Auxiliar 3: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor de Cátedra: Leonardo Sanchez C.
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Matias Godoy Campbell
Viernes 03 de Septiembre de 2010

P1. Un conductor demora 5 horas en recorrer 500 kilómetros entre Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje de una longitud de 100 kilómetros que es recorrido en exactamente una hora.

P2. Se define la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{\sinh(x)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Sabiendo que f es diferenciable en 0 y que g es una función tres veces diferenciable en 0, se pide determinar el valor $g(0)$ y los valores de a y $f'(0)$ en función de $g'(0)$ y $g''(0)$.

P3. Encuentre la derivada de la función $f(x) = \arcsin(2x-1) + 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)$, y pruebe que f es constante en el intervalo $(0,1)$.

P4. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $f(0) = g(0) = 1$ y además

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}\big) \qquad f'(x) = -xf(x) \quad \wedge \quad g'(x) = xg(x)$$

i) Pruebe que la función $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $\big(\forall x \in \mathbb{R}\big) f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$.
ii) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de la función f.
iii) Calcule f'' en función de f. Estudie convexidad y concavidad de f.
iv) Demuestre que $\big(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\big)\big(\exists \xi \text{ entre } 0 \text{ y } x\big)\ f(x) = -f''(\xi)$.
v) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.
vi) Deduzca que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
Bosqueje un gráfico de f.

P5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}$, se define

$$g(t) = f(t) + f'(t) \cdot (a + h - t)$$

Probar que $\big(\exists c \in (a, a+h)\big)\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + hf''(c)(a+h-c)$.

P6. Estudiar completamente la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$$

Determinando ceros, continuidad, diferenciabilidad, puntos críticos, crecimiento, máximos, mínimos, puntos de inflexión, convexidad y concavidad, asíntotas, recorrido y gráfico.

Autor: Orlando Rivera Letelier
orlando@dim.uchile.cl

P3 Empecemos calculando las derivadas de las funciones arcsin y arctan. (aunque son conocidas y deberían ser sabidas de memoria, esto nos servirá para repasar el calculo de la derivada de la inversa de una función).

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Derivando la identidad $\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1]$

$$\Rightarrow \sin'(\arcsin(x)) \cdot \arcsin'(x) = 1 \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Pero $\cos^2(\arcsin(x)) + \overbrace{\sin^2(\arcsin(x))}^{x^2} = 1$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Y como $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\arcsin(x)) \geq 0$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Derivando la identidad $\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \tan'(\arctan(x)) \cdot \arctan'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \sec^2(\arctan(x)) \cdot \arctan'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \arctan'(x) = \cos^2(\arctan(x)) \qquad \text{Pues } \cos(x) = \frac{1}{\sec(x)}$$

Pero $\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x)) = 1$

$$\Rightarrow \cos^2(\arctan(x)) + \frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))} \cdot \cos^2(\arctan(x)) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2(\arctan(x)) + \underbrace{\tan^2(\arctan(x))}_{x^2} \cdot \cos^2(\arctan(x)) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Volviendo al problema, observemos que para que la función f esté definida, se debe tener que

$$2x-1 \in [-1,1] \quad \wedge \quad \frac{1-x}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [0,1] \quad \wedge \quad x \in \left(\left(-\infty, 1\right] \cap (0,\infty)\right) \cup \left((-\infty,0) \cap [1,+\infty)\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in (0,1]$$

Luego, f' está definida para $x \in (0,1)$.

$$f(x) = \arcsin(2x-1) + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \arcsin'(2x-1)\cdot 2 + 2\arctan'\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)'$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + \frac{\cancel{2}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{x}}^{\,2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \cdot \frac{(-1)\cdot x-(1-x)\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} + \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\frac{1-x}{x}\right)\cdot x^2\cdot\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{\sqrt{x}}{(\underbrace{x^2+x-x^2}_{x})\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 0$$

Es decir, $(\forall x \in (0,1))\ f'(x)=0$. $\Rightarrow$ f es constante en $(0,1)$.

$\square$

P3,3/3

Auxiliar 3, MA1002-5, Primavera 2010
Cálculo Diferencial e Integral

Autor: Orlando Rivera Letelier
orlando@dim.uchile.cl

P4 i) Para ver que $f\cdot g$ es constante, basta probar que su derivada es nula (ya que es una función derivable por ser producto de funciones derivables).

