

Texto de apoyo para Cálculo IV ¹

Juan R. Bobenrieth Hochfärber Jaime H. Ortega Palma Carlos H. Picarte Figueroa

Mayo, 2003

¹Financiado por Proyectos de Docencia códigos FDD00E-T01 y FDD99T-01

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	IV
1. Integrales de Línea	1
1.1. Campos Vectoriales y Campos Escalares	1
1.2. Curvas en \mathbb{R}^n	3
1.3. Curvas suaves y Curvas seccionalmente suaves	6
1.4. Longitud de Arco	7
1.5. Integrales de Línea	8
1.6. El Concepto de Trabajo como Integral de Línea	11
1.7. Integrales de Línea a lo Largo de Curvas Cerradas	12
1.8. Integrales de Línea independientes del camino	13
1.9. Regiones Simplemente Conexas	19
1.10. Buscando funciones potenciales	20
1.11. Teorema de Green para regiones planas simplemente conexas	24
1.12. Teorema de Green para regiones planas múltiplemente conexas	24
1.13. Integrales de Línea con respecto a la Longitud de Arco	26
1.14. Otras aplicaciones de las integrales de línea	27
2. Integrales de Superficie	29
2.1. Representación Paramétrica de una Superficie	29
2.2. Producto Vectorial Fundamental	31
2.3. Superficies Suaves	32
2.4. Área de Superficie	32
2.5. Borde de una Superficie	34
2.6. Superficies Seccionalmente Suaves	35
2.7. Integral de Superficie de un Campo Escalar	36
2.8. Superficies Orientables y Orientación de Superficies	37
2.9. Orientación de superficies seccionalmente suaves	38
2.10. Integral de Superficie de un Campo Vectorial	39
2.11. El Teorema de la Divergencia (o de Gauss)	40
2.12. El Teorema de Stokes	41
2.13. Algunas Aplicaciones de las Integrales de Superficie	46

3. Series de Fourier	51
3.1. Introducción	51
3.2. Series de Fourier	52
3.2.1. Convergencia puntual de una serie de funciones	52
3.2.2. Funciones continuas por tramos	52
3.2.3. Funciones Pares e Impares	53
3.2.4. Series de Fourier	54
3.3. Series de Senos y de Cosenos	58
3.4. Cambio de Intervalo	63
3.5. Integración de Series de Fourier	66
3.6. Problemas de Sturm-Liouville	67
4. Ecuaciones en Derivadas Parciales	69
4.1. Modelo de la Cuerda vibrante. Ecuación unidimensional de onda.	70
4.2. Solución de D'Alembert de la Ecuación de onda	76
4.3. Flujo Unidimensional del Calor	78
5. Variable Compleja	83
5.1. Límite y Continuidad	84
5.2. Derivadas y Funciones Analíticas	84
5.3. Integrales Complejas	88
5.4. Teorema de la Integral de Cauchy	88
5.5. Fórmula de la Integral de Cauchy	89
5.6. Valor medio de una función analítica sobre una circunferencia	90
5.7. Fórmula de la Integral de Cauchy para la derivada de una función analítica	90
5.8. Existencia de las derivadas superiores de una función analítica	90
5.9. Series de potencias complejas	91
5.10. Desarrollo en serie de potencias para funciones analíticas	92
5.11. Ceros de las funciones analíticas	93
5.12. Teorema de identidad para funciones analíticas	93
5.13. Desarrollo de Laurent para funciones analíticas en un anillo	94
5.14. Singularidades aisladas	95
5.15. Residuo de una función en un punto singular aislado	96
5.16. Teorema del Residuo (Cauchy)	97
5.17. Diferencia entre el número de ceros y el número de polos en el interior de un contorno cerrado	98
5.18. Cálculo de integrales reales mediante los residuos	99
6. Ejercicios Resueltos	105
7. Ejercicios Propuestos	137

Agradecimientos

El presente apunte, titulado “ Texto de Apoyo para Cálculo IV ”, fue financiado por el Fondo de Desarrollo de la Docencia (Proyectos de Docencia FDD99T-01 y FDD00E-T01) dependiente de la Vicerrectoría Académica de la Universidad del Bío-Bío.

