DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor: Fernando Ordóñez P.
Semestre: Primavera 2009
Fecha: 4 de Septiembre de 2009

IN47B Ingeniería de Operaciones
Control N$^{\underline{o}}$1

Problema 1 (50 %)

1. (0,5 pts) ¿Que puede hacer para que los resultados de un modelo de simulación no esten influenciados por las condiciones iniciales?
   Sol: cualquiera de lo sgte puede ser:
   - Descartar los datos generados durante el comienzo de la simulación.
   - Seleccionar condiciones de inicio que minimicen la duración del período transiente.
   - Hacier simulaciones de horizonte largos para que el efecto del período transiente sea despreciable en promedio.
2. Dado un numero v, considere el problema de encontrar su posición en una lista de n numeros ordenados, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.
   a) (0,3 + 0,1 pts) ¿Cual es el tamaño de una instancia? Describa un algoritmo que tiene complejidad de peor caso lineal en el tamaño de la instancia.
   Sol: El tamaño esta dado por n (tambien se puede incluir $A = \max_{i=1\dots n} a_i$, o $\log A$ si el tamaño de los numeros es important)
   Un algoritmo que se demora lineal es: Sea $i = 1$ comparar v con $a?i$ si es igual parar, si no, $i \leftarrow i+1$ y repetir. En el peor caso, cuando $v = a_n$, esto se demora $O(n)$ operaciones.
   b) (0,5 + 0,2 pts) Mejoremos esto. Considere el siguiente algoritmo de busqueda binaria:
   Cuantas operaciones se demora el algoritmo de busqueda binaria en el peor caso. Use notación $O(\cdot)$.
   Sol: Antes del while hay un numero constantes de operaciones. Cada vez que se ejecuta el while hay a lo mas 4 comparaciones, cuatro asignaciones, una suma y una division. Concluimos que el numero de operaciones es una constante por el numero de veces que se ejecuta el while.

Algorithm 1 BUSQUEDA BINARIA

$L \leftarrow 1, U \leftarrow n$, y $v_L \leftarrow a_1, v_U \leftarrow a_n$
if $v = v_L$ **then** $U \leftarrow L$, index $\leftarrow L$
if $v = v_U$ **then** $L \leftarrow U$, index $\leftarrow U$
while $L < U$ **do**
  $M \leftarrow (L+U)/2$
  case v
    $< a_{\lfloor M \rfloor}$ **then** $U \leftarrow \lfloor M \rfloor$
    $= a_{\lfloor M \rfloor}$ **then** $U \leftarrow \lfloor M \rfloor, L \leftarrow U$, index $\leftarrow L$
    $= a_{\lceil M \rceil}$ **then** $U \leftarrow \lceil M \rceil, L \leftarrow U$, index $\leftarrow L$
    $> a_{\lceil M \rceil}$ **then** $L \leftarrow \lceil M \rceil$
  end case
end while
return index

El while se ejecuta desde que $U-L = n-1$ hasta que $U-L = 0$. En cada iteracion el $U-L$ se divide por dos. Por lo que despues de k iteraciones del while tenemos que $U-L = \frac{n-1}{2^k}$. Como la ultima iteración es cuando $1 = U-L = \frac{n-1}{2^k}$, tenemos con a lo mas $k = \lceil \log_2(n) \rceil \geq \log_2(n-1)$ el intervalo tiene ancho 1. Por lo tanto el numero de operaciones es $O(\log n)$.

c) (0,2 +0,2 pts) Encuentre una instancia que muestre que la cota superior en el numero de operaciones no puede ser mejorada.
Sol: Una instancia en que se demoraria $\Omega(\log n)$ es cuando $v = a_{n-1}$. En este caso v siempre estara en el intervalo mayor, de la derecha. El intervalo en la iteración k algo como $[\frac{1}{2^k} + \frac{2^k-1}{2^k}n, n]$. Esto termina cuando la cota inferior sea $= n-1$ lo que implica que $\frac{n-1}{2^k} = 1$.

