Auxiliar 3 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Martes 31 de Agosto, 2010

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega

Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Calcule el gradiente de:

$$f(x,y,z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

Esf: $\underset{h_r}{h_u} = 1$ $h_v = h_\theta = r\operatorname{sen}\varphi$ $h_\varphi = r$.

Pregunta 2.

a) Sea Γ una curva simple, suave por tramos, cerrada, en $\mathbb{R}^2$ y sea Ω la región interior a Γ. Demuestre que el área de Ω es igual a:

$$A(\Omega) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma x\,dy - y\,dx$$

b) A partir de lo anterior, calcule las áreas obtenidas al segmentar la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuando esta es dividida por la recta de ecuación $x = k$ (donde $|k| < a$).

c) Calcule el área de la **astroide**, curva definida por la ecuación:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

<u>Indicación</u>: Parametrice apropiadamente (piense en como parametrizamos una elipse o un circulo)

Pregunta 3. Considere el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ y la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ con $R > 0$ constante. Se le pide:

a) Determinar el área de la parte del cono que está dentro de la esfera.

b) Determinar el área de la parte de la esfera que está dentro del cono.

Pregunta 4. Demuestre que las fórmulas para las áreas de las superficies de revolución de una función de una variable (i.e. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$) en torno al eje x e y, las cuales fueron vistas en el curso de cálculo, y que son respectivamente:

$$A_x(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

$$A_y(f) = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

Son consistentes con la definición de área dada en nuestro curso.

Pregunta 5. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide a la esfera unitaria S en dos regiones: S_1 y S_2, donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$

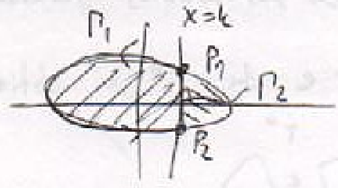
Pregunta 6. Sea S la esfera de radio R y $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ (que no está en S). Demuestre que:

$$\iint_S \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{p}\|}\,dA = \begin{cases} 4\pi R & \text{Si } \vec{p} \text{ está en } int(S) \\ 4\pi R^2/d & \text{Si } \vec{p} \text{ no está en } int(S) \end{cases}$$

Determine d en el segundo caso.

<u>Indicación</u>: Note que no hay pérdida de generalidad al suponer que $\vec{p} = \|\vec{p}\|\hat{k}$ (Esto pues, en caso contrario hasta realizar una rotación de los ejes, lo cual deja el resultado invariante)

P2 $A(\Omega) = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx$. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cortada por $x = k$.



Ω $\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $/\cdot a^2b^2$.

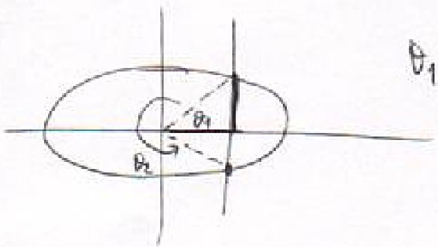
$b^2k^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}} = \pm\sqrt{b^2\left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)}$

así: $P_1 = \left(k, \sqrt{b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}\right)$ $P_2 = \left(k, -\sqrt{b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}\right)$ aquí es claro que necesito $|k| < a$. sino $\nexists$ inter.

$\Rightarrow A_1 = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\underset{\text{elipse}}{\Gamma_1}} x\,dy - y\,dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\underset{\text{recta}}{\Gamma_2}} x\,dy - y\,dx}_{I_2}$.

Parametricemos: Elipse: $x = a\cos\theta$ $y = b\,\text{sen}\,\theta$.

¿límites?



$\theta_1 = ?$ $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\sqrt{b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}}{k} = \sqrt{\frac{b^2}{k^2}\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}$

o sea $\theta_1 = \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{b^2}{k^2}\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}\right)$

$\Rightarrow \theta_2 = 2\pi - \theta_1$.

$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} a\cos\theta\cdot(b\cos\theta) - b\,\text{sen}\,\theta\cdot(-a\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta$ Obs. si $k = a$. $\theta_1 = \text{arctg}(0) = 0$. ✓

$k=0$ $\theta_1 = \text{arctg}(-)$ diverge ok.

$= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} ab\,(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)\,d\theta = \frac{ab}{2}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{ab}{2}(2\pi - 2\theta_1)$

$= ab(\pi - \theta_1)$

$= ab\left(\pi - \text{arctg}\sqrt{\frac{b^2}{k^2}\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}\right)$

~~Como $A_1 + A_2 = \pi ab$~~

~~$A_2 = \pi ab - A_1 = \pi ab - \pi ab + \text{arctg}(\dots)\,ab$~~

Param 2 $x = k$, $y = t$ $t \in [P_2, P_1]$ ~~$= \pi ab\,\text{arctg}\sqrt{\frac{b^2}{k^2}\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}$~~

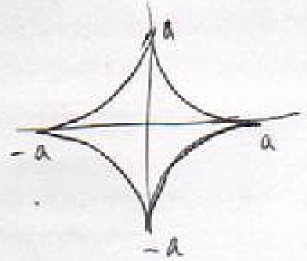
$I_2 = \frac{1}{2}\int_{P_2}^{P_1} (k\cdot 1 - t\cdot 0)\,dt$

$= \frac{1}{2}(P_{1y} - P_{2y}) = \sqrt{b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}$ o sea $A_1 = ab(\pi - \text{arctg}\sqrt{\quad}) + \sqrt{b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}$ ∎

$A_2 = \pi ab - A_1 = \text{arctg}\sqrt{\dots} - \sqrt{b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}$ ∎

1/

astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$



Param: $x = a\cos^3\theta \quad y = a\sin^3\theta$.

son tq: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^3\theta)^{2/3} + a^{2/3}(\sin^3\theta)^{2/3}$

$= a^{2/3}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^{2/3}$ ✓

$\therefore A(\text{Astroide}) \overset{\text{Green}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\cos^4\theta\sin^2\theta + 3a^2\sin^4\theta\cos^2\theta \; d\theta.$

$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\,(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1})\,d\theta = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos\theta\sin\theta)^2 d\theta.$

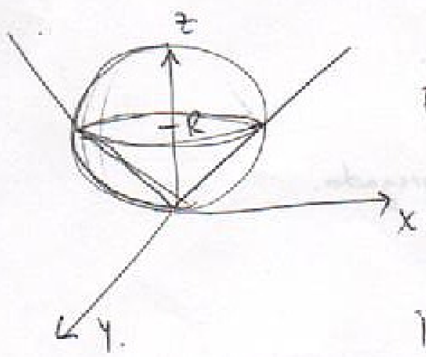
pero $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \frac{\sin 2\theta}{2} = \cos\theta\sin\theta \Rightarrow \left(\frac{\sin^2 2\theta}{4}\right) = \cos^2\theta\sin^2\theta.$

$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta. = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{3a^2}{8}\cdot\frac{2\pi}{2} - \underbrace{\frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,d\theta}_{\frac{3a^2}{16}\cdot\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{2\pi} = 0}.$

$\therefore A(\text{Astroide}) = \frac{3\pi}{8}a^2$ ∎

P3) $x^2+y^2 = z^2 \quad z \geq 0.$

$x^2+y^2+z^2 = 2Rz \iff x^2+y^2+(\underbrace{z^2-2Rz+R^2}_{(z-R)^2}) = R^2. \quad R>0$ cte.



En polares: $z^2 = x^2+y^2 \iff z = \rho$. Cono.

Para a) Veamos hasta qué altura (y radio) está el cono dentro de la esf:

Intersección: $x^2+y^2 = z^2 \;\wedge\; x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2.$

Polares: $\rho^2 = z^2 \;\wedge\; \rho^2 + (z-R)^2 = R^2.$

$\Rightarrow \rho = z. \quad \Rightarrow \rho^2 + (\rho-R)^2 = R^2.$

$\Rightarrow \rho^2 + \rho^2 - 2\rho R + \cancel{R^2} = \cancel{R^2}$

$2\rho^2 - 2\rho R = 0$

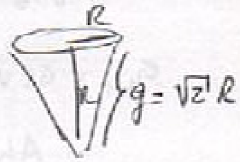
$\iff 2\rho(\rho - R) = 0 \quad \begin{cases}\rho = 0 \text{ no sirve}\\ \rho = R\ ✓.\end{cases}$

$\therefore$ La intersección ocurre cuando $\rho = R \iff \boxed{z=R}$ a altura R

Para calcular el área 2 alternativas $\Rightarrow$ 1) Conocer el área de un cono de altura R y radio basal R.

