$V_k(S_k, n_k, e_k) = \mathbb{E}_{w_k}\Big[U_k(S_k, n_k, w_k, e_k) + V^*_{k+1}(S_{k+1}, n_{k+1})\Big]$$

Con

$$V^*_k(S_k, n_k) = \max_{e_k} \Big\{V_k(S_k, n_k, e_k)\Big\}$$

b) **Resolución**

Última fecha

$,$n$	ir	no ir	e_k^*
3,2	$0,4 \cdot (B+K) + 0,5 \cdot e \cdot B - 0,1 \cdot q \cdot B = 8,22$	0	1
3,1	$0,5 \cdot (B+K) + 0,4 \cdot (e \cdot B + K) - 0,1 \cdot q \cdot B = 12,12$	0	1
3,0	$0,3 \cdot B + 0,1 \cdot e \cdot B - 0,6 \cdot q \cdot B = -0,78$	0	0
0,2	i	0	0
0,1	i	0	0
0,0	i	0	0

A un partido de la última fecha

$,$n$	ir	no ir	e_k^*
3,2	$0,4 \cdot (B+K) + 0,5 \cdot e \cdot B - 0,1 \cdot q \cdot B = 8,22$	$6,882$	1
3,1	$0,5 \cdot (B+K) + 0,4 \cdot (e \cdot B + K) - 0,1 \cdot q \cdot B = 12,12$	$0,1212$	1
3,0	$0,3 \cdot B + 0,1 \cdot e \cdot B - 0,6 \cdot q \cdot B = -0,78$	0	0
0,2	i	0	0
0,1	i	0	0
0,0	i	0	0

Cuando faltan tres partidos

$,$n$	ir	no ir	e_k^*
3,2	$0,4 \cdot (B+K) + 0,5 \cdot e \cdot B - 0,1 \cdot q \cdot B = 8,22$	$8,22 \cdot 0,1 + 12,12 \cdot 0,5 = 6,882$	1

Estrategia

Dados los parámetros del problema la estrategia óptima es ir al estadio cuando faltan 3 partidos para el fin del campeonato.

6. *a*) Hay que tener claro que a lo sumo se visitarán las N farmacias, dado que siempre es factible que el medicamento no se encuentre en ninguna de las N farmacias.

b) El modelo de programación dinámica queda:

- **Etapas**: La etapa i consistirá en el viaje a la i-ésima farmacia desde la i-1-ésima farmacia (ojo que farmacia i-ésima $\neq$ Farmacia i)
- **Variables de estado**:

$$\overrightarrow{S_i}, \text{ donde:}$$

$$S_{in} = \begin{cases} 1 & \text{Si ya visité la farmacia n} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$F_i = \text{Farmacia donde estoy al comienzo de la etapa i}$$

- **Variables de decisión**:

$$X_i = \text{Farmacia a visitar al final de etapa i}$$

- **Variable aleatoria**:

$$P_n|\overrightarrow{S_i} = P[\text{Probabilidad de que el medicamento se encuentre en la farmacia n,}$$

$$\text{dado que ya visité al conjunto indicado por } S_i]$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Etapa N+1:

$$V^{\star}_{N+1}(\vec{S_{N+1}}, F_{N+1}) = t_{F_{N+1}0}$$

- Etapa i:

$$V_i(\vec{S_i}, F_i, X_i) = t_{F_i X_i} + \tau + P_{X_i}|\vec{S_i} \cdot [t_{X_i 0}] + (1 - P_{X_i}|\vec{S_i}) \cdot [V^\star_{i+1}(\vec{S_{i+1}}, X_i)]$$

Donde:

$$\vec{S_{i+1}} = \vec{S_i} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow x_i\text{-ésima posición}$$

Donde:

$$V^\star_i(\vec{S_i}, F_i) = \max_{X_i \neq n \cdot S_{in}\ \forall n} \left[V_i(\vec{S_i}, F_i, X_i)\right]$$

- **Condiciones de borde**:

$$\begin{aligned} S_{1,n} &= 0\ \forall n \\ F_1 &= 0 \end{aligned}$$

7. *a*) Siguiendo los pasos característicos tendremos:

- **Etapas**: Cada uno de los hoteles.
- **Variable de estado**:

