Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Clase Auxiliar N°12: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

3 de noviembre de 2010

P1. El objetivo de este problema es encontrar una fórmula explítica para el término $n-$ésimo de la sucesión de fibonacci, definida recursivamente como

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \geq 0 \tag{1}$$

Para esto se seguirá el siguiente esquema

a) Demuestre que si se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la sucesión de vectores $V_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ entonces la recurrencia definida en (1) es equivalente a la recurrencia definida por el siguiente sistema matricial

$$V_{n+1} = AV_n, \quad n \geq 0, \quad V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

b) Calcule $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 > \lambda 2$ valores propios de la matriz A y sus respectivos vectores propios v_1, v_2. Note que $\lambda_1\lambda_2 = -1$ y que $1 - \lambda_2 = \lambda_1$

c) Verifique que si $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ entonces P es una matriz invertible y calcule la inversa. Muestre que si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ además se tiene $AP = PD$

d) Muestre que

$$V_n = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall n \geq 0$$

e) Concluya que[1]

$$a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n(1 + \lambda_2)\frac{2}{5 - \sqrt{5}}$$

P2. Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pruebe que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)^3(5 - \lambda)$$

P3. *a*) Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, con A invertible. Muestre que si λ es valor propio de AB, entonces λ es valor propio de BA.

b) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable y tal que $A^k = 0$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Encuentre A explícitamente (justifique).

c) Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices diagonalizables y con igual base de vectores propios $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A y $\mu_1, \ldots, \mu_n$ los de B, ie, $Av_i = \lambda_i v_i$ y $Bv_i = \mu_i v_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, encuentre los valores propios de $A^3 + 2B$.

[1] La cantidad λ_1 es conocida como el número áureo