

## Solución Control 2

Martes 19 de Octubre de 2010

### Problema 1

Una microempresa de arriendo de vehículos tiene un sólo vehículo para el arriendo. La microempresa arrienda el auto por sólo un día, lo entrega en la mañana y lo recibe en la tarde. La probabilidad que un día cualquiera el auto sea arrendado es 0,6, y por lo tanto, es 0,4 la probabilidad que el auto no se arriende un día cualquiera.

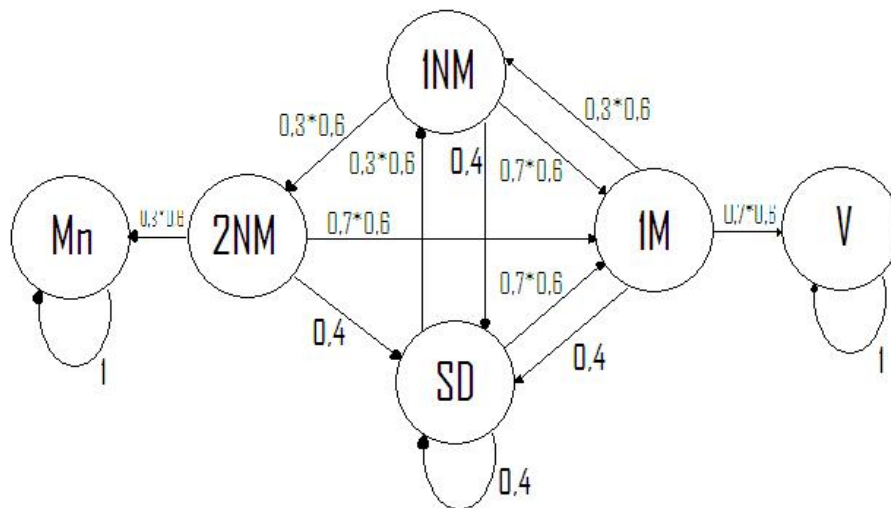
El dueño de la microempresa no está seguro si le conviene seguir en el negocio porque el auto muchas veces lo devuelven con daño que tiene que reparar durante la noche. El dueño estima que la probabilidad que el auto lo devuelvan con daño un día cualquiera es 0,7.

El dueño ha tomado una decisión: si durante 3 días seguidos el auto es arrendado y no es maltratado, entonces él se mantendrá en el negocio. Sin embargo, si durante 2 días seguidos el auto es arrendado y es maltratado entonces él venderá la microempresa. Según cual de estos 2 eventos ocurra primero, será la decisión definitiva que tomará el microempresario con respecto a quedarse con la microempresa o venderla.

- (a) [4 puntos] Construya una cadena de Markov que permita modelar este proceso de toma de decisiones, determinando estados y probabilidades de transición.

### Solución

Una forma de modelar la cadena de Markov es la siguiente:



Los estados de la cadena de Markov son:

**Mn:** mantengo el negocio.

**SD:** día sin demandada.

**1M:** 1 día de maltrato.

1NM: 1 día no matratado.  
 2NM: 2 días no maltratado.  
 V: vendo el negocio.

Las probabilidades de transición de la cadena de Markov son:

$$\begin{aligned}
 P_{Mn-Mn} &= 1 \\
 P_{V-V} &= 1 \\
 P_{SD-SD} &= P_{1MN-SD} = P_{1M-SD} = P_{2MN-SD} = 0,4 \\
 P_{SD-1M} &= P_{1NM-1M} = P_{2NM-1M} = P_{1M-V} = P(\text{demanda y maltratado}) = 0,6 * 0,7 \\
 P_{SD-1NM} &= P_{1M-1NM} = P_{1NM-2NM} = P_{2NM-Mn} = P(\text{demanda y no maltratado}) = 0,6 * 0,3
 \end{aligned}$$

(b) [2 puntos] Clasifique los estados de esta cadena. ¿Es la cadena ergódica, o ergódica más transientes?