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ya encontré habitación en algún hotel} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable de decisión**:

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{Si entro a preguntar al hotel i-ésimo} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria**:

$$w_i = \begin{cases} 1 & P_i \quad \text{Si hay habitación} \\ 0 & 1 - P_i \quad \text{Si no} \end{cases}$$

- **Condición de borde**:

$$\begin{aligned} V^*_k(1) &= 0 \\ V^*_{N+1}(0) &= K \end{aligned}$$

- **Recurrencia**:

$$V_k(0, q_k) = q_k(Q + P_k \cdot S_k + (1 - P_k) \cdot V^*_{k+1}(0)) + (1 - q_k) \cdot (V^*_{k+1}(0) + C_k)$$

Asumiendo $C_N = 0$. Entonces:

$$V^*_k(0) = \max_{q \in \{0,1\}} V^*(0, q)$$

b) Resolvemos:

- **Etapa 4**:

$$V^*_4(0) = 450$$

- **Etapa 3**:

$$\begin{aligned} V_3^*(0,1) &= 100 + 0{,}4 \cdot 150 + 0{,}6 \cdot 450 = 430 \\ V_3^*(0,0) &= 450 \end{aligned}$$

  Implica que $q_3^* = 1$ y que $V_3^*(0) = 430$
- **Etapa 2**:

$$\begin{aligned} V_2^*(0,1) &= 100 + 0{,}6 \cdot 250 + 0{,}4(100 + 430) = 462 \\ V_2^*(0,0) &= 100 + 430 = 530 \end{aligned}$$

  Implica que $q_2^* = 1$ y que $V_2^*(0) = 462$
- **Etapa 1**:

$$\begin{aligned} V_1^*(0,1) &= 100 + 0{,}8 \cdot 500 + 0{,}2(100 + 462) = 612 \\ V_1^*(0,0) &= 100 + 462 = 562 \end{aligned}$$

  Implica que $q_1^* = 0$ y que $V_1^*(0) = 562$

■ **11.** *a*) Asignamos una ganancia de 1(U.M.) a ganar el punto y 0(U.M.) a perderlo.

- **Etapas**: Cada uno de los saques, a lo más 2 (en esta parte).
- **Variables de estado**:

  No existen variables de estado

- **Variables de decisión**:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si saco fuerte en el i-ésimo servicio} \\ 0 & \text{Si saco suave en el i-ésimo servicio} \end{cases}$$

- **Variable aleatoria**:

$$\begin{aligned} P_H &= P[\text{Meter el saque dentro si saco fuerte}] \\ P_S &= P[\text{Meter el saque dentro si saco suave}] \\ W_H &= P[\text{ganar si meto el saque fuerte}] \\ W_S &= P[\text{ganar si meto el saque suave}] \end{aligned}$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Etapa 3:

$$V_3^\star = 0$$

  - Etapa i:

$$V_i(X_i) = \begin{cases} P_H \cdot W_H + (1 - P_H) \cdot V_{i+1}^\star & \text{Si } X_i = 1 \\ P_H \cdot W_H + (1 - P_H) \cdot V_{i+1}^\star & \sim \end{cases}$$

  Entonces:

$$V_i^\star = \max_{X_i} \left[V_i(X_i) \right]$$

b) Aquí no existe un número finito de etapas (podría llegar a sacar infinitas veces), por lo que el enfoque de programación dinámica falla en este punto. Lo mejor que se puede hacer es encontrar una estrategia de saque y reducir el problema a uno de dos etapas, primer saque y segundo saque.

Para esto veamos que, dado que las probabilidades no dependen del resultado del saque anterior, si el tenista decide sacar fuerte (o suave) en el primer o segundo saque, esa decisión se mantendrá si la pelota pega en la red y cae dentro de la cancha.