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$= -xf(x)g(x) + f(x)\cdot xg(x) = 0$$

Luego $f\cdot g$ es constante, y como $f(0)=1$, $g(0)=1$, la función $f\cdot g$ es constante igual a 1.

$(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)\cdot g(x) = 1.$

Si se tuviera que $f(\bar{x})\leq 0$, por TVI (f es derivable, luego continua), como $f(0)\cdot f(\bar{x})\leq 0$, se tendrá que $(\exists c\in[0,\bar{x}])\ f(c)=0$

→ este puede ser $[\bar{x},0]$ si es que $\bar{x}<0$, pero da lo mismo.

$\Rightarrow \overbrace{f(c)}^{0}\cdot g(c)=0$

Pero $f(c)\cdot g(c)=1$ por lo visto antes $\longrightarrow$ ※

$\Rightarrow f(x)>0\ (\forall x\in\mathbb{R})$ Análogo con g.

iii) $f''(x) = -f(x) - x \cdot f'(x) = -f(x) - x(\ x f(x)) = (x^2-1) f(x)$

Luego, $f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ = 0 & \text{si } x \in \{-1, 1\} \\ < 0 & \text{si } x \in (-1, 1) \end{cases}$

Por lo tanto f es convexa en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ y es cóncava en $(-1, 1)$.

iv) Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por TVM aplicado al intervalo $[0, x]$ (en rigor, si $x<0$ debemos usar el intervalo $[x, 0]$), donde f' es continua y derivable, se tiene que

$$(\exists \xi \in (0,x)) \quad f'(x) - f'(0) = f''(\xi)(x-0)$$

$$\Rightarrow (\exists \xi \in (0,x)) \quad -x f(x) - 0 \cdot f(0) = f''(\xi) \cdot x$$

$$\Rightarrow (\exists \xi \in (0,x)) \quad f(x) = -f''(\xi)$$

$\square$

v) Para ver el crecimiento de f', basta estudiar los signos de f'', luego f' es creciente en $(-\infty, -1]$, después es decreciente en $(-1, 1)$, y creciente nuevamente en $(1, +\infty)$.

P4, 2/5

$\Rightarrow (\forall x \in (-\infty, 1]) \; f'(x) \leq f'(-1) \;\wedge\; (\forall x \in [-1, +\infty)) \; f'(1) \leq f'(x).$

Pero además si $x \leq 0$, $f'(x) \geq 0$ y si $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$.

