MA1102-3- Álgebra Lineal.
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Sebastián Barbieri, Pedro Montealegre B.

Auxiliar 3

30 de Agosto de 2010

P1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

P2. Encuentre la descomposición LU y la descomposición LDU de: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

P3. Sea α y $\beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones en las variables x_1, x_2 y x_3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = \beta \\ 3x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

a. Determine los valores de α y β para que (i) el sistema no tenga solución, (ii) el sistema tenga infinitas soluciones y (iii) el sistema tenga una única solución. En cada caso encuentre las soluciones.
b. Sea $\alpha = 4$. Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes anterior.

P4. Sea $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ tal que (M^tM) es invertible, se define $P \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ como: $P = I_{mm} - M(M^tM)^{-1}M^t$. Pruebe que:

a. $P^2 = P$ y que $PM = 0_{mn}$.
b. Pruebe que la matriz (M^tM) es simétrica y que por lo tanto P es simétrica.
c. Pruebe que la matriz P no es invertible.

P5. sean x,$y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, se define la norma como $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_{i1}^2$ y el producto interno como $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_{i1}y_{i1}$. Considere además la matriz $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $A = I_{nn} + B^tB$. Pruebe que:

a. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
b. $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$
c. $\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^ty \rangle$
d. $\langle Ax, x \rangle = \|x\|^2 + \|Bx\|^2$
e. $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$