MA1102-3- Álgebra Lineal.
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Sebastián Barbieri, Pedro Montealegre B.

Auxiliar 13

24 de Noviembre de 2010

P1.

1. Sea $P(x)$ un polinomio cualquiera de la forma $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Definimos la matriz $P(A)$ como $P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$. Demuestre que si B es una matriz diagonalizable, y $P(\lambda)$ su polinomio característico, entonces $P(B) = 0$.
2. Sea A una matriz simétrica, tal que para todo x en $\mathbb{R}^n$ $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Pruebe que todos sus valores propios son reales y mayores o iguales que 0.

P2. Sean α_0, α_1 ... α_{n-1} valores reales, y $n \geq 2$. Probar por inducción que el polinomio característico de:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

se escribe como: $p(\lambda) = (-1)^n (\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i + \lambda^n)$

P3. Sea A una matriz cuadrada de 3x3 tal que:

$$Ker(A - I) = \left\langle \{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \} \right\rangle, Ker(A - 2I) = \left\langle \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \} \right\rangle$$

1. Pruebe que A es diagonalizable
2. Encuentre explícitamente A
3. Muestre que A es invertible sin hacer el cálculo explícito

P4. Determine los valores de a para que la siguiente matriz sea definida positiva.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

P5. Sean U y V dos s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que su dimensión es mayor que 0 y $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.

1. Pruebe que existe una matriz A tal que $\forall\, u \in U \; Au = 0$, y $\forall\, v \in V \; Av = 2v$.
2. Determine si la matriz A es diagonalizable, y escriba su polinomio característico.