En primer lugar, queremos agradecer al Señor Manuel Arriagada Muñoz, Director de Pregrado, quien mediante su gestión y apoyo constante en tiempos y facilidades administrativas, nos permitió lograr un buen fin en la confección de este trabajo. También queremos dejar por escrito nuestros sinceros agradecimientos a la Señora Ginette Rivas Velásquez, actual secretaria de la Decanatura de la Facultad de Ciencias, por la dactilografía de los dos primeros borradores de este texto.

Agradecemos a nuestros colegas Señores Gabriel Carrasco, Juan Carlos Ceballos, Víctor Chavez, Gabriel Sanhueza, Humberto Valenzuela, y Juan Carlos Vega, por su tiempo dedicado a las lecturas y revisión de los borradores ; sus comentarios y observaciones permitieron corregir errores y mejorar la exposición. Queremos destacar nuestro especial agradecimiento al profesor Hector Fernando Miranda, por su valioso aporte en la motivación de los conceptos de integral de línea y de área de superficie.

Esperamos alcanzar en parte los objetivos que dieron nacimiento a este texto, y agradecemos de antemano los comentarios y futuros aportes por quienes harán uso de este.

LOS AUTORES

Introducción

La iniciativa de este trabajo nace en parte de conversaciones y comentarios entre colegas, sobre la falta de apoyos bibliográficos alcanzables por los alumnos, en los temas de contenidos y especialmente de ejercicios, en las asignaturas que contemplan Cálculo Vectorial, Series de Fourier, Ecuaciones en derivadas parciales, y Cálculo complejo .

El texto aquí presente toma como base el programa curricular de la asignatura de Cálculo IV para Ingeniería Civil, contemplando teoremas y algunas demostraciones importantes que ayudan al entendimiento intuitivo, sin quitar la posibilidad a estudiantes de otras carreras y de otras asignaturas a hacer uso de este apunte, como un apoyo en los temas de interés particular de sus especialidades. Es así que el texto se compone de cinco capítulos referentes a Integrales de Línea, Integrales de Superficie, Series de Fourier, Ecuaciones diferenciales parciales y Variable compleja, cada uno de los cuales en una estructura básica de motivación, definición, teorema, consecuencia, ejemplo o ejercicio aclaratorio, y aplicaciones. Todo lo anterior complementando con un capítulo de Ejercicios resueltos y otro de Ejercicios propuestos, con la intención de motivar a los alumnos en el desarrollo de su habilidad.

LOS AUTORES

Capítulo 1

Integrales de Línea

1.1. Campos Vectoriales y Campos Escalares

Definición 1.1 1. Si se asigna un vector $\vec{F}(\vec{x})$ a cada punto \vec{x} de un cierto conjunto de puntos en el espacio (por ejemplo los puntos de una curva, una superficie o una región tridimensional), entonces se dice que en esos puntos existe un campo vectorial.

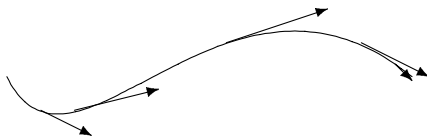


Figura 1.1: Campo de vectores tangenciales a una curva

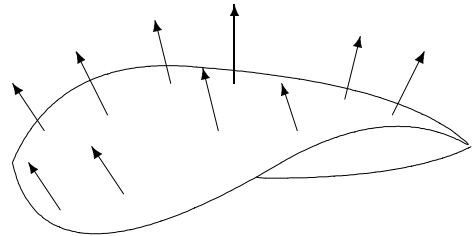


Figura 1.2: Campo de vectores normales a una superficie

Más generalmente: un **campo vectorial** en \mathbb{R}^n es una función $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asocia a cada punto \vec{x} de su dominio D un vector $\vec{F}(\vec{x})$. El campo vectorial se dibuja gráficamente “pegando” una flecha $\vec{F}(\vec{x})$ a cada punto \vec{x} de su dominio.

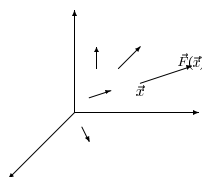


Figura 1.3: Campo vectorial.

2. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia un número real a cada punto \vec{x} de su dominio D es llamado un **campo escalar**. Por ejemplo, un campo vectorial $\vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n tiene n campo escalares componentes f_1, f_2, \dots, f_n de modo que:

$$\vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Ejemplo 1.1 1. Consideremos una pieza de material D , $D \subseteq \mathbb{R}^3$. La temperatura en cada punto dentro de dicho cuerpo define un campo escalar $T : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto T(x, y, z) =$ temperatura en el punto de coordenadas (x, y, z) .

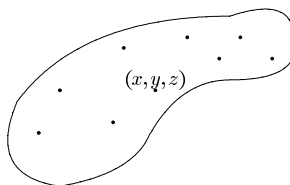


Figura 1.4: Campo escalar temperatura.

2. Según la ley de gravitación de Newton, la fuerza gravitacional $\vec{F}(x, y, z)$ ejercida por una partícula de masa m ubicada en el origen $(0, 0, 0)$ sobre una partícula de masa 1 ubicada en el punto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ está dada por:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (x, y, z),$$

donde G es la constante gravitacional universal. El campo vectorial \vec{F} es un ejemplo de un **Campo de Fuerzas** ($G = 6,67 \times 10^{-11}$ metro - kg - seg).

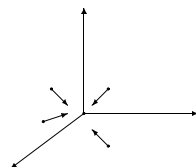
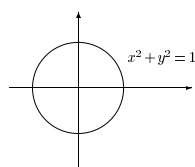


Figura 1.5: Campo de Fuerzas

1.2. Curvas en \mathbb{R}^n

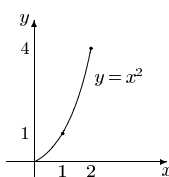
En Cálculos I y II, una curva en \mathbb{R}^2 ha sido definida como el lugar geométrico de aquellos puntos que satisfacen una cierta propiedad que relaciona a x e y . Por ejemplo, la curva definida por: $x^2 + y^2 = 1$



es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, mientras que la curva definida por :

$$y = x^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 2$$

es parte de una parábola.



Esta forma de definir una curva no es adecuada para el estudio de las integrales de línea, en donde **una curva debe ser vista** no solamente como un conjunto de puntos, sino **como un conjunto de puntos que son recorridos en un cierto orden**. Por esta razón, consideremos en adelante las **curvas paramétricas**.

Definición 1.2 Una curva paramétrica C en \mathbb{R}^n es un conjunto dirigido de puntos de la forma:

$$\vec{x} = \vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \quad , \quad a \leq t \leq b \quad (1.1)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son funciones continuas en $[a, b]$; decimos que el conjunto es dirigido porque $\vec{\alpha}$ dicta un orden (o sentido) en el cual los puntos de C son recorridos cuando t varía desde a hacia b . La función $\vec{\alpha}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **representación paramétrica** de C .

Si la función

$$\vec{x} = \vec{\beta}(\tau) = (\beta_1(\tau), \beta_2(\tau), \dots, \beta_n(\tau)), \quad c \leq \tau \leq d \quad (1.2)$$

es continua en $[c, d]$, y existe una función estrictamente creciente σ la cual aplica $[c, d]$ sobre $[a, b]$ (esto es, $\sigma([c, d]) = [a, b]$) y es tal que:

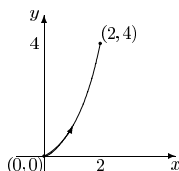
$$\vec{\beta}(\tau) = \vec{\alpha}(\sigma(\tau)), \forall \tau \in [c, d],$$

entonces (1.1) y (1.2) representan la misma curva paramétrica C ; esto es, $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\beta}(\tau)$ recorren el mismo conjunto de puntos, en el mismo orden, cuando t varía de a hacia b y τ varía de c a d . Diremos en este caso que $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son **representaciones paramétricas equivalentes** de C , y que $\vec{\beta}$ es obtenida de $\vec{\alpha}$ por el **cambio de parámetro** $t = \sigma(\tau)$.

Ejemplo 1.2 Las funciones paramétricas:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(t) &= (t^2, t^4) \quad , \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2} \\ \vec{\beta}(\tau) &= ((1+\tau), (1+\tau)^2) \quad -1 \leq \tau \leq 1 \end{aligned}$$

ambos representan el arco parabólico $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, recorrido desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$.



