Auxiliar 8 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 15 de Octubre, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. En este problema probaremos que $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$, conocido como el Producto de Wallis', para ello:

a) Pruebe que:

$$\int \sin^n(x)dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$$

b) Deduzca que:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)dx$$

c) Pruebe que:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)dx = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}$$

concluya que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)dx}$$

d) Pruebe que el cuociente de las dos integrales que quedan en la última igualdad está entre 1 y $1 + \frac{1}{2n}$. Concluya el resultado deseado.

Pregunta 2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ una función diferenciable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x))dx + f(x)$$

a) Pruebe que $f(x) = \tanh(g(x))$

b) Calcule la integral $\int_0^{x^3} (\tanh(t))^2 dt$
Indicación: Observe que $f(g^{-1}(x)) = \tanh(x)$

Pregunta 3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$ tal que $f(0) = 0$ y $\forall x \in (0, 1),\ 0 \leq f'(x) \leq 1$. Pruebe que, $\forall x \in [0, 1]$

$$\int_0^x f^3(t)dt \leq \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$$

Indicación: Reduzca el problema al de analizar una función adecuada.

Pregunta 4. Pruebe que el Teorema del valor medio para derivadas (asumiendo $g > 0$) implica el Teorema del valor medio generalizado para integrales. Pruebe que la reciproca es cierta si además se asume que f, g son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ y $g' > 0$.

Pregunta 5. Sea f una función continua, pruebe que:

a) $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du$

b) $\displaystyle\int_0^x f(u)(x-u)^2du = 2\int_0^x \left(\int_0^{u_2}\left(\int_0^{u_1} f(t)dt\right)du_1\right)du_2$

c) Concluya usando inducción e integración por partes la generalización siguiente:

$$\int_0^x \frac{f(u)(x-u)^n}{n!}du = \int_0^x \left(\int_0^{u_n}\left(\cdots\left(\int_0^{u_1} f(t)dt\right)du_1\right)\cdots\right)du_n$$