3. (BONUS 0,5 pts) Ordene en términos de crecimiento asintótico las siguientes funciones (i.e. ordene según notación $O(\,)$). $n^{n^{-1}}$, $\log((n!)^{4/3})$, $2^{\log n}$, $\log(\log(n))$, $n^{\log(n)}$, 1.
Sol: como $n^{n^{-1}} \to 1^+$ y el resto de las expresiones no constantes tenemos que $1 \leq n^{n^{-1}} \leq$ el resto. Para el resto podemos mostrar que $n \leq 10 + \sum_{i=1}^{n} \log(i) = 10 + \log(n!)$ ya que para $i > 10$ tenemos que $\log(i) \geq 1$. Esto la igualdad $2^{\log n} = n^{\log 2}$ y el hecho que $0 < \log 2 < 1$ implican

$$1 \leq n^{n^{-1}} \leq \log(\log(n)) \leq 2^{\log n} = n^{\log 2} \leq n \leq \log((n!)^{4/3}) \leq n^{\log(n)}$$

4. (0,5 pts) Suponga que quedan 3 asientos disponibles en un vuelo que pueden venderse a precio completo (US$1.000) o en oferta (US$400). Suponga además que la probabilidad que lleguen 0, 1, o 2 clientes que compran a precio completo es 0.1, 0.25, y 0.35, respectivamente. En este momento llega una persona a comprar el pasaje en oferta. Utilice la regla de Littlewood para decidir si se le vende el pasaje o no.
Sol: Vendemos el pasaje barato segun Littlewood si $400 \geq 1000P$(vendemos mas de 2 caros) esta probabilidad es = 1 - prob(0 clientes) - prob(1 cliente) - prob(2 clientes) = 1- 0.1 -0.25 - 0.35 = 0.3. Como $400 \geq 1000 * 0{,}3 = 300$ se vende el pasaje con descuenteo.

5. (0,5 pts) ¿Que difficultades se enfrenta cuando uno trata de implementar la regla de

Littlewood en la práctica?
Sol: algunos temas son

- un tema es el ser capaz de estimar la Prob(no clientes caro ¿capacidad).
- se supone ademas que los clientes baratos aparecen antes que los clientes caros
- fuga de clientes. Es dificil descubrir que tipo de cliente entro a la tienda y alguien dispuesto a pagar caro puede estar feliz pagando menos.

Problema 2 (50 %)

Suponga que esta encargado de la producción del Producto GEnérico Tipo A (P-GETA) en su empresa. Suponga además que su capacidad de producción de P-GETA en una semana esta acotada por K y puede almacenar hasta H unidades del producto. Lo que decide producir en una semana está disponible al comenzar la semana siguiente. Es posible también subcontratar capacidad de producción y almacenaje adicional (que viene en multiples de K y H respectivamente) en cada semana pagando un costo fijo. El tiempo entre llegadas de clientes sigue una distribución exponencial con promedio entre llegadas de 15 minutos. Cada cliente compra un P-GETA. Este tiempo esperado entre clientes se reduce un 10 % durante los meses de verano.

Suponga conocidos los valores de costos de producción, inventarios, y quiebre de stock (por unidad de capacidad y tiempo) y los costos fijos de aumento de capacidad en cada semana. Se desea evaluar el impacto de políticas de producción e inventario mediante el uso de modelos de simulación. Considere la siguiente politica: al comienzo de la semana se programa la producción para producir el valor esperado semanal del proximo mes de demanda menos el stock actual en inventario. Se subcontratan la producción necesaria para producir esto en una semana. Si el stock durante la semana supera las bodegas disponibles se contratan bodegas adicionales por toda la semana en curso.

1. (1,5 pts) Simulación
   a) Explique que horizonte de planificación es necesario y como avanza el tiempo en la simulación. Justifique su respuesta.
   Sol: Uno determina el horizonte de planificacion de manera que
   - se pueda observar el impacto de las decisiones que se toman
   - los resultados no dependan de las condiciones iniciales
   - incluya varias tiradas de la incertidumbre y decisiones para que un analisis de valor esperado tenga sentido

   Se toman decisiones al menos cada semana, a veces mas frequentemente y llegan decenas de clientes al dia. Esto sugiere que es necesario al menos un par de meses para que no dependa solo de unas decisiones. Dependiendo de los parametros del problema es posible que las condiciones iniciales (nivel de inventario inicial, demanda primera semana) condicionen la produccion por varias semanas, por lo que el horizonte debe ser mayor que un mes. Ademas dependiendo de que tan cerca se esta del comienzo o fin del verano es posible que un horizonte de 2 o 3 meses incluya parte del periodo de ajuste producto del cambio en demanda. Lo recomendable es un horizonte de tri/semestre si se toma cuidado de considerar un tipo de demanda o todo el cambio y no quedarse con una gran parte de los resultados influenciados por el transiente. Otra alternativa es considerar al menos un año de manera de incluir completamente la variacion en la demanda y poder en los resultados analizar el impacto de esta variacion.

Dado que los clientes llegan de forma aleatoria, esto sugiere avanzar el tiempo de forma variable, es decir, se incremente el reloj de la simulacion cada vez que ocurra un evento.

