Auxiliar 10 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 29 de Octubre, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, \quad x^2 + y^2 - 2ry \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

a) Grafique la región $\mathcal{R}$
b) Calcule el volumen del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.
c) Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.
d) Calcule el volúmen del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OY.

Pregunta 2. Pruebe por integración que la superficie de un cono (manto y base) de altura h y base circular de radio r está dada por:

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$$

Pregunta 3. Considere el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ con $x \geq 1$. Si consideramos la superficie generada al rotar respecto al eje horizontal, se obtiene la llamada Trompeta de Torricelli (similar a una vuvuzela), se le pide:

a) Determinar el volúmen encerrado por la Trompeta
b) Determinar el área de la superficie de revolución
c) Suponga que llenamos la trompeta con la cantidad de pintura tal que cubra el volúmen determinado en a). En tal caso, tendríamos que una cantidad finita de pintura cubre una superficie infinita. ¿Cómo es esto es posible?.

Pregunta 4.

a) Se define la Lemniscata (centrada en el origen) como la curva plana cuyos puntos satisfacen la siguiente propiedad:

$$P = (x, y) \text{ pertenece a la Lemniscata si y sólo si } d(P, (a, 0)) \cdot d(P, (-a, 0)) = a^2$$

Pruebe que en coordenadas polares, es posible parametrizar esta curva como:

$$\rho^2(\theta) = 2a^2 \cos(2\theta)$$

Describa las restricciones necesarias sobre θ para la validez de esta parametrización.

b) Se define la cardioide como la curva descrita por un punto de una circunferencia que, sin resbalar, rueda alrededor de otra circunferencia de igual radio. Pruebe que, en coordenadas polares, es posible parametrizar esta curva (de modo tal que, si $\theta = 0$ entonces estamos en el orígen) como:

$$\rho(\theta) = 2a(1 - \cos(\theta))$$

donde a es el radio de las circunferencias que generan la cardioide.

Pregunta 5. Calcule el área encerrada en el interior de las curvas encontradas en la parte anterior. Utilice simetrías.