$\Rightarrow A = \pi R \underbrace{g}_{\text{generatriz}} = \pi R^2\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi R^2$.

2) Usar lo conocido: Hagamoslo!



Parametrización:

$\vec{r}(\theta, z) = (z\cos\theta, z\,\text{sen}\,\theta, z)$ $\quad z \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-z\,\text{sen}\,\theta, z\cos\theta, 0)$ $\quad \frac{\partial r}{\partial z} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -z\,\text{sen}\,\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(z\cos\theta) + \hat{j}(z\,\text{sen}\,\theta) + \hat{k}(-z^2)$$

$$\Rightarrow \| \_ \| = \sqrt{2z^2} = \sqrt{2}\,z.$$

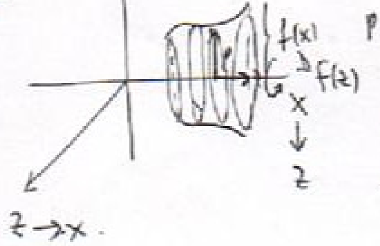
$$\therefore \text{Area} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sqrt{2}\,z\,dz\,d\theta = \sqrt{2}\cdot \cancel{2}\pi \cdot \frac{R^2}{\cancel{2}} = \pi R^2 \cdot \sqrt{2}$$ lo mismo que lo esperado.

b) Basta notar que luego de la $\cap$ la esfera está dentro del cono, como la $\cap$ ocurre a altura $z = R$ $\Rightarrow$ queda la mitad de la esf dentro!

$$\Rightarrow A = \frac{A_{esf}}{2} = \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi R^2 \blacksquare$$

P4) $A_x(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

idea



Para calc. la superf. podríamos: Param. en polares. pero los ejes no son aprop. $\Rightarrow$ intercambiemos x con z.

luego: $\vec{r}(z, \theta) = f(z)\hat{\rho} + z\hat{k}$. $\quad z \in [a, b]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k} + f'(z)\hat{\rho}$ $\quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = f(z)\hat{\theta}$. $\quad \hat{\rho} \to \hat{\theta} \to \hat{k}$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial r}{\partial z} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| = \| f(z)\hat{\theta} \times (\hat{k} + f'(z)\hat{\rho}) \| = \| f(z)\hat{\rho} + f(z)f'(z)(-\hat{k}) \| = \sqrt{f^2(z) + f'^2(z)f^2(z)}$$

$$= f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}$$

$$\therefore \text{ Area} = \int_0^{2\pi}\int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}\,dz\,d\theta = 2\pi\int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}\,dz \underset{\substack{\text{vuelvo}\\ \text{a } x.}}{\uparrow} 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

lo deseado.

Para $A_y(f)$ es análogo.

P5] $x^2+y^2+z^2=1$ esfera

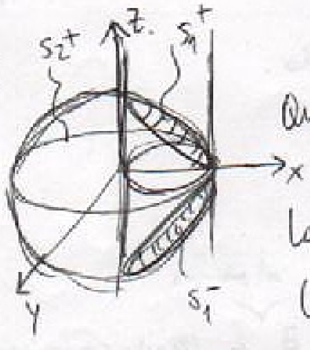
$x^2+y^2=x$ cilindro

$\hookrightarrow (x^2-x+(\frac{1}{2})^2)+y^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ ie. un círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en $(\frac{1}{2},0)$ (2D)

$\Rightarrow$ como z queda libre p/ cada z hay un círculo con centro $(\frac{1}{2},0,z)$. $\Rightarrow$ cilindro. (radio $1/2$)

idea gráfica



S: esfera.