Como $0 \leq f'(-1)$ y $f'(1) \leq 0$

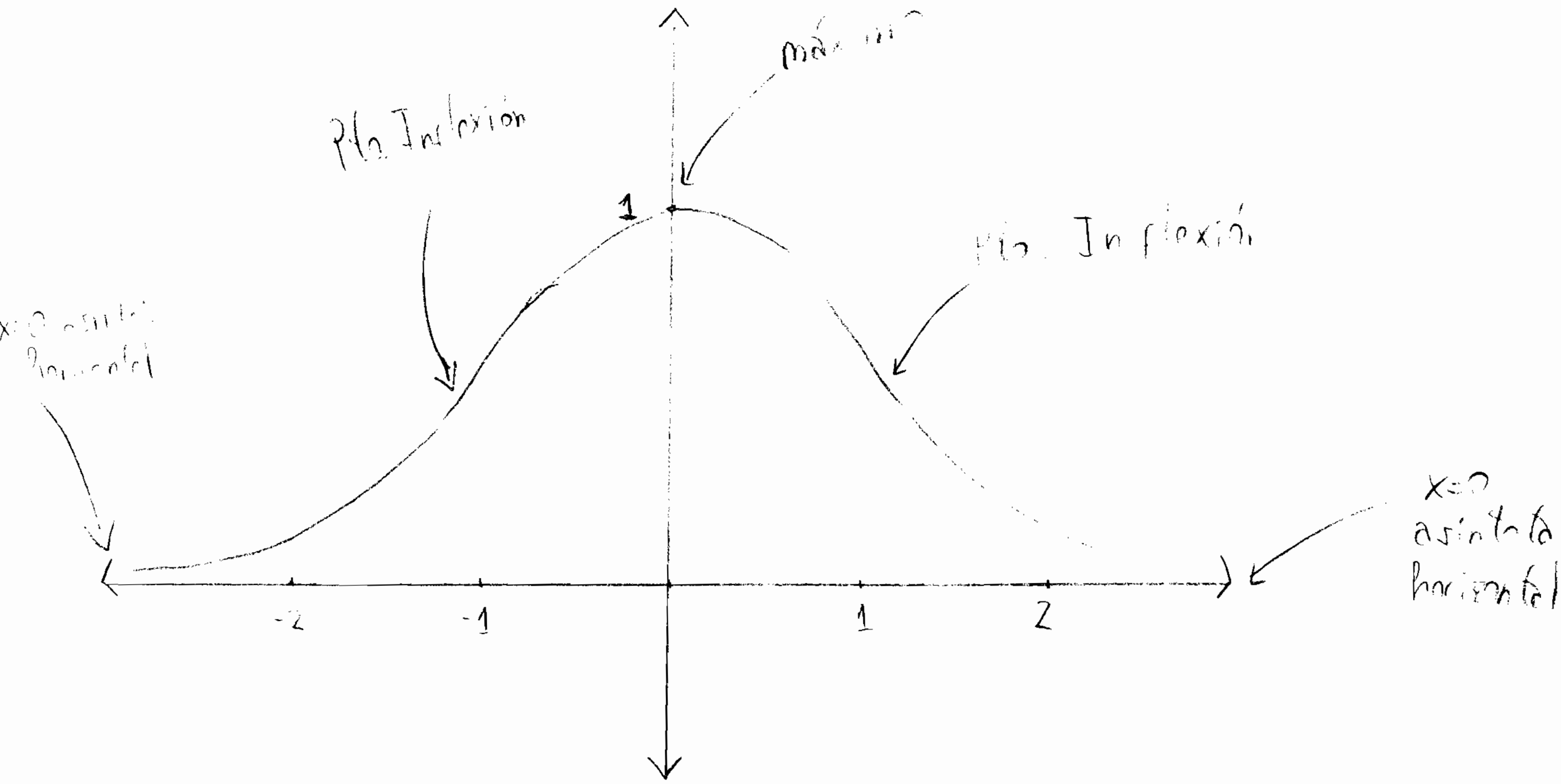
$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \; f'(1) \leq f'(x) \leq f'(-1)$

Luego f' es acotada en $\mathbb{R}$. $\square$

vi) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-f'(x)}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-f'(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

acotada partido por algo que tiende a $\pm\infty$.

El gráfico está en la siguiente página.



<u>Bonus Track</u>: No es necesario calcular el valor de la función f para llegar al gráfico anterior, pero vale la pena ver una forma de hacerlo.

La derivada de la función $\ln(f(x))$ es

$$\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot (-x\, f(x)) = -x.$$

Si definimos $g(x) = \ln(f(x)) + \dfrac{x^2}{2}$

Se tendrá que $g'(x) = \left(\ln(f(x))\right)' + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = -x + \dfrac{2}{2}x = 0$

Luego g es constante.

$\boxed{P4, 4/5}$

Además $g(0) = \ln(f(0)) + \frac{0^2}{2} = \ln(1) = 0.$

Luego $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) = 0$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\ \ln(f(x)) + \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Esta función es conocida como la función gaussiana (en honor a Carl Friedrich Gauss) o campana de Gauss y es una de las funciones más importantes en la matemática y la ciencia, con aplicaciones a teoría de Probabilidades y Estadística, química, teoría cuántica de campos, procesamiento digital de señales, entre muchas otras.

$\square$

Autor: Orlando Rivera Letelier
orlando@dim.uchile.cl

P5 El TVM dice que si $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $(\exists c\in(a,b))\ f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

En este caso, $g(t)=f(t)+f'(t)(a+h-t)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ pues f es dos veces derivable, luego f' es derivable y $a+h-t$ es derivable (función lineal en t).

