Auxiliar Extra Control 1 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 9 de Septiembre, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Pruebe que no existe una función continua sobreyectiva del intervalo $[0,1]$ en el invertalo abierto $(0,1)$.

b) Pruebe que una función continua sobreyectiva del intervalo $(0,1)$ en el intervalo $[0,1]$ (note que existe, por ejemplo $f(x) = |\sin 2\pi x|$) no puede ser biyectiva.

Pregunta 2.

a) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

Pruebe que si h es continua en $x = 0$, entonces es continua en todo punto.

b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación:

$$\forall x, y \in : \ f(x) \geq f(y) + g(y)(y-x)$$

b.1) Muestre que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : g(x)(y-x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y-x)$$

b.2) Probar que si g es una función acotada entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$

b.3) Probar que si g es continua en a y a_n es una sucesión que converge a a, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}$$

existe y vale $-g(a)$

Pregunta 3.

a) Sea f una función diferenciable positiva en $(0, \infty)$. Pruebe que:

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + \delta x)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

Existe y es positivo para cada x

b) Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(c) = 0$ para $c > 0$ y para $0 < x < \infty$ f es diferenciable tal que $0 \leq f'(x) \leq K f(x)$ con $K > 0$. Pruebe que $f \equiv 0$

Pregunta 4.

a) Determine todos los pares de números enteros a, b. Con $0 < a < b$ tales que:

$$a^b = b^a$$

Indicación: Considere $f(x) = \frac{\log x}{x}$

b) ¿Qué número es mayor: 3^π o π^3?
Indicación: Considere $g(x) = 3^x x^{-3}$

Pregunta 5. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$ y acotada, con k raíces reales distintas $r_1 < \ldots < r_k$. Sea $\alpha > 0$. Demuestre que $F(x) = p(x) - \alpha p'(x)$ posee al menos k raíces distintas.
<u>Indicación</u>: Considere $f(x) = e^{-x/\alpha} p(x)$