Queremos $\frac{A(S_2)}{A(S_1)}$ notemos que, si $S_1^+ \wedge S_2^+$ representan las regiones de S_1 y S_2 tal que $z\geq 0 \Rightarrow \frac{A(S_2)}{A(S_1)} = \frac{\cancel{2}A(S_2^+)}{\cancel{2}A(S_1^+)}$ (por simetría)

$= \frac{A(S_2^+)}{A(S_1^+)}$

Más aun, como $S_1^+ \cup S_2^+ = S^+$ (esfera tq $z\geq 0$)

$\Rightarrow A(S_1^+)+A(S_2^+) = A(S^+) = \frac{1}{2}A(S) = \frac{4\pi\cdot 1^2}{2} = 2\pi \Rightarrow A(S_2^+) = 2\pi - A(S_1^+)$

$\therefore \frac{A(S_2)}{A(S_1)} = \frac{A(S_2^+)}{A(S_1^+)} = \frac{2\pi - A(S_1^+)}{A(S_1^+)}$ luego basta calcular $A(S_1^+)$.

Parametrización: Como $x^2+y^2+z^2=1$, en cilíndricas (usamos estas y no esféricas pues el cilindro da los límites!)

$\Leftrightarrow \rho^2+z^2=1 \Leftrightarrow \rho=\sqrt{1-z^2}$ ($\rho\geq 0$!)

Así, podemos parametrizar S_1 vía: $\vec{r}(z,\theta) = (\sqrt{1-z^2}\cos\theta, \sqrt{1-z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$

Pregunta ¿y los límites? Usemos la ecc del cilindro:

Obs. $x^2+y^2=x$ solo es el manto $\Rightarrow$ manto $\cap$ esfera = curva no superficie

S_1 es ~~el~~ la superf de esfera dentro del cilindro ie. $x^2+y^2 \leq x$ OJO!

Ahora, como $x^2+y^2\leq x \Leftrightarrow \rho^2 \leq \rho\cos\theta$. pero de $x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \rho^2=1-z^2$

$\Rightarrow 1-z^2 \leq \sqrt{1-z^2}\cos\theta \Leftrightarrow \sqrt{1-z^2}\leq\cos\theta \Leftrightarrow 1-z^2\leq\cos^2\theta \Leftrightarrow 1-\cos^2\theta\leq z^2$

$\Leftrightarrow \cancel{\ \ } \leq |z|$.

$|\mathrm{sen}\,\theta| \leq |z|$.

~~Pues~~ $|\operatorname{sen}\theta| \le |z|$ del graf. es claro que $\theta \in [0, \pi]$

Por sim. estudiamos solo $[0, \pi/2]$ donde $\operatorname{sen}\theta \ge 0$.

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta \le z \quad \therefore \quad \operatorname{sen}\theta \le z \le 1$

↑ cond esfera.

así, la param. es: $\vec{r}(z,\theta) = \left(\sqrt{1-z^2}\cos\theta, \sqrt{1-z^2}\operatorname{sen}\theta, z\right)$ $\quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $z \in [\operatorname{sen}\theta, 1]$.

Calculemos $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\|$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \left(-\sqrt{1-z^2}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{1-z^2}\cos\theta, 0\right) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\cancel{2}z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\theta, \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}\operatorname{sen}\theta, 1\right).$$

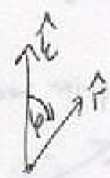
$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\sqrt{1-z^2}\operatorname{sen}\theta & \sqrt{1-z^2}\cos\theta & 0 \\ \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\theta & \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}\operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\sqrt{1-z^2}\cos\theta\right) + \hat{\jmath}\left(\sqrt{1-z^2}\operatorname{sen}\theta\right) + \hat{k}\left(\underbrace{z\operatorname{sen}^2\theta + z\cos^2\theta}_{=z}\right)$$

$$\therefore \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| = \sqrt{(1-z^2)\cos^2\theta + (1-z^2)\operatorname{sen}^2\theta + z^2} = \sqrt{(1-z^2)(\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_{1}) + z^2} = \sqrt{1-z^2+z^2} = \sqrt{1} = 1 \;//$$

así:

$$A(S_1^+) = 2\int_0^{\pi/2}\int_{\operatorname{sen}\theta}^{1} 1\, dz\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \pi - 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta = \pi + 2\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} = \pi + 2((0) - 1) = \pi - 2 \;//$$

$$\therefore \frac{A(S_2)}{A(S_1)} = \frac{2\pi - (\pi - 2)}{\pi - 2} = \frac{\pi + 2}{\pi - 2} \quad \blacksquare$$