Notar que $\vec{\beta}$ es obtenida de $\vec{\alpha}$ mediante el cambio de parámetro:

$$t = \sigma(\tau) = \sqrt{1+\tau}$$

y a su vez $\vec{\alpha}$ es obtenida de $\vec{\beta}$ por el cambio de parámetro inverso: $\tau = \sigma^{-1}(t) = t^2 - 1$.

Observación 1.1 De aquí en adelante, nos referiremos a las curvas paramétricas simplemente como curvas.

Definición 1.3 Diremos que un punto \vec{x}_0 está sobre la curva C (o en la curva C) definida por (1.1) si existe un $t_0 \in [a, b]$ tal que $\vec{x}_0 = \vec{\alpha}(t_0)$. La colección de todos aquellos puntos es la **traza** de C , y es denotado por $tr(C)$.

El siguiente ejemplo muestra que curvas distintas pueden tener la misma traza.

Ejemplo 1.3 Las funciones paramétricas:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(t) &= (\cos t, \sin t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ \vec{\beta}(\tau) &= (\cos(3\tau), \sin(3\tau)) \quad , \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi \\ \vec{\gamma}(r) &= (\sin r, \cos r) \quad , \quad 0 \leq r \leq 2\pi \end{aligned}$$

tienen la misma traza: la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Sin embargo, cada una de ellas representa una curva paramétrica distinta, dado que: $\vec{\alpha}(t)$ recorre una vez la circunferencia, en sentido contrario al de las agujas del reloj, comenzando y terminando en $(1, 0)$, cuando t recorre $[0, 2\pi]$.

$\vec{\beta}(\tau)$ recorre tres veces la circunferencia, en sentido contrario al de las agujas del reloj, comenzando y terminando en $(1, 0)$, cuando τ recorre $[0, 2\pi]$.

$\vec{\gamma}(r)$ recorre una vez la circunferencia, en el sentido de las agujas del reloj, comenzando y terminando en $(0, 1)$, cuando r recorre $[0, 2\pi]$.

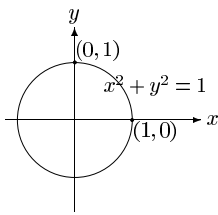
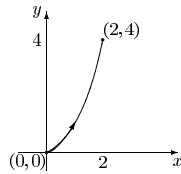


Figura 1.6: circunferencia unitaria

Definición 1.4 Sea C la curva definida por (1.1). Entonces $\vec{\alpha}(a)$ y $\vec{\alpha}(b)$ son el punto inicial y el punto terminal de C , respectivamente. Si $\vec{\alpha}(a) = \vec{\alpha}(b)$, C se dice una curva **cerrada**. Si $\vec{\alpha}(t_1) \neq \vec{\alpha}(t_2)$ siempre que $a \leq t_1 < t_2 < b$ o $a < t_1 < t_2 \leq b$; entonces C se dice una curva **simple**.

Definición 1.5 Una curva (paramétrica) se llama una **curva cerrada simple** (o **curva de Jordan**) si ella es cerrada y es simple.

Ejemplo 1.4 1. La curva definida por: $\vec{x} = \vec{\alpha}(t) = (t^2, t^4)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$, es una curva simple.

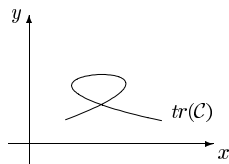


2. La curva definida por:

$$\vec{x} = \vec{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

es una curva cerrada simple, mientras que la curva definida por: $\vec{x} = \vec{\beta}(\tau) = (\cos(3\tau), \sin(3\tau))$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, es cerrada pero no simple.

