Auxiliar 12 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 12 de Noviembre, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Considere una curva Γ que satisface la siguiente propiedad:

Existe un punto $\vec{P}_0$ por el cual pasan todas las rectas normales a Γ

Sea $\vec{\sigma} : [0, L(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización natural.

a) Justifique que $\exists \varphi : [0, L(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ que satisface: $\vec{P}_0 = \vec{\sigma}(s) + \varphi(s)\hat{N}(s)$

b) Demuestre que:

$$1 - \kappa(s) \cdot \varphi(s) = 0$$
$$\varphi'(s) = 0$$
$$\tau(s) \cdot \varphi(s) = 0$$

c) Concluya que Γ es una curva plana.

d) Demuestre que Γ es un arco de circunferencia.

Pregunta 2. Sea $\vec{\sigma} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva Γ. Supondremos que $\vec{\sigma} \in \mathcal{C}^3$. Pruebe que:

a) $\tau(s) = [\vec{\sigma}'(s) \times \vec{\sigma}''(s)] \cdot \vec{\sigma}'''(s) / \, ||\vec{\sigma}''(s)||$

b) Usando la parte anterior, pruebe que la torsión de la hélice $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 4\pi]$ es $\frac{1}{2}$

Pregunta 3. Sea $\vec{\sigma} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s \in [0, L]$, $\kappa(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$. Diremos que Γ es una **hélice** si existe una dirección fija $\hat{d}_0$ tal que todas las rectas tangentes a Γ forman un ángulo constante con $\hat{d}_0$.

a) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si las rectas normales principales son paralelas a un plano fijo

b) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si $\kappa/\tau \equiv cte$

Pregunta 4. Sea Γ la curva obtenida al intersectar el paraboloide de ecuacion $z = x^2 + y^2$ con la esfera unitaria

a) Determine una parametrización para Γ

b) Calcule el Triedro de Frenet para Γ

c) Suponiendo densidad $\rho(x, y, z) = x + y + z$ determine el centro de gravedad de Γ

Pregunta 5. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

con condiciones iniciales $z(0) = 1$, $\frac{dz}{d\theta}(0) = 0$, todo esto en coordenadas cilíndricas.

a) Parametrice la trayectoria Γ descrita por la partícula.
Hint: Primero verifique que $\cosh(\theta)$ satisface la ecuación diferencial mencionada.

b) Calcule la longitud de Γ si $\theta \in [0, 2\pi]$.

c) Calcule el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de Γ.