MA1102-3- Álgebra Lineal.
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Sebastián Barbieri, Pedro Montealegre B.

Auxiliar 10

8 de Noviembre de 2010

P1. Considere la sucesión de fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$.

1. Muestre que $\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$ y pruebe que $\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Esto reducirá el cálculo de los valores de esta secuencia, a conocer las potencias de la matriz anterior.
2. Calcule los valores propios y vectores propios de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
3. Escriba la matriz anterior, como una diagonal con los valores propios, multiplicada por la matriz con los vectores propios, y su inversa, de la forma PDP^{-1}.
4. deduzca una fórmula explícita para el n-ésimo número de fibonacci.

P2. Sea ω en $\mathbb{R}$ y considere la matriz A_n de orden n siguiente:

$$\begin{bmatrix} \omega & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \omega & -1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & \ddots & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \omega & -1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \omega & -1 \\ \omega & \omega & ... & \omega & \omega & \omega \end{bmatrix}$$

Y considere que $A_1 = (w)$. Demuestre que $det(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega^n$

P3. Pruebe que una matriz nilpotente es diagonalizable, si y solamente si es la matriz nula.

P4. Sea A una matriz de orden n con $n \geq 3$ tal que $dim(Ker(A)) \leq 2$. Y su polinomio característico $p(\lambda)$ tiene la forma $p(\lambda) = \lambda^3 q(\lambda)$, donde $q(\lambda)$ es un polinomio. Demuestre que $dim(Ker(A)) \geq 1$, y que la matriz no es de rango completo. Es decir, muestre que no es invertible. Además, pruebe que A no es diagonalizable.

P5. Considere la siguiente matriz de orden n con valores complejos:

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & ... & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & ... & c_{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ c_2 & ... & c_{n-1} & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & ... & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

Estas matrices se denominan circulantes. Demuestre que si ρ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces $(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \rho^k, (1, \rho, \rho^2 ... \rho^{n-1}))$ es un par valor propio, vector propio.