3. Si la $tr(\mathcal{C})$ es como en la siguiente figura, entonces \mathcal{C} no es simple:



Si \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 consisten de los mismo puntos, pero recorridos en sentidos opuestos, diremos que \mathcal{C}_1 es la curva negativa de \mathcal{C} , y escribimos: $\mathcal{C}_1 = -\mathcal{C}$ y $\mathcal{C} = -\mathcal{C}_1$. Más precisamente:

Definición 1.6 Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 las curvas definidas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \vec{x} = \vec{\alpha}(t) &= (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \quad , \quad a \leq t \leq b. \\ \mathcal{C}_1 : \vec{x} = \vec{\beta}(\tau) &= (\beta_1(\tau), \dots, \beta_n(\tau)) \quad , \quad c \leq \tau \leq d. \end{aligned}$$

Si existe una función estrictamente decreciente μ la cual aplica $[c, d]$ sobre $[a, b]$ y es tal que: $\vec{\beta}(\tau) = \vec{\alpha}(\mu(\tau))$, $\forall \tau \in [c, d]$, entonces diremos que \mathcal{C}_1 es la curva negativa de \mathcal{C} , $\mathcal{C}_1 = -\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.5 La función paramétrica $\vec{\alpha}(t) = (2 \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, representa la mitad superior de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ recorrida desde $(2, 0)$ a $(-2, 0)$. Si esta curva es \mathcal{C} , entonces la función paramétrica: $\vec{\beta}(\tau) = \vec{\alpha}(-\tau) = (2 \cos(-\tau), \sin(-\tau)) = (2 \cos \tau, -\sin \tau)$, $-\pi \leq \tau \leq 0$, representa a $-\mathcal{C}$.

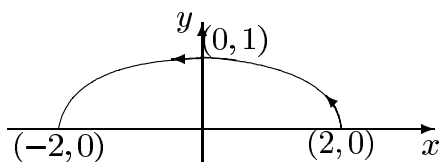


Figura 1.7: Curva \mathcal{C}

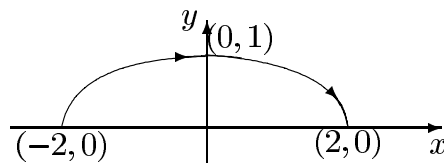
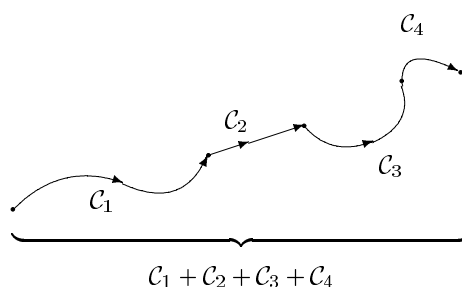


Figura 1.8: Curva $-\mathcal{C}$

Observación 1.2 Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$ son curvas paramétricas en \mathbb{R}^n tal que el punto terminal de \mathcal{C}_i coincide con el punto inicial de \mathcal{C}_{i+1} , $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, entonces escribiremos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \dots + \mathcal{C}_k$, para denotar a la curva obtenida recorriendo $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$ en este orden.



1.3. Curvas suaves y Curvas seccionalmente suaves

La derivada de una función paramétrica $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es $\vec{\alpha}'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))$ para cada $t \in [a, b]$ en el cual $(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))$ exista. Aquí $\alpha'_i(a)$ y $\alpha'_i(b)$ deben ser interpretados como derivada a la derecha y a la izquierda, respectivamente.

Definición 1.7 1. Una curva C se dice ser **suave** si puede ser representada por $\vec{x} = \vec{\alpha}(t)$, $a \leq t \leq b$, donde $\vec{\alpha}$ tiene derivada continua en $[a, b]$ y $\vec{\alpha}'(t) \neq (0, 0, \dots, 0) \forall t \in]a, b[$.

2. Una curva C se dice ser **seccionalmente suave** si $C = C_1 + C_2 + \dots + C_k$, donde C_1, C_2, \dots, C_k son suaves.

Ejemplo 1.6 1. La circunferencia unitaria es una curva suave. En efecto, ella puede ser representada por:

$$\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Claramente $\vec{\alpha}$ tiene derivada $\vec{\alpha}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, la cual es continua en $[0, 2\pi]$, y además: $\vec{\alpha}'(t) \neq (0, 0), \forall t \in]0, 2\pi[$. (Notar que $\vec{\alpha}'(t) \cdot \vec{\alpha}(t) = 0 \forall t$, es decir el vector tangente es perpendicular al vector radio en todo punto.)