Se tiene que
$$g'(t)=f'(t)+f''(t)(a+h-t)+f'(t)\cdot\frac{d}{dt}(a+h-t)$$
$$=\cancel{f'(t)}+f''(t)(a+h-t)\cancel{+f'(t)\cdot(-1)}$$
$$=f''(t)(a+h-t)$$

g es derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[a,a+h]$ y derivable en $(a,a+h)$. Luego por TVM
$$(\exists c\in(a,a+h))\quad g(a+h)-g(a)=g'(c)(a+h-a)$$
$$\Rightarrow(\exists c\in(a+h))\quad f(a+h)+f'(a+h)\underbrace{\cancel{(a+h-(a+h))}}_{=0}-\left(f(a)+f'(a)(a+h-a)\right)$$
$$=f''(c)(a+h-c)\cdot h$$

$$\Rightarrow(\exists c\in(a+h))\quad f(a+h)-f(a)-f'(a)\cdot h=f''(c)(a+h-c)\cdot h$$

$$\Rightarrow(\exists c\in(a+h))\quad f(a+h)=f(a)+f'(a)h+h\,f''(c)(a+h-c)$$

$\square$

Auxiliar 3, MA1002-5, Primavera 2010 Autor: Orlando Rivera Letelier
Cálculo Diferencial e Integral orlando@dim.uchile.cl

P6 $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x} = \left(x\,(x+1)^2\right)^{1/3}$

__Ceros:__ Como $\sqrt[3]{x}=0$ ssi $x=0$, se tiene que

$$\sqrt[3]{x^3+2x+x}=0 \Leftrightarrow x^3+2x+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$$

Luego, el conjunto de ceros de f es $\{-1,0\}$

__Continuidad:__ f es composición de funciones continuas (pues $\sqrt[3]{\ }$ es una función continua, así como también lo son los polinomios). Luego f es continua en todo $\mathbb{R}$.

__Diferenciabilidad:__ La función $g(x)=\sqrt[3]{x}$ es derivable en todo $x\neq 0$ (con $g'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$). Como la función $h(x)=x^3+2x^2+x$ es un polinomio, es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego por "regla de la cadena", si $h(x)\neq 0$, se tendrá que f es derivable en x.

$\Rightarrow f$ es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Como $f(x)=x^{1/3}(x+1)^{2/3}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+1)^{2/3}+x^{1/3}\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3} = \frac{x+1+2x}{3x^{2/3}(x+1)^{1/3}} = \frac{x+\frac{1}{3}}{x^{2/3}(x+1)^{1/3}}$$

Para determinar si f es derivable en 0 ó en -1, hay que estudiar la derivada por definición.

(<u>Obs.</u>: Si g no es derivable en y_0 y $h(x_0)=y_0$, aun se podría tener que $f=g\circ h$ sea derivable en x_0. Por ejemplo, $|\cdot|$ no es derivable en 0, pero $f(x)=|x^3|$ ¡¡sí es derivable en 0!!)

En 0: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-\overset{0}{\overbrace{f(0)}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^3+2h^2+h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sqrt[3]{1+\dfrac{2}{h}+\dfrac{1}{h^2}} = +\infty$

Luego f no es derivable en 0.

En -1: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-\overset{0}{\overbrace{f(-1)}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{(-1+h)^3+2(-1+h)^2+(-1+h)}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^3-h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sqrt[3]{1-\dfrac{1}{h}}$ ¡No existe!

Luego f no es derivable en -1.

<u>Puntos Críticos:</u> $f'(x) = \dfrac{x+\frac{1}{3}}{x^{2/3}(x+1)^{1/3}}$, luego

$f'(x)=0 \iff x=-\dfrac{1}{3}$.

Luego el único punto crítico es $x = -\frac{1}{3}$.

(Obs.: En algunos textos definen puntos críticos como aquellos puntos donde la derivada se anula o no existe, bajo esa definición, -1 y 0 también son puntos críticos, pero es cosa de nombres solamente.)

Crecimiento: Para estudiar el crecimiento de f, basta ver los signos de f', y f' solo puede cambiar de signo en los puntos donde se anula, donde es discontinua, o donde no está definida.

	$-\infty$		-1		$-1/3$		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$		$+$	

Luego f es creciente en $(-\infty, -1)$, decreciente en $(-1, -1/3)$, creciente en $(-1/3, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$ (estos últimos dos intervalos los podemos juntar para decir que f es creciente en $(-1/3, +\infty)$, pues f es continua en 0).

