<u>Teo.</u> Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo.

Consideremos $f : \Omega \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa (en $\Omega \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$)

Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ cerrado, regular por trozos, simple y recorrido en sentido antihorario y sea D la región encerrada por Γ.

Supongamos que $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$ y escojamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que los discos cerrados $\overline{D}(p_j, \varepsilon) \subseteq \Omega \ \forall j$ y no se intersectan entre sí ($\overline{D}(p_i, \varepsilon) \cap \overline{D}(p_j, \varepsilon) = \phi \ \forall i \neq j$)

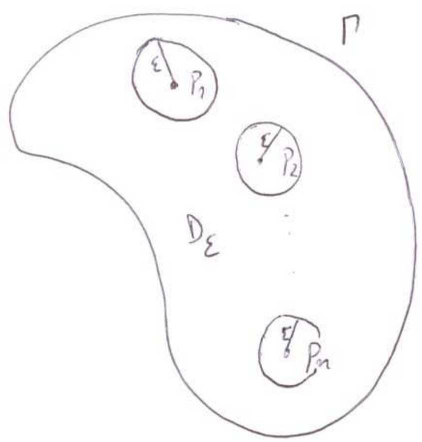
Sea $\gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Entonces:
$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j^*} f(z)\,dz \qquad \text{Donde } \gamma_j^* = \text{Imagen}(\gamma_j) = \gamma_j([0, 2\pi]) = \partial\overline{D}(p_j, \varepsilon).$$

<u>Demostración</u>: La idea de la demostración será construir conjuntos donde se satisfagan las condiciones de Cauchy-Goursat, es decir, conjuntos simplementes conexos donde f sea holomorfa (y debemos recorrer de forma antihoraria). Así, dado $\varepsilon > 0$ del enunciado, consideremos:

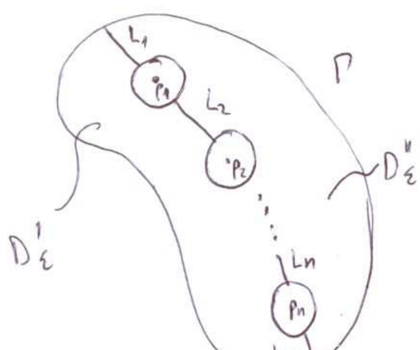
$$D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{D}(p_j, \varepsilon)$$

La idea es "aislar" a los p_j donde f no está definida (o no es holomorfa) y que además tengamos regiones simplemente conexas



Esta región satisface no contener a los p_j $j = 1, \dots, n$ así, f es holomorfa en esta región, pero no es simplemente conexa. Para solucionar esto último hagamos el sgte. procedimiento:

- Agregamos el segmento lineal $L_1 \subseteq D_\varepsilon$ (o una cadena de ser necesario) que una Γ con $\gamma_1^* = \partial D(p_1, \varepsilon)$.
- Luego (y de forma iterativa) agregamos $L_2 \subseteq D_\varepsilon$ tal que una $\gamma_1^* = \partial D(p_1, \varepsilon)$ y $\gamma_2^* = \partial D(p_2, \varepsilon)$
- En general, agregamos $L_{j+1} \subseteq D_\varepsilon$ tal que una γ_j^* con γ_{j+1}^*.
- Finalmente agregamos el segmento L_{n+1} que une γ_n^* con Γ



$D_\varepsilon = D_\varepsilon' \cup D_\varepsilon''$

Esto nos permite dividir D_ε en D_ε' y D_ε'' donde <u>ambas</u> regiones son simplemente conexas.

Más aun, D'_ε y D''_ε son simplemente conexos y no contienen a ningún p_j

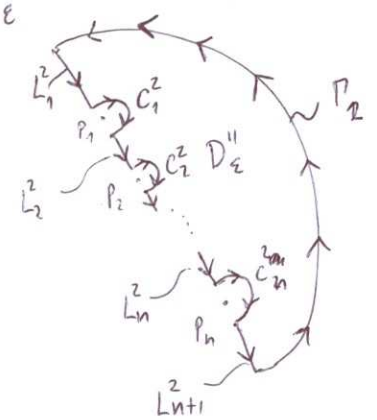
$\Rightarrow$ f es holomorfa en D'_ε y D''_ε simplemente conexos.

$\Rightarrow$ podemos aplicar Cauchy - Goursat en ambas regiones

es decir, $\displaystyle\oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz = \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz = 0 \Rightarrow \oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz + \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz = 0.$

$\partial D'_\varepsilon$ y $\partial D''_\varepsilon$ son los caminos que encierran a las regiones D'_ε y D''_ε, recorridos en sentido antihorario. Para entender mejor los caminos a integrar dibujemos la región y su borde: ↳ pues Γ esta recorrida así!

$\partial D''_\varepsilon$



$\partial D'_\varepsilon$

La orientación de los segmentos lineales y de circunferencias está dado por el sentido de Γ_1 y Γ_2 (antihorario pues Γ va antihorario), además los arcos se toman de la manera del dibujo pues los p_i <u>no</u> estan en D'_ε ni D''_ε.

Notemos que L_i^1 y L_i^2 son el mismo segmento pero recorrido en forma inversa, además, C_j^1 representa al arco de circunferencia de centro p_j asociada a la región D'_ε. Notemos que $C_j^1 \cup C_j^2 = (\gamma_j^*)^- \leftarrow \gamma_j^*$ en sentido <u>HORARIO</u>

así: $$\oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz + \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz = 0 = \left(\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \sum_{j=1}^{n+1}\int_{L_j^1} f(z)dz + \sum_{j=1}^{n}\int_{C_j^1} f(z)dz\right) + \left(\int_{\Gamma_2} fdz + \sum_{j=1}^{n+1}\int_{L_j^2} fdz + \sum_{j=1}^{n}\int_{C_j^2} fdz\right)$$

$$= \int_{\Gamma_1} fdz + \int_{\Gamma_2} fdz + \sum_{j=1}^{n+1}\Big(\overbrace{\int_{L_j^1} fdz + \int_{L_j^2} fdz}^{=0}\Big) + \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{C_j^1} fdz + \int_{C_j^2} fdz\right) = \oint_{\Gamma} fdz + \sum_{j=1}^{n}\oint_{(\gamma_j^*)^-} fdz \overset{\text{Sent. horario}}{=} \oint_{\Gamma} fdz - \sum_{j=1}^{n}\oint_{(\gamma_j^*)} fdz = 0$$ ∎