### Solución

Vemos que existen tres clases:

- 1) Clase formada por estado Mn: estado recurrente positivo y aperiódico (clase ergódica).
- 2) Clase formada por estados SD, 1M, 1NM, 2N: estados y clase transiente.
- 3) Clase formada por estado V: estado recurrente positivo y aperiódico (clase ergódica)

Como la cadena posee dos clases ergódicas no es posible clasificarla ni como ergódica ni como ergódica más transiente.

## Problema 2

Considere un bar que tiene capacidad para  $N$  clientes. Para simplificar el modelo, vamos a suponer que un cliente se queda en el bar un número entero de horas (1, 2, 3, etc.)

Cada hora que un cliente está en el bar, consume en promedio  $z$  pesos. Cuando un cliente está en el bar, tiene probabilidad  $p$  de quedarse una hora más (y probabilidad  $1 - p$  de irse a la hora siguiente). La conducta de los clientes es independiente entre ellos (si uno decide irse o quedarse no afecta la decisión que toman los otros).

En cada inicio de hora llega un cliente nuevo al bar, quien decide entrar según que tan lleno esté el bar. La probabilidad que el cliente entre es igual a  $\frac{1}{(m+1)}$  donde  $m$  es la cantidad de personas que hay en el bar. Considere que los clientes que deciden retirarse, lo hacen antes que el nuevo cliente decida entrar, aunque todo esto ocurre al inicio de la hora. Notar que si el bar está lleno, el cliente nuevo no podrá entrar aunque decida hacerlo.

Sabemos que el 20% del consumo de los clientes constituye margen operacional que se destina al pago del arriendo del local y a eventuales utilidades.

Usando cadenas de Markov, describa como calcularía el monto máximo que puede pagar por el arriendo de una hora del local en el largo plazo (régimen estacionario). Plantee claramente la cadena de Markov, las variables que necesita utilizar y las ecuaciones que permitan calcular las variables que usa.

### Solución

Cada estado de la cadena representa al número de clientes que hay en el local al inicio de la hora, es decir, los estados son nodos  $n = 1, \dots, N$ . (Es posible modelar la cadena incluyendo al nodo cero). (1 punto)

Las probabilidad de transición son (3 puntos)

$$P_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{i-j+1} p^{j-1} (1-p)^{i-j+1} \frac{1}{j} + \binom{i}{i-j} p^j (1-p)^{i-j} \frac{j}{j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ p^i \cdot \frac{1}{i+1} & \text{si } j = i+1 \leq N \\ 0 & \text{si } i+2 \leq j \leq N \end{cases}$$

Para calcular la probabilidades estacionarias debemos resolver el sistema (1 punto):

$$\sum_{n=1}^N \pi_n = 1$$

$$\sum_{i=1}^N \pi_i P_{ij} = \pi_j : \forall j$$

Finalmente lo máximo a pagar de arriendo por hora de local está dado por (1 punto):

$$0,2 \cdot g = 0,2 \cdot \sum_{n=1}^N \pi_n \cdot (nz)$$

### Problema 3

Una empresa de servicios atiende público desde las 9 am en su sucursal de Santiago centro. En éste servicio se atiende un cliente a la vez y esto toma un tiempo exponencial de media  $\frac{1}{\lambda}$  min. El servicio es muy exitoso por lo que para efectos prácticos podemos asumir que en todo momento hay algún cliente siendo atendido. Por lo tanto el proceso de “salida” de los clientes es un proceso de poisson de tasa  $\lambda$ . Como parte de su estrategia publicitaria la empresa informa que su tiempo de atención promedio es de solo  $\frac{1}{\lambda}$  min.

En su afán por prevenir hechos de publicidad engañosa el sernac decide enviar un fiscalizador que se instala a la salida de la sucursal desde las 9 am. Además de fiscalizar el tiempo promedio, el sernac decide multar a la empresa si observa clientes cuyo tiempo de atención supera el doble del tiempo esperado.

- (a) [1.5 puntos] ¿Cuál es el número esperado de clientes que serán atendidos antes de que el fiscalizador observe uno cuyo tiempo de atención fue mayor a  $\frac{2}{\lambda}$  min?

