Auxiliar 14 - Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Viernes 26 de Noviembre, 2010

Profesor Cátedra: Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Analice la convergencia de las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ es fijo.

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln(n)))^2}$

f) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continua y creciente en $[0,1]$, con $g(0) = 0$.
Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si y solo si la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}dx$ converge.

Pregunta 2. Suponga que $f(x)$ es una función definida en $[-1,1]$ tal que $f'''(x)$ es continua. Pruebe que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2f'(0)\right]$$

es convergente.
<u>Hint</u>: Realice un desarrollo de Taylor apropiado para f.

Pregunta 3. El objetivo de esta pregunta es probar que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

es convergente. Note que este viene a ser un caso intermedio de las series b) y c) de la Pregunta 1.
Para probar lo deseado se le solicita:

a) Probar que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}dy$ existe. Para ello compare con una serie apropiada.

b) Gracias a lo anterior, pruebe lo solicitado.

c) Adicionalmente, pruebe de forma análoga que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ diverge.

Pregunta 4. Suponga que (a_n) es una sucesión decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, si y solo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ también converge.

Pregunta 5. Se definen los números de Fibonacci, como los términos de la sucesión dada por la recurrencia: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$. Se define la función generadora de estos números como la serie de potencias de coeficientes c_n tal que $c_n = a_n$ $\forall n \geq 1$.

a) Pruebe que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$

b) Si denotamos $s(x)$ a la función generadora. Pruebe que esta es convergente si $|x| < 1/2$

c) Finalmente, pruebe que:

$$s(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad |x| < 1/2$$