Auxiliar 6 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 1 de Octubre, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Calcule las siguientes primitivas

a) $\displaystyle\int e^{-x}\ln(1+e^x)dx$

b) $\displaystyle\int \frac{4x^3-3x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}}$

d) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx$

Pregunta 2. En esta pregunta probaremos que $\displaystyle\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + C$ de dos maneras distintas:

a) Probando y utilizando la siguiente identidad:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right]$$

b) Usando la sustitución $t = \tan x/2$.

Pregunta 3. Sea f una función infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$. Sea $I_n = \displaystyle\int e^{-x} f^{(n)}(x)dx$ en donde $f^{(n)}$ denota la n-ésima derivada de f.

a) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$I_n = I_{n+1} - e^{-x}f^{(n)}(x)$$

b) Si $f^{(k)} = 0$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$I_0 = \int e^{-x}f(x)dx = -e^{-x}\sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(x) + C$$

donde C es una constante real.

Pregunta 4. Considere $s_n = \displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{n^2-i^2}$

a) Identifique s_n como una suma de Riemann, determinando la función y partición involucradas.

b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$

Pregunta 5. En este problema probaremos que $\displaystyle\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$, conocido como el Producto de Wallis', para ello:

a) Pruebe que:

$$\int \sin^n(x)dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$$

b) Deduzca que:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)dx$$

c) Pruebe que:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)dx = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}$$

concluya que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)dx}$$

d) Pruebe que el cuociente de las dos integrales que quedan en la última igualdad está entre 1 y $1 + \frac{1}{2n}$. Concluya el resultado deseado.

Pregunta 6. Consideremos f una función derivable en (a, b) tal que $\forall x \in (a, b)$ se tiene: $|f'(x)| \leq K$ con $K > 0$ constante.

a) Pruebe que $\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$S(f, P) - s(f, P) \leq K|P|(b - a)$$

donde $|P|$ denota el paso de la partición $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

b) A partir de lo anterior, concluya que f es integrable en $[a, b]$

c) Verifique que:

$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} : \quad \left| \int_a^b f - \frac{1}{2}(S(f, P) - s(f, P)) \right| \leq \frac{1}{2} K|P|(b - a)$$