Auxiliar 7: Álgebra Lineal

Profesor Auxiliar: Orlando Rivera Letelier
Lunes 04 de Octubre de 2010

Recuerde que se denota por $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a n. Este es un espacio vectorial de dimensión $n+1$, y una base de este espacio es $B_n = \{x^k /\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$.

P1. Considere el subespacio vectorial $U = \{p \in \mathcal{P}_3 \ / \ p(1) = p'(1) = 0\}$.

a) Encuentre una base de U y su dimensión.

b) Extienda la base anterior a una base de $\mathcal{P}_3$.

c) Considere ahora el subespacio vectorial $W = \{p \in \mathcal{P}_3 \ / \ p''(0) = 0\}$

i) Encuentre una base de W y su dimensión.
ii) Encuentre una base de $U \cap W$ y su dimensión.
iii) Pruebe que $\mathcal{P}_3 = U + W$.

P2. Definimos:

$$W_1 = \{p \in \mathcal{P}_4 \ / \ p(1) + 2p(-1) = 0\}$$
$$W_2 = \{p \in \mathcal{P}_4 \ / \ p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

a) Pruebe que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_4$.

b) Encuentre una base de W_1 y W_2.

c) Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$.

d) Calcule la dimensión de $W_1 + W_2$.

P3. Dado $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, se define:

$$A(V) = \{Ax \ / \ x \in V\}$$

a) ***i)*** Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, entonces $A(V)$ también es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
ii) Sean V, W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.
iii) Sean V, W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$, y sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Pruebe que si $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$, entonces A es invertible.

b) ***i)*** Sea W un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ y definamos $E = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \ / \ A(\mathbb{R}^n) \subseteq W\}$. Muestre que E es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.
ii) Sea $W = \{(t, t) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$. Calcule la dimensión de $E = \{A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \ / \ A(\mathbb{R}^2) \subseteq W\}$.