INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso : IN4302
Semestre : Primavera 2010
Profesor : Arturo Cifuentes O.
Auxiliares : Sebastián Gutiérrez L.
Daniel Torres S.

Auxiliar N°3

Problema 1

Suponga un mercado en el que se transan dos activos: activo A y activo B. Suponga además que ambos activos tienen correlación distinta de cero.

1) Demuestre que la cartera de mínima varianza cumple con que

$$w_A = \frac{\sigma_b^2 - \sigma_{ab}}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ab}}$$

Ahora, considere que los activos tienen los siguientes retornos y volatilidades:

	Activo A	Activo B
Retorno	8%	12%

	A	B
A	0.15^2	-0.03
B	-0.03	0.2^2

2) Calcule la rentabilidad de la cartera de mínima varianza y su volatilidad. Indique además, el coeficiente de correlación entre A y B

Problema 2

Demuestre que en un mercado donde se transan N activos, si se tiene una cartera donde se invierte 1/N en cada activo, su riesgo está acotado por la covarianza promedio de los instrumentos. Interprete este resultado

Problema 3

a) Sea $w_m = w_{\min - \mathrm{var}}$ el vector de pesos de un conjunto de activos riesgosos correspondiente al punto de mínima varianza. Sea w_τ el vector de pesos de cualquier otro portafolio en la frontera eficiente para este conjunto de activos. Defina además r_m y r_τ los retornos correspondientes.

i. Existe una fórmula de la forma

$$\sigma_{m\tau} = A\sigma_m^2$$

, con $\sigma_{m\tau} = cov(r_m, r_\tau)$ y $\sigma_m^2 = var(r_m)$. Encuentre A.

ii. Correspondiendo al portafolio w_τ, existe un portafolio w_z en el set de mínima varianza (no necesariamente la frontera) que tiene un beta nulo con respecto a w_τ: esto es, $\sigma_{z\tau} = 0$. Este portafolio puede expresarse como $w_z = (1-\alpha)w_m + \alpha w_\tau$. Encuentre el valor de α.

Problema 4

Dado los siguientes datos:

			Matriz Corr		
Activo	Retorno	Volatilidad	A	B	C
A	11%	20%	1	0,8	0,4
B	14%	30%	0,8	1	0,3
C	13%	25%	0,4	0,3	1

a) Calcule el retorno y varianza de la cartera formada por 25% activo A, 25% activo B y 50% activo C.

b) Calcule la cartera de mínima varianza, su deviación estándar y su retorno.

c) Le piden crear una cartera con los activos A, B y C, siendo una de las restricciones que el activo B pese exactamente un 15% en su cartera y ésta que tenga la menor volatilidad posible. ¿Cuál sería su propuesta de cartera? Indique la volatilidad y retorno esperado. ¿Era esperable la diferencia de la volatilidad de esta cartera con la obtenida en la parte b)? ¿Por qué?

d) Suponga usted que quiere invertir en una cartera con riesgo igual a 21%, compuesta solamente por activos del tipo A y C. ¿Cuál sería dicha cartera? Indique el retorno esperado.

Calcule los w correspondientes para una cartera que posee un retorno esperado igual a 12,5% utilizando sólo los activos B y C. Interprete el resultado.

Pauta Auxiliar N°3

Pregunta 1

b) Como $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$, se calcula que $\rho_{AB} = -1$. En este caso, sabemos que para el punto de mínima varianza es cero, es decir, $\sigma_{cartera} = 0$.

Utilizando la ecuación demostrada en a), se obtiene que

$$w_A = 57{,}1\%$$
$$w_B = 42{,}9\%$$

Así, la rentabilidad es

$$E(r) = 57{,}1\% \cdot 8\% + 42{,}9\% * 12\%$$
$$E(r) = 9{,}7\%$$

Pregunta 2

Si se construye una cartera con N activos, donde se invierte $\frac{1}{N}$ en cada activo, la varianza de la cartera queda dada por:

$$\sigma_c^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j = (\frac{1}{N})^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + (\frac{1}{N})^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} (\forall i \neq j)$$

$$= (\frac{1}{N})^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \frac{1}{N^2}(N^2 - N) COVprom$$