- **Etapas**: Cada una de las condiciones de saque.
- **Variables de estado**:

No existen variables de estado

- **Variables de decisión**:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si saco fuerte en el servicio de condición i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria**:

$$\begin{aligned} P_H &= P[\text{Meter el saque dentro si saco fuerte}] \\ P_S &= P[\text{Meter el saque dentro si saco suave}] \\ W_H &= P[\text{ganar si meto el saque fuerte}] \\ W_S &= P[\text{ganar si meto el saque suave}] \\ q_H &= P[\text{pegar en la red si saco fuerte}] \\ q_S &= P[\text{pegar en la red si saco suave}] \end{aligned}$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Etapa 3:

$$V_3^\star = 0$$

  - Etapa i:

$$V_i(X_i) = \begin{cases} P_h^\star \cdot W_H + (1 - P_H^\star) \cdot V_{i+1}^\star & \text{Si } X_i = 1 \\ P_S^\star \cdot W_S + (1 - P_S^\star) \cdot V_{i+1}^\star & \sim \end{cases}$$

  donde:

$$\begin{aligned} P_H^\star &= \sum_{i=0}^{\infty} q_H^i \cdot P_H^{i+1} \cdot (1 - q_H) = \frac{(1 - q_H) \cdot P_H}{1 - P_H \cdot q_H} \\ P_S^\star &= \sum_{i=0}^{\infty} q_S^i \cdot P_S^{i+1} \cdot (1 - q_S) = \frac{(1 - q_S) \cdot P_S}{1 - P_S \cdot q_S} \end{aligned}$$

  Entonces:

$$V_i^\star = \max_{X_i} \left[V_i(X_i) \right]$$

■ **13.** Explicación del problema: Tengo un monto de dinero en el banco, los que me dan una rentabilidad diaria i, sin embargo tengo que tener dinero disponible en la tienda para poder operar. Si me quedo sin efectivo, entonces incurro en costos (s por unidad, los cuales se suman al déficit de la caja de la tienda). Si dejo plata en el banco gano i U.M. por día y cada transacción me cuesta K, por lo que existe un trade-off entre ganar plata por concepto de intereses y tener pérdidas por no contar con el dinero en la tienda.

Es importante notar que la variable aleatoria puede ser negativa como positiva
Entonces:

- **Etapas**: Cada día.
- **Variables de estado**:

$$\begin{aligned} B_i &= \text{Cantidad de dinero que hay en el banco al comienzo del día i} \\ T_i &= \text{Cantidad de dinero en la tienda al comienzo del día i} \end{aligned}$$

- **Variables de decisión**:

$$\begin{aligned} Y_i &= \begin{cases} 1 & \text{Si decido hacer una transacción} \\ 0 & \sim \end{cases} \\ X_i &= \text{Cantidad de dinero que saco (meto) del (en el) banco el día i} \end{aligned}$$

- **Variable aleatoria**:

$$p_{in} = P[\text{Probabilidad que la demanda por dinero el día i sea n(positivo o negativo)}]$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Día N+1:

$$V^\star_{N+1}(E_{N+1}, B_{N+1}) = E_{N+1} + B_{N+1}$$

  - día i:

$$V_i(E_i, B_i, Y_i, X_i) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{E_i}[P_{in}[V^\star_{i+1}(E_i - n, B_i \cdot (1+i))]] + & \text{Si } Y_i = 0 \\ \sum_{E_i}^{\infty}[P_{in}[V^\star_{i+1}(-(n - E_i n) \cdot (1+s), B_i \cdot (1+i))]] & \\ & \\ \sum_{n=-\infty}^{E_i+X_i}[P_{in}[V^\star_{i+1}(E_i + X_i - n, (B_i - K - X_i) \cdot (1+i))]] + & \sim \\ \sum_{E_i+X_i}^{\infty}[P_{in}[V^\star_{i+1}(-(n - E_i n - X_i) \cdot (1+s), & \\ (B_i - K - X_i) \cdot (1+i))]] & \end{cases}$$

Donde:

$$V^\star_i(E_i, B_i) = \max_{\substack{T_i \cdot Y_i < X_i < B_i \cdot Y_i \\ K \cdot Y_i < B_i}} \left[V_i(E_i, B_i, Y_i, X_i)\right]$$

  - **Condiciones de borde**:

$$\begin{aligned} B_0 &= 100000 \\ T_{-T} &= 10000 \end{aligned}$$

■ **14.** Supondremos que cuando el tipo llega a un puesto ve si éste está desocupado o no

- **Etapas**: Cada uno de los puestos de estacionamiento [del -T al T]
- **Variables de estado**:

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el puesto i está vacío} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$V_i =$ el número de estacionamientos vacíos que Ignatius ha dejado pasar (sin contar el i-ésimo)

- **Variables de decisión**:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si decide estacionarse en puesto i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria**:

$$P_{in} = P[\text{Probabilidad de que puesto i esté vacío dado que ya pasaron n puestos vacíos}]$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Etapa T+1:

$$V^\star_{T+1}(D_{T+1}, S_{N+1}) = P_{D_{T+1}}$$

- Etapa i:

$$V_i(D_i,S_i,x_i) = \begin{cases} |i|\cdot X_i + [P_{i+1,D_i+1}\cdot V^\star_{i+1}(D_i+1,1) & \text{Si } S_i = 1 \\ +[1-P_{i+1,D_i+1}]\cdot V^\star_{i+1}(D_i+1,0)]\cdot[1-X_i] & \\ & \\ P_{i+1,D_i}\cdot V^\star_{i+1}(D_i,1) + [1-P_{i+1,D_i}]\cdot V^\star_{i+1}(D_i,0) & \sim \end{cases}$$

Donde:

$$V_i^\star(D_i,S_i) = \max_{X_i<(1-S_i)}\big[V_i(D_i,S_i,X_i)\big]$$

- **Condiciones de borde**:

$$\begin{aligned} S_{-T-1} &= 0 \\ D_{-T} &= 0 \end{aligned}$$

■ **15.** *a*) Supondremos que la partida de los buses es al final de cada minuto, la llegada de pasajeros es al comienzo de cada minuto, y que los buses retornan al comienzo de cada minuto.

- **Etapas**: Cada uno de los minutos (comenzando con el 1).
- **Variables de estado**:

$$\begin{aligned} W_{ik} &= \text{Número de buses que al comienzo del minuto i llevan k minutos desde su salida} \\ B_i &= \text{el número de buses disponibles al comienzo del minuto i} \\ S_i &= \text{el número de pasajeros en la estación al comienzo del minuto i} \end{aligned}$$

- **Variables de decisión**:

$$x_i = \text{el número de buses a despachar al final del minuto i}$$

- **Variable aleatoria**:

$$P_{in} = P[\text{Probabilidad de que al comienzo del minuto i arriben n pasajeros}]$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Etapa T+1:

$$V^\star_{T+1}(S_{T+1},B_{T+1},\vec{W}_{T+1,k}) = -H\cdot S_{T+1}$$

  - Etapa i:

$$\begin{aligned} V_i(S_i,B_i,\vec{W}_i,x_i) &= -F\cdot x_i + \sum_{n=0}^{\infty} P_{in}\cdot[P\cdot \min\{K\cdot x_i, S_i+n\} \\ &\quad -E_i\cdot\max\{S_i+n-K\cdot x_i,0\}] \\ &\quad +\sum_{n=0}^{\infty} P_{in}\cdot[V^\star(\max\{S_i+n-K\cdot x_i,0\},B_i-x_i+w_{i(X-1)},\vec{w}_{i+1})] \end{aligned}$$

  Donde:

$$\begin{aligned} w_{(i+1)0} &= x_i \\ w_{(i+1)k} &= w_{i(k-1)}\ \forall K=1,\ldots,X-1 \end{aligned}$$

  Entonces:

$$V_i^\star(S_i,B_i,\vec{w}_i) = \max_{0\le X_i\le(B_i)}\big[V_i(S_i,B_i,\vec{w}_i,X_i)\big]$$

- Condiciones de borde:

$$S_1 = 0$$
$$B_1 = B$$
$$\vec{w}_1 = \vec{0}$$

b) Ahora necesitaremos mantener información acerca de cuanto tiempo llevan las personas en la estación.

