Auxiliar 4 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 10 de Septiembre, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Considere la función $f(x) = \ln(1+x)$:

a) Calcule el error cometido al aproximar f en $x = 0.1$ por su polinomio de Taylor de orden 3 en torno a $x_0 = 0$

b) ¿Hasta qué orden se debe desarrollar el polinomio de Taylor para obtener $\ln(1.1)$ con 6 decimales exactos?

Pregunta 2.

a) A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x+a)^n$, con $n \geq 1$ un entero, demuestre el teorema del binomio:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$$

b) Sea f una función $\mathcal{C}^2$ en un intervalo abierto. Pruebe que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

Pregunta 3. Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Determine $f^{(n)}(x) \forall n \in \mathbb{N}$. Concluya que $f \in \mathcal{C}^\infty$.
Pruebe que el polinomio de Taylor de cualquier orden entorno a $x_0 = 0$ es 0. Comente.

Pregunta 4. Este problema está dedicado a determinar el cono de superficie mínima circunscrito a una esfera de radio $R > 0$ fijo. Para ello:

a) Considere la esfera de radio $R > 0$ y el cono de altura h y base circular de radio r circunscrito a la esfera. Pruebe que:

$$\frac{h-R}{R} = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}$$

b) Determine las dimensiones del cono (h y r) tal que se cumpla la condición de poseer superficie (manto y base) mínima estando circunscrito a la esfera. Indique el valor de la superficie en tal caso.

Pregunta 5. Determinar el mayor volúmen de un cilíndro de radio r y altura h, donde $P = (h, r)$ recorre la recta: $ay + bx = ab$, $a, b > 0$ y $a + b = 1$.

Pregunta 6. Una persona que se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular de diámetro 4 km. desea llegar a un punto C diametralmente opuesto a A en el otro lado del lago.

La persona puede caminar a una velocidad constante de 4 Km/h y remar en un bote a una velocidad constante de $2Km/h$.

a) Plantee la ecuación $T = T(x)$ con $0 \leq x \leq \pi/2$ que describe el tiempo T que demora la persona en recorrer el tramo recto AB (remando) más el arco BC (caminando) en función del ángulo x.

b) Estudiar crecimiento y concavidades de $T(x)$, bosquejar su gráfico y demostrar que $T(x)$ admite un máximo absoluto, calcúlelo.

c) Determine el valor de x para llegar al punto C en el mínimo tiempo , indicando la trayectoria a seguir y en que tiempo se cubre el recorrido.

Pregunta 7. Analice completamete la función $f(x) = e^{\sqrt{2}\sin x}$