Auxiliar 1 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 20 de Agosto, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Considere una sucesión $(u_n)_n$ que verifica las siguientes propiedades:

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = l \qquad \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$$

a) Pruebe que: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall k \geq k_0, k \text{ par} \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon$

b) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = l$, y deduzca que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_1 \in \mathbb{N},\ \ \forall k \geq k_1, k \text{ impar} \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon$$

c) Concluya que $\lim_{k\to\infty} u_k = l$

Pregunta 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $[a, b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$. Demuestre que $\exists \bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = l$

Pregunta 3. Probaremos que, dadas F, G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$ entonces $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ F(x) < G(x)$. Para ello:

a) Pruebe la propiedad cuando $F \equiv 0$.

b) Definiendo una función continua apropiada y usando la parte anterior concluya.

Pregunta 4. Considere la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta (1 - e^x) \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Justifique porque f es continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall \beta \in \mathbb{R}$

b) Pruebe que si $\beta > -1$, entonces f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

c) Para $\beta = -1$, utilice la sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ para probar que f no es continua en $x = 0$. Justifique.

Pregunta 5. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $r_n > 0$ una sucesión tal que $r_n \to 0$. Pruebe que f es continua en $\bar{x}$ si y solo si la sucesión:

$$s_n := \sup_x \{|f(x) - f(\bar{x})| : |x - \bar{x}| \leq r_n\}$$

converge a cero.

Pregunta 6.

a) Sean $f, g : [a, b] \to [a, b]$ funciones continuas y sobreyectivas. Demuestre que $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$. Concluya que la existencia de puntos fijos para f es decir, que existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

b) Sean f, g funciones continuas en $[a, b]$ con $a < b$, tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x - a)^n$ y $g(x) = -(b - x)^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$