*Solución*

Para mayor simplicidad en la notación, definamos A como el evento en el que el cliente que demora más de más de  $\frac{2}{\lambda}$  min en ser atendido es observado luego de n personas.

$$\begin{aligned} E[\text{clientes atendidos antes}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{clientes atendidos antes}|A] \cdot P[A] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P[X_1 \leq \frac{2}{\lambda}]^n \cdot P[X_{n+1} > \frac{2}{\lambda}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot [1 - e^{-\lambda \cdot \frac{2}{\lambda}}]^n \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{2}{\lambda}} \\ &= e^{-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot [1 - e^{-2}]^n \\ &= e^{-2} \cdot \frac{1-e^{-2}}{e^{-4}} \\ &= \frac{1-e^{-2}}{e^{-2}} \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

- (b) [1.5 puntos] ¿Cuál es el tiempo esperado que pasará antes de que el fiscalizador observe un cliente cuyo tiempo de atención fue mayor a  $\frac{2}{\lambda}$  min ?

### Solución

$$\begin{aligned} & E[\text{tiempo de observación}] \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{tiempo de observación} | A] \cdot P[A] \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} [n \cdot E[\text{tiempo un cliente} | \text{llegó antes de } \frac{2}{\lambda}] + E[\text{tiempo un cliente} | \text{llegó después de } \frac{2}{\lambda}]] \cdot P[X_1 \leq \frac{2}{\lambda}]^n P[X_{n+1} > \frac{2}{\lambda}] \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} [n \cdot \frac{\int_0^{\frac{2}{\lambda}} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx}{\int_0^{\frac{2}{\lambda}} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx} + \frac{\int_{\frac{2}{\lambda}}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx}{\int_{\frac{2}{\lambda}}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx}] \cdot [1 - e^{-\lambda \cdot \frac{2}{\lambda}}]^n \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{2}{\lambda}} \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} [n \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1} + \frac{3}{\lambda}] \cdot (1 - e^{-2})^n \cdot e^{-2} \\ = & \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} [n \cdot (1 - e^{-2})^n \cdot e^{-2}] + \frac{3}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - e^{-2})^n \cdot e^{-2}] \\ = & \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1} \cdot (e^2 - 1) + \frac{3}{\lambda} \\ = & \frac{e^2}{\lambda} \end{aligned}$$

El sernac estima que es demasiado costoso mantener un fiscalizador de punto fijo en la sucursal por lo que decide enviar un fiscalizador que llega de sorpresa a la sucursal, espera que termine la atención del cliente que está siendo atendido, y lo entrevista preguntándole el tiempo que tomó la atención.

- (c) [1.5 puntos] Intuitivamente ¿Cómo se compara el valor esperado del tiempo que observa el fiscalizador con el tiempo esperado de servicio  $\frac{1}{\lambda}$  min ? ¿Es mayor? ¿Menor? ¿Igual? Explique su razonamiento.

### Solución

Como el fiscalizador llega aleatoriamente es más probable que llegue en el momento que un cliente esté recibiendo una atención “lenta”, por lo que se esperaría que el tiempo observado por el fiscalizador sea mayor que  $\frac{1}{\lambda}$  min

- (d) [1.5 puntos] Calcule ahora el tiempo esperado que debería observar el fiscalizador.

### Solución

Sea  $t$  el instante en que el fiscalizador llega a la empresa de servicio. El instante inicial corresponde a las 9 am.

$$\begin{aligned} & E[\text{tiempo preguntado} | \text{llega en } t] \\ = & E[S_{N(t)+1} - t] + E[t - S_{N(t)}] \\ = & \frac{1}{\lambda} + E[t - S_{N(t)}] \\ = & \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} E[t - S_{N(t)} | N(t) = k] \cdot P[N(t) = k] \\ = & \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t}{k+1} \cdot \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \\ = & \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1} e^{-\lambda t}}{(k+1)!} \\ = & \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} ((\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{(k)!}) - 1) \\ = & \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \\ = & \frac{2}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \end{aligned}$$