# Auxiliar 7: Cálculo Diferencial e Integral


**Profesor de Cátedra:** Leonardo Sanchez C.
**Profesores Auxiliares:** Orlando Rivera Letelier y Matias Godoy Campbell


Viernes 08 de Octubre de 2010

**P1.** Dado $a \in [0,1]$, determine si existe una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \qquad \int_0^1 x f(x)\,dx = a, \qquad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = a^2.$$

**P2.** Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\sin x} x e^{-t^2}\,dt}{1 - \cos x}$$

**P3.** Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^{x} (x-1)\sin(t^2)\,dt}{\int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2 - 1)\,dt}$$

**P4.** Pruebe que si $f$ es una función integrable en el intervalo $[a,b]$, entonces la función $g$ definida por $g(x) = f(-x)$ es integrable en el intervalo $[-b,-a]$ y se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} g(x)\,dx$$

**P5.** Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sinh\left(\frac{k}{n}\right)$$

**P6.** Considere la función $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

*a)* Calcule $s(f,P_n)$ y $S(f,P_n)$ para la partición $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, con $x_i = q_n^i$ y donde $q_n = \sqrt[n]{5}$.

*b)* Use lo anterior para calcular $\lim\limits_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{5} - 1)$.

**P7.** Sea $f$ una función derivable en $[0,1]$, y sea

$$M = \sup_{x\in(0,1)} |f'(x)| < \infty$$

Pruebe que:

$$\big(\forall n \geq 1\big) \qquad \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(\frac{j}{n})}{n} - \int\limits_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

**P8.** Consideremos $f$ una función derivable en $(a,b)$ tal que $\forall x \in (a,b)$ se tiene: $|f'(x)| \leq K$ con $K > 0$ constante.

*a*) Pruebe que $\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$S(f,P) - s(f,P) \leq K|P|(b-a)$$

donde $|P|$ denota el paso de la partición $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

*b*) A partir de lo anterior, concluya que $f$ es integrable en $[a,b]$

*c*) Verifique que:

$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} : \quad \left| \int_a^b f - \frac{1}{2}(S(f,P) - s(f,P)) \right| \leq \frac{1}{2} K|P|(b-a)$$