Máximos y Mínimos:

En los máximos y mínimos locales (y luego también en los globales) se debe tener que f' se anula o no existe, luego los únicos candidatos son -1, $-\frac{1}{3}$ y 0.

Como f es creciente en $(-\infty,-1)$ y decreciente en $(-1,-\frac{1}{3})$, se tiene que -1 es un máximo local.

Como f es decreciente en $(-1,-\frac{1}{3})$ y creciente en $(-\frac{1}{3},0)$, se tiene que $-\frac{1}{3}$ es un mínimo local.

0 no es ni mínimo ni máximo local pues f es creciente cerca de 0 (en $(-\frac{1}{3},0)$ y en $(0,+\infty)$).

Además, $f(1) > f(-1) = 0$ y $f(-2) < f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

$\therefore$ f posee un mínimo local en $-\frac{1}{3}$, un máximo local en -1, pero no posee ni máximos ni mínimos globales.

Convexidad, concavidad y puntos de inflexión:

Recordemos que un punto de inflexión es aquél donde la función cambia el tipo de convexidad (de cóncava a convexa o al revés). Para estudiar la convexidad, vemos los signos de f''.

$$f'(x) = \left(x+\frac{1}{3}\right) x^{-2/3}(x+1)^{-1/3}$$

$$\Rightarrow f''(x) = x^{-2/3}(x+1)^{-1/3} + \left(\frac{-2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) x^{-5/3}(x+1)^{-1/3} + \left(\frac{-1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) x^{-2/3}(x+1)^{-4/3}$$

$$= \frac{3x(x+1) - 2\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+1) - \left(x+\frac{1}{3}\right)x}{3x^{5/3}(x+1)^{4/3}}$$

$$= \frac{9x^2+9x-2(3x^2+4x+1)-(3x+1)\cdot x}{9\cdot x^{5/3}(x+1)^{4/3}}$$

$$= \frac{9x^2+9x-6x^2-8x-2-3x^2-x}{9x^{5/3}(x+1)^{4/3}} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x^{5/3}(x+1)^{4/3}}$$

Así, $f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0)\setminus\{-1\}$

y $f''(x) < 0$ si $x > 0$.

Luego f es convexa en $(-\infty,-1)$, es convexa en $(-1,0)$

y es cóncava en $(0,+\infty)$.

Luego el único punto de inflexión de f es en $x=0$.

Asíntotas: f está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$, luego no posee asíntotas verticales.

Para ver si posee asíntotas oblicuas (u horizontales) calculamos $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}}{x} = \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

Luego $m=1$ (en particular, como $m\neq 0$, no hay asíntotas horizontales).

Calculamos ahora $\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)-mx$

$$f(x)-mx = \sqrt[3]{x^3+2x^2+x} - x$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}\right)^3 - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+2x^2+x}\cdot x + x^2}$$

$$= \frac{2x^2+x}{(x^3+2x^2+x)^{2/3}+(x^3+2x^2+x)^{1/3}x+x^2} \Big/ \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} + 1}$$

Luego $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - mx = \dfrac{2}{3}$

Luego f posee una asíntota oblicua por la izquierda y por la derecha en la recta $y = x + \dfrac{2}{3}$.