Luego, si N es grande, $\sigma_c^2 \to COVprom$

Pregunta 3

a)

i. Tenemos que

$$\sigma_\alpha^2 = (1-\alpha)^2 \sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{\tau m} + \alpha^2 \sigma_\tau^2$$

, y como σ_m es la varianza del portafolio de mínima varianza,

$$0 = \left(\frac{d\sigma_\alpha^2}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}$$
$$0 = 2(\alpha_{\tau m} - \sigma_m^2)$$

Por tanto, $A = 1$.

ii. Basta con resolver $0 = cov(w_z, w_\tau)$ para α para obtener $\alpha = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_\tau^2 - \sigma_m^2}$

Pregunta 4

Pauta:

a)

$$r_e = 0.25 * 11\% + 0.25 * 14\% + 0.5 * 13\% = 12{,}75\%$$

$$\sigma_e^2 = \quad 0.25^2 \cdot 0.2^2 + 0.25^2 \cdot 0.3^2 + 0.5^2 \cdot 0.25^2 + 2 \ \cdot 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.3$$
$$+2 \cdot 0.25 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.25 = 4.04\%$$
$$\sigma_e = 20.09\%$$

b)

$$\min_{w} \quad w'\Sigma w = \min_{w} \sigma_e^2$$
$$st: \quad w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

Sea

$$w_1 = 1 - w_2 - w_3 \qquad (1)$$
$$\min_{w_2, w_3} \sigma_1^2 (1 - w_2 - w_3)^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + \sigma_3^2 w_3^2 + 2 \cdot (1 - w_2 - w_3) w_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2$$
$$+2 \cdot (1 - w_2 - w_3) w_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2 w_2 w_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3$$

FOC:

$$\frac{d(\sigma_e^2)}{d\, w_2} = 0.068 \cdot w_2 - 0.011 \cdot w_3 + 0.016 = 0 \ \ (2)$$

$$\frac{d(\sigma_e^2)}{d\, w_3} = 0.125 \cdot w_3 - 0.011 \cdot w_2 - 0.04 = 0 \ \ (3)$$

Utilizando (2) y (3) se obtiene $w_2 = -0.186$, $w_3 = 0{,}309$, luego reemplazando en (1) $w_1 = 0.877$

$$r_e = 11.06\%$$
$$\sigma_e = 18.01\%$$

c) Sabe que $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ y que además le imponen que $w_b = 0.15$ entonces tendrá:

$$w_1 + 0.35 + w_3 = 1 => w_1 = 0.85 - w_3$$

Análogo a la parte b) se minimiza la varianza

$$\sigma_e^2 = \sigma_1^2 (0.85 - w_3)^2 + \sigma_2^2 0.15^2 + \sigma_3^2 w_3 + 2(0.85 - w_3) \cdot 0.15 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2$$
$$+2(0.85 - w_3) w_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2 \cdot 0.15 \cdot w_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3$$

$$\min_{w_3} \sigma_e^2$$

FOC:

$$\frac{d(\sigma_e^2)}{d\,w_3} = 0.125w_3^2 - 0.04165 = 0$$

$$w_3 = 0.3332$$

$$w_1 = 0.85 - 0.3332 = 0.5168$$

$$r_e = 11\% * 0.5168 + 14\% * 0.35 + 13\% * 0.3332 = 12.116\%$$

$$\sigma_e = 19.03\%$$

d)

$$0.21^2 = w^2 \cdot \sigma_a^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_c^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \rho_{a,c}\sigma_a\sigma_c$$

Dado que se tendrán dos resultados de w (dado que en la frontera eficiente existen 2 puntos con volatilidad igual a 0.21) se utiliza el que maximiza los retornos. Por lo que $w = 0{,}27 => (1-w) = 0.73$ lo que da un retorno de

$$r_e = 0.27 * 11\% + 0.73 * 13\% = 12.46\%$$

e)

$$0.125 = w_b \cdot 0.11 + (1 - w_b) \cdot 0.13$$

$$w_b = -0.5 => w_c = 1 - w_b = 1{,}5$$

Para obtener un retorno esperado igual a 12.5% se debe realizar una venta corta del activo B, lo que se refleja en el signo de w_b