El reloj aumenta en el tiempo que se demora en llegar el siguente cliente o el momento en que emipeza la siguiente semana. Lo que ocurra primero.

b) ¿Cuales son las variables de estado y eventos de esta simulación?

Sol: Variables de estado son al menos: El nivel de inventario, el numero de maquinas produciendo y numero de bodegas utilizadas. Ademas se pueden considerar el tiempo, los estadisticos de interes, como el costo, numero de quiebres de stock, etc.

Los Eventos son:

- Llegada de un cliente (despues de lo cual se debe reducir el inventario o aumentar el quiebre de stock, incrementar el reloj, actualizar los costos de operacion.),
- comienzo de una semana. 1. se incrementa el stock con lo producido la semana anterior contratando bodegas adicionales por una semana si es necesario. 2. se determina lo que se debe producir calculando el promedio semanal de la demanda para el proximo mes y restandole el inventrio o sumando el quiebre de stock que quede luego de satisfacer la demanda esperada de esta semana. 3. se decide si se contrata mas produccion o no, se decide cuanto se produce esa semana. 4. se actualizan las variables de estado y costos operativos.

c) ¿Que estadisticos usaría para evaluar distintas políticas? Describa y justifique al menos dos valores de interes.

Sol: Un estadistico de interes es el costo de operacion total. Esto incluye costos de inventario, produccion, quiebre de stock y los costos fijos de contratar mas produccion o bodega. Otro estadistico puede ser el desgloce de estos costos o por periodo del año (ya que hay diferencias estacionales) o por tipo de costo (ya que la valoracion del quiebre de stock por ejemplo puede ser errada o desconocida). Otro estadistico seria el numero de veces que se cambia produccion o bodega, ya que es mas eficiente poder contratar maquinas por algun periodo mas grande (con posibles rebajas de precio) que contratar una semana, no contratar la semana siguiente, y volver a contratar despues.

2. (0,7 pts) Explique como puede usar el método de reducción de varianza que considera una variable de control en este problema.

Sol: El metodo con variable de control supone conocida una variable aleatoria Z, correlacionada con el estadistico de interes X, y a la que se le conoce el promedio. El estadistico que se utiliza es $X_c = X + c(Z - E(Z))$ con $c = -\mathrm{COV}(X,Z)/V(Z)$.
Supongamos que queremos estimar X el costo total de opracion. En este problema se puede usar la variable de tiempo entre llegadas como Z que tiene esperanza conocida y es intuitivamente correlacionada con el costo de operacion.
se deben hacer algunas corrida piloto para determinar estimadores de $\mathrm{COV}(X,Z)$ y $V(Z)$. Una ves estimado c se hace la corrida final para obtener un intervalo de confianza de $E(X)$.

3. (0,8 pts) Describa que supuestos adicionales serian necesarios para representar este problema como un problema de optimización y contraste las fortalezas y debilidades de los dos metodos (simulación y optimización) para este problema.
   Sol: Principalmente la modelacion de la demanda incierta debe cambiar. Un problema de optimizacion tendria muchas dificultades considerando el tiempo de llegada entre un numero variable de clientes. Una forma sencilla seria suponiendo que hay una demanda semanal, que puede ser incierta pero que se manifiesta en un instante. Asi, tendriamos un set de variables por semana. Con esto, y modificando los coeficientes para incluir el periodo semanal se obtiene las mismas funciones de costo y de balance de inventario y demanda. La incertidumbre se puede representar mediante escenarios adonde el proposito de la optimizacion seria encontrar la forma de producir que minimize los costos promedio. La forma de tomar la decision de produccion no se basa en una politica si no que depende de los datos y representacion de la incertidumbre.
   Un modelo de optimizacion como este permitiria encontrar mas facilmente las mejores politicas de produccion. Como ya no esta limitado a producir para satisfacer un promedio estimado, considera alternativas mas flexibles para decidir la produccion. Una simulacion por ejemplo tendria que probar distintas estrategias, nunca estando seguro si se considero la mejor.
   Una deficiencia de optimizacion es que la solucion puede no tener una regla o comportamiento se sea facilmente explicable. Otro problema es que puede ser mas dificil resolver problemas de optimizacion, en particular si se consideran variables enteras.
4. (BONUS 0,5 ptos) De acuerdo a la charla realizada el martes pasado sobre el CERET. Describa brevemente dos ejemplos de projectos de investigación realizados al alero del CERET. Indique el problema y la metodologia usada. (5 lineas máximo por cada una).