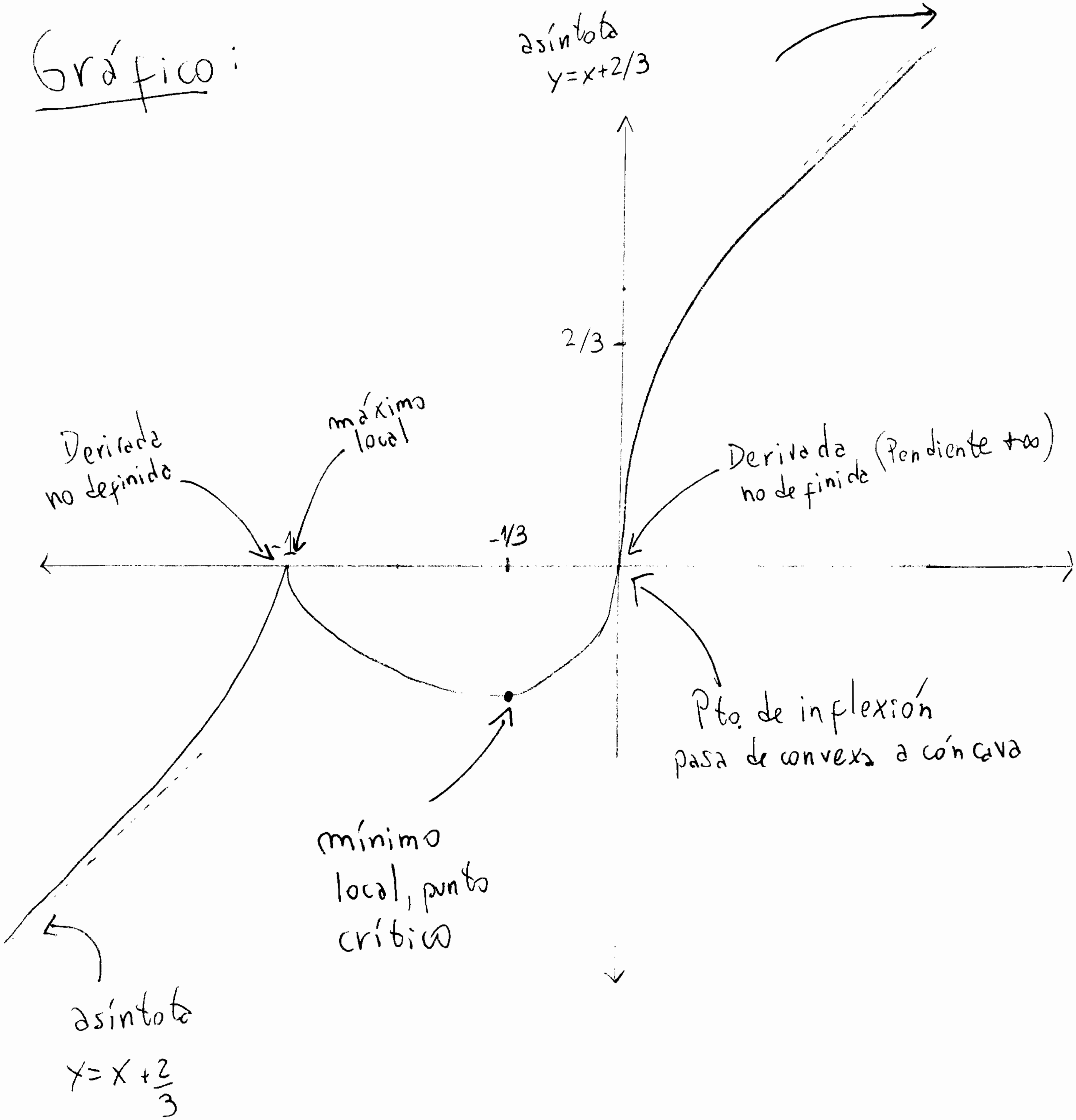
Recorrido: Observemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \wedge \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Luego, como f es continua, su recorrido es todo $\mathbb{R}$.

En efecto, sea $c \in \mathbb{R}$, y sean $x_1 < x_2$ tales que $f(x_1) < c < f(x_2)$ (estos x_1 y x_2 existen por los límites antes dichos). Luego, llamando $g(x) = f(x) - c$ (que es una función continua), como $g(x_1) < 0$ y $g(x_2) > 0$ $\Rightarrow (\exists\, \bar{x} \in (x_1, x_2))\ g(\bar{x}) = 0$. $\Rightarrow (\exists\, \bar{x} \in (x_1, x_2))\ f(\bar{x}) = c$.

$\therefore (\forall c \in \mathbb{R})(\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R})\ f(\bar{x}) = c$. Es decir f es sobreyectiva, o equivalentemente su recorrido es $\mathbb{R}$.

Gráfico:


asíntota
y=x+2/3
2/3
máximo
local
Derivada
no definida
Derivada
no definida
(Pendiente +∞)
-1
-1/3
Pto. de inflexión
pasa de convexa a cóncava
mínimo
local, punto
crítico
asíntota
y = x + 2/3

□