- **Etapas**: Cada uno de los minutos (comenzando con el 1).
- **Variables de estado**:

$$\begin{aligned} W_{ik} &= \text{Número de buses que al comienzo del minuto i llevan k minutos desde su salida} \\ B_i &= \text{el número de buses disponibles al comienzo del minuto i} \\ S_{ik} &= \text{el número de pasajeros al comienzo del minuto i que llevan esperando k minutos} \end{aligned}$$

- **Variables de decisión**:

$$x_i = \text{el número de buses a despachar al final del minuto i}$$

- **Variable aleatoria**:

$$P_{in} = P[\text{Probabilidad de que al comienzo del minuto i arriben n pasajeros}]$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Etapa T+1:

$$V^{\star}_{T+1}(\vec{S}_{T+1}, B_{T+1}, \vec{W}_{T+1,k}) = -H \cdot \sum_{k=1}^{T} S_{(T+1)k}$$

  - Etapa i:

$$\begin{aligned} V_i(\vec{S}_i, B_i, \vec{W}_i, x_i) &= -F \cdot x_i + \sum_{n=0}^{\infty} P_{in} \cdot [P \cdot \text{mín}\{K \cdot x_i, n + \sum_{k=1}^{i-1} S_{ik}\}] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{i-1} [E_{ik} \cdot \text{mín}\{S_{ik}, \text{máx}\{[\sum_{j=k}^{i-1} S_{ij}] - K \cdot x_i, 0\}\}] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} P_{in} \cdot [V^{\star}(\vec{S}_{i+1}, B_i - x_i + w_{i(X-1)}, \vec{w}_{i+1})] \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} S_{(i+1)k} &= \text{mín}\{S_{ik}, \text{máx}\{\sum_{j=k-1}^{i-1} S_{ij} - K \cdot x_i, 0\}\} \\ S_{(i+1)1} &= \text{mín}\{n, \text{máx}\{n + \sum_{j=1}^{i-1} S_{ij} - K \cdot x_i, 0\}\} \\ w_{(i+1)0} &= x_i \\ w_{(i+1)k} &= w_{i(k-1)} \ \forall K = 1, \ldots, X-1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$V^{\star}_i(\vec{S}_i, B_i, \vec{w}_i) = \underset{0 \leq X_i \leq (B_i)}{\text{máx}} \left[V_i(\vec{S}_i, B_i, \vec{w}_i, X_i) \right]$$

- **Condiciones de borde**:

$$\vec{S}_1 = \vec{0}$$
$$B_1 = B$$
$$\vec{w}_1 = \vec{0}$$

■ **16.** *a*) El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .
Respecto a los trade-off existentes, claramente existe uno entre los costos asociados a perder productos debido a la capacidad de la bodega, contrapuesto al costo de no satisfacer la demanda de los clientes. Ademas existe un trade-off entre pedir grandes cantidades, para evitar el costo de poner una orden, y pedir poco, para evitar la pérdida de productos debido a la capacidad de bodega.

b)
- **Etapas**: Cada uno de los meses del horizonte de planificación.
- **Variables de estado**:

$$\begin{aligned} S_i &= \text{Número de productos disponibles al inicio del mes i} \\ \hat{S}_i &= \text{Número de productos que llegarán el próximo mes debido a atraso de órdenes} \end{aligned}$$

- **Variables de decisión**:

$$\begin{aligned} y_i &= \begin{cases} 1 & \text{Si ordeno productos para el próximo mes} \\ 0 & \sim \end{cases} \\ x_i &= \text{Número de productos que ordeno para el próximo mes} \end{aligned}$$

- **Variable aleatoria**:

$$\begin{aligned} p &= P[\text{Una orden se retrase un mes}] \\ q &= P[\text{Un cliente demande una unidad de producto}] \end{aligned}$$

- **Ecuaciones de recurrencia**:
  - Etapa T+1:

$$V^{\star}_{T+1}(S_{T+1}, \hat{S}_{T+1}) = 0$$

  - Etapa i:

$$\begin{aligned} V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i) = \; & \textstyle\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} \Big[P \cdot \text{mín}\{S_i, n\} - i \cdot \text{máx}\{n - S_i, 0\} \\ & (1-p) \cdot [V^{*}_{i+1}(\text{mín}\{L, S_i - \text{mín}\{S_i, n\} + x_i + \hat{S}_i\}, 0)] \\ & p \cdot [V^{*}_{i+1}(\text{mín}\{L, S_i - \text{mín}\{S_i, n\} + \hat{S}_i\}, X_i)] \Big] \\ & -K \cdot y_i - c \cdot x_i \end{aligned}$$