P6]

$$\iint_S \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{p}\|}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2 \operatorname{sen}\varphi}{\|R\hat{r} - \|\vec{p}\|\hat{k}\|}\, d\varphi\, d\theta.$$

$$\|R\hat{r} - \|\vec{p}\|\hat{k}\| = \|(R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi) - (0, 0, \|\vec{p}\|)\|$$
$$= \sqrt{R^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + R^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + (R\cos\varphi - \|\vec{p}\|)^2}$$
$$= \sqrt{R^2\operatorname{sen}^2\varphi + R^2\cos^2\varphi - 2R\cos\varphi\|\vec{p}\| + \|\vec{p}\|^2}$$
$$= \sqrt{R^2 + \|\vec{p}\|^2 - 2R\|\vec{p}\|\cos\varphi}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{R^2 + \|\vec{p}\|^2 - 2R\|\vec{p}\|\cos\varphi}}\, d\varphi\, d\theta.$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} \frac{R^2\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{R^2 + \|\vec{p}\|^2 - 2R\|\vec{p}\|\cos\varphi}}\, d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{R^2 + \|\vec{p}\|^2 - 2R\|\vec{p}\|\cos\varphi}}$$

así:

$$\iint_S \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{P}\|}\,dA = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi \; d\varphi}{\sqrt{R^2+\|\vec{P}\|^2-2R\|\vec{P}\|\cos\varphi}}$$

ie.. Tenemos una integral de la forma $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{a-b\cos\varphi}}\,d\varphi$.

$$\int \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{a-b\cos\varphi}}\,d\varphi \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{b}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{b}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{b}\int u^{-1/2}\,du = 2u^{1/2}\cdot\frac{1}{b} = \sqrt{a-b\cos\varphi}\cdot\frac{2}{b}$$

$a-b\cos\varphi = u \Rightarrow \dfrac{du}{d\varphi} = b\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow du = b\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi.$

así,

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{R^2+\|\vec{P}\|^2-2R\|\vec{P}\|\cos\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{R^2+\|\vec{P}\|^2-2R\|\vec{P}\|\cos\varphi}\cdot\frac{2}{\cancel{2}R\|\vec{P}\|}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}R\|\vec{P}\|}\left(\sqrt{(R+\|\vec{P}\|)^2} - \sqrt{(R-\|\vec{P}\|)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\|\vec{P}\|R}\left(R+\|\vec{P}\| - \left|R-\|\vec{P}\|\right|\right)$$

Notar que $\left(R+\|\vec{P}\| - \left|R-\|\vec{P}\|\right|\right) = \begin{cases} 2\|\vec{P}\| & R>\|\vec{P}\| \Leftrightarrow \vec{P}\in \operatorname{int}(S) \\ 2R & R<\|\vec{P}\| \Leftrightarrow \vec{P}\notin\operatorname{int}(S). \end{cases}$

$$\therefore \iint_S \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{P}\|}\,dA = \begin{cases} 2\pi R^2\cdot\dfrac{1}{R\|\vec{P}\|}\cdot 2\|\vec{P}\| & \vec{P}\in\operatorname{int}(S) \\ 2\pi R^2\,\dfrac{1}{R\|\vec{P}\|}\,2R & \vec{P}\notin\operatorname{int}(S) \end{cases}$$

y $d=\|\vec{P}\|$. $\quad = \begin{cases} 4\pi R & \vec{P}\in\operatorname{int}(S) \\ 4\pi R^2/\|\vec{P}\| & \vec{P}\notin\operatorname{int}(S). \end{cases}$ ■

P1] $$Df(x,y,z) = \nabla\left(\frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2+y^2+z^2}\right) \overset{esf}{=} \nabla\left(\frac{\arccos\left(\frac{\cancel{r}\cos\varphi}{\cancel{r}}\right)}{r^2}\right) = \nabla\left(\frac{\arccos(\cos\varphi)}{r^2}\right)$$

$$= \nabla\left(\frac{\varphi}{r^2}\right) \underset{\text{grad esf.}}{=} \frac{1}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}}_{=0}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

$h_r = 1 \quad h_\theta = r\operatorname{sen}\varphi \quad h_\varphi = r$

$$= \frac{-2\varphi}{r^3}\hat{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\hat{\varphi} = \frac{1}{r^3}\left(\hat{\varphi} - 2\varphi\hat{r}\right)$$ ■