Auxiliar 2: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor de Cátedra: Leonardo Sanchez C.
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Matias Godoy Campbell
Viernes 27 de Agosto de 2010

P1. *a*) Sean $f, g : [a, b] \to [a, b]$ funciones continuas y sobreyectivas. Demuestre que $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$. Concluya que la existencia de puntos fijos para f es decir, que existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

b) Sean f, g funciones continuas en $[a, b]$ con $a < b$, tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x - a)^n$ y $g(x) = -(b - x)^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$

P2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\big(\forall x \in \mathbb{R}\big) f(x) \geq |x|$.

a) Sea $I = [-f(0), f(0)]$. Demuestre que $\big(\forall x \in \mathbb{R} \backslash I\big) f(x) > f(0)$

b) Demuestre que f posee un mínimo global en $\mathbb{R}$.

P3. *a*) Sea f una función derivable en x_0. Calcule en función de $f'(x_0)$, α y β el valor de

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h}.$$

b) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} x^x$$

P4. Considere la función $f : (-1, 1) \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\ln(1 - x)}{\ln(1 + x)}$$

a) Calcule $\lim f(x)$ cuando $x \to -1^+$ y $x \to 1^-$.

b) Pruebe que el valor $f(0) = -1$ repara la continuidad de f en $x = 0$.

c) Calcule f' para $x \neq 0$.

d) Calcule por definición $f'(0)$.