Donde:

$$V^{\star}_i(S_i, \hat{S}_i) = \max_{0 \leq x_i \leq L \cdot y_i} [V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i)]$$

- **Condiciones de borde**:

$$S_1 = S$$
$$\hat{S}_1 = 0$$

c) En este caso se debería incluir una variable de estado que nos indicase cuántos clientes se dejaron insatisfechos en el período anterior. De esta forma, para un período dado y condicionando sobre la demanda realizada, se puede tener el número de clientes insatisfechos durante el período. Con estas cifras se puede calcular la probabilidad de que el número de clientes insatisfechos dos meses continuos sea j, y por lo tanto, se podría modelar la situación e incluir los cambios en las leyes de probabilidades de las demandas período a período.

■ **18.** *a*) Esta es la clásica pregunta de programación dinámica. La respuesta va por el lado de justificar la existencia de decisiones intertemporales, la existencia de variables de estado que resumen la historia hasta un determinado momento y que la decisión en un período sólo depende de ellas y no de la historia, etc.

b) Siguiendo los pasos metodológicos tendremos que:

- **Etapas**: Cada una de las T semanas (supondremos que el show final se realiza en una semana ficticia $T + 1$).

- **Variables de Estado**:

$$\begin{aligned} R_t &= \text{Número de semanas con rutinas repetidas consecutivamente} \\ N_t &= \text{Número ocasiones en las cuales se repiten rutinas en la temporada} \end{aligned}$$

- **Variable de Decisión**:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{Si creo una nueva rutina} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria**: P_n donde n es el número de semanas consecutivas con repeticiones.
- **Recurrencias**: Comencemos con el show final (en la semana ficticia $T + 1$):

$$V^*_{T+1}(R_{T+1}, N_{T+1}) = q_{N_{T+1}} \cdot m \cdot C(T + 1)$$

Para una semana t (supuesto que $p_0 = 0$):

$$V^*_t(R_t, N_t, X_t) = \begin{cases} C(t) + V^*_{t+1}(0, N_t) & \text{Si} \quad X_t = 1 \\ p_{R_t+1} \cdot D(R_t + 1) + V^*_{t+1}(R_t + 1, N_t + 1) & \sim \end{cases} \quad \forall 0 < t < T + 1$$

- **Condiciones de borde**:

$R_1 = N_1 = 0$

c) Ahora necesitamos guardar información acerca del número de reclamos acumulados en una temporada. El modelo quedará de la siguiente forma:

- **Etapas**: Cada una de las T semanas (supondremos que el show final se realiza en una semana ficticia $T + 1$).

- **Variables de Estado**:

$$\begin{aligned} R_t &= \text{Número de semanas con rutinas repetidas consecutivamente} \\ E_t &= \text{Número de ocasiones donde el publico reclamo} \\ N_t &= \text{Número ocasiones en las cuales se repiten rutinas en la temporada} \end{aligned}$$

- **Variable de Decisión**:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{Si creo una nueva rutina} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria**: $P_{\{}n, e\}$ donde n es el número de semanas consecutivas con repeticiones y e es el número de reclamos acumulados.
- **Recurrencias**: Comencemos con el show final (en la semana ficticia $T+1$):

$$V^*_{T+1}(R_{T+1}, E_{T+1}, N_{T+1}) = q_{N_{T+1}} \cdot m \cdot C(T+1)$$

Para una semana t:

$$V^*_t(R_t, N_t, X_t) = \begin{cases} C(t) + p_{\{0,E_t\}} \cdot (D(0) + V^*_{t+1}(0, E_t + 1, N_t)) & \text{Si} \quad X_t = 1 \\ +(1 - p_{\{0,E_t\}})V^*_{t+1}(0, E_t, N_t)) & \\ & \\ p_{\{R_t+1,E_t\}} \cdot (D(R_t + 1) + V^*_{t+1}(R_t + 1, E_t + 1, N_t + 1)) & \sim \\ +(1 - p_{\{R_t+1,E_t\}}) \cdot (V^*_{t+1}(R_t + 1, E_t, N_t + 1)) & \end{cases}$$

- **Condiciones de borde**:

$$R_1 = E_1 = N_1 = 0$$