Auxiliar Extra Control 3 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 11 de Noviembre, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Para $\alpha \in (0,1)$, denoramos por $\mathcal{R}$ la región encerrada por la curva x^{α}, el eje OY y la recta tangente a x^{α} en el punto $x = 1$

a) Demostrar que el área de la región $\mathcal{R}$ está dada por $A = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$

b) Demostrar que el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OY está dado por $V = \pi\frac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}$

c) En el caso $\alpha = \frac{2}{3}$ calcule el perímetro de la región $\mathcal{R}$

Pregunta 2.

a) Pruebe que el área superficial de una esfera de radio r es $4\pi r^2$, y, en general, que el área de la porción de esfera comprendida entre 2 planos paralelos a distancia h es $2\pi rh$ (vea la figura adjunta)

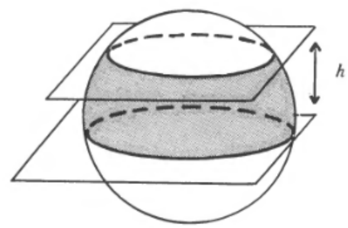

Figura 1: Esfera cortada por planos a distancia h.

b) La figura adjunta muestra un sólido de base circular de radio a. Cada plano perpendicular al diametro AB intersecta al sólido en un cuadrado. Exprese el volumen del sólido como una integral y calcúlela.

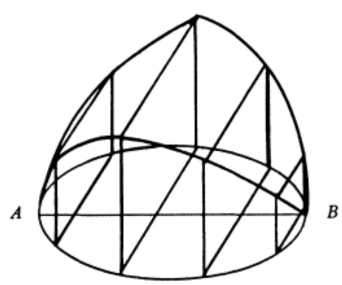

Figura 2: Sólido a considerar

c) Determine el volumen de la intersección de los cilindros de la figura. Suponga que los radios de ambos cilindros son $a > 0$.
<u>Hint:</u> Estudie la intersección del sólido con planos horizontales.

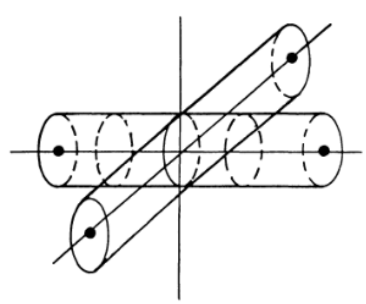

Figura 3: Intersección de cilindros.

Pregunta 3.

a) Demuestre que si S es el arco de la curva definida de forma paramétrica vía $y = \varphi(t)$ y $x = \psi(t)$, con $t \in [a, b]$, donde φ y ψ son funciones de clase $\mathcal{C}^1$, entonces:

$$L(S) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$$

¿Cómo es en particular la expresión para una curva definida en coordenadas polares? Finalmente, recupere la fórmula de longitud de curva para una función $y = f(x)$.

b) Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t}\cos(t)$, $y(t) = e^{2t}\sin(t)$. Encuentre el largo L de la curva obtenida al variar t entre 0 y 2π.

c) Considerando la misma espiral, encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0, sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte anterior.

Pregunta 4.

a) Se define la cardioide como la curva descrita por un punto de una circunferencia que, sin resbalar, rueda alrededor de otra circunferencia de igual radio. Pruebe que, en coordenadas polares, si imponemos que si $\theta = 0$ entonces estamos en el orígen, se tiene la siguiente relación:

$$\rho(\theta) = 2a(1 - \cos(\theta))$$

donde a es el radio de las circunferencias que generan la cardioide.

b) Calcule el área de la región encerrada por la cardiode.

Pregunta 5. Encuentre la parametrización en longitud de arco para:

a) La cicloide $\vec{r}(t) = R(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$

b) La hélice $\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), \frac{ht}{2\pi})$, con $t \in [0, 2\pi]$

Pregunta 6. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = z$$

con condiciones iniciales $z(0) = 1$, $\frac{dz}{d\theta}(0) = 0$, todo esto en coordenadas cilíndricas.

a) Parametrice la trayectoria Γ descrita por la partícula.
Hint: Primero verifique que $\cosh(\theta)$ satisface la ecuación diferencial mencionada.

b) Calcule la longitud de Γ si $\theta \in [0, 2\pi]$

c) Calcule el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de Γ.