2. La curva $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), -2\pi \leq t \leq 2\pi$, la cual representa dos arcos de un cicloide, es seccionalmente suave. En efecto:

$$\vec{r}'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

$$\vec{r}'(t) = (0, 0) \iff t = -2\pi, 0, 2\pi$$

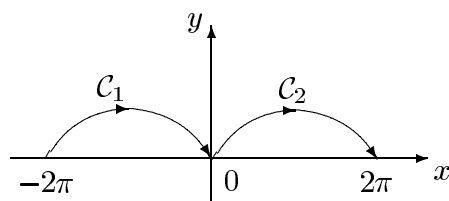


Figura 1.9: $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), -2\pi \leq t \leq 2\pi$

1.4. Longitud de Arco

Por definición, la longitud del segmento de recta de \vec{x}_1 a \vec{x}_2 en \mathbb{R}^n es $\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|$. La siguiente definición extiende la noción de longitud a curvas más complicadas.

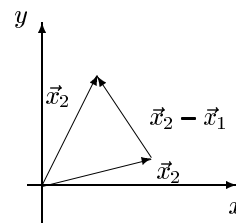


Figura 1.10: Distancia entre \vec{x}_1 y \vec{x}_2

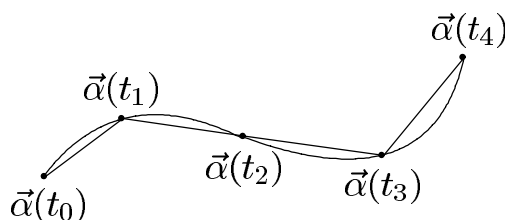
Definición 1.8 Supongamos que C es una curva representado por $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ una partición de $[a, b]$, y definamos:

$$L_P(C) = \sum_{j=1}^k \|\vec{\alpha}(t_j) - \vec{\alpha}(t_{j-1})\|$$

Entonces C se dice ser **rectificable** si el conjunto $\{L_P(C) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$ es acotado superiormente, en cuyo caso la **longitud de arco** de C se define como:

$$\mathcal{L}(C) = \sup\{L_P(C) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

(En palabras simples, una curva es **rectificable** si es de **longitud finita**).



Teorema 1.1 Si $C = C_1 + C_2 + \dots + C_k$, entonces C es rectificable si y sólo si C_1, C_2, \dots, C_k son rectificables, en cuyo caso $\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(C_1) + \mathcal{L}(C_2) + \dots + \mathcal{L}(C_k)$

Teorema 1.2 Si C es una curva suave con la representación paramétrica suave $\vec{x} = \vec{\alpha}(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces C es rectificable y

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)\| dt$$

Ejemplo 1.7 1. La longitud de arco de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$ es:

$$C : \vec{\alpha}(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathcal{L}(C) = \int_0^{2\pi} \|(-r \sin t, r \cos t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

2. La longitud del segmento de hélice circular parametrizado por $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es:

$$\mathcal{L}(C) = \int_0^{2\pi} \|(-\sin t, \cos t, 1)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+1} dt = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

1.5. Integrales de Línea

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio a lo largo de una curva C bajo la acción de un campo de fuerzas \vec{F} . Uno de los conceptos fundamentales en física es el **trabajo** realizado por el campo de fuerzas sobre la partícula cuando esta describe la curva. Si C es un desplazamiento rectilíneo dado por un vector \vec{d} y \vec{F} es una fuerza constante, entonces por física elemental se sabe que el trabajo realizado por \vec{F} al mover la partícula es “fuerza por desplazamiento,” esto es,

$$\text{trabajo} = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Ahora, en el caso general, esto es si la trayectoria C es no necesariamente recta y la fuerza es no necesariamente constante, podemos aproximar la curva por un número finito de desplazamientos rectos, y entonces llegar a una fórmula para el trabajo realizado por el campo de fuerzas \vec{F} . Precisaremos esto a continuación.

Supongamos que C es una curva representado por $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si t varía en un intervalo pequeño de t_i a $t_i + \Delta t$, la partícula se moverá desde $\vec{\alpha}(t_i)$ a $\vec{\alpha}(t_i + \Delta t)$, en un desplazamiento vectorial $\Delta \vec{d} = \vec{\alpha}(t_i + \Delta t) - \vec{\alpha}(t_i)$. Por la definición de derivada tenemos la aproximación $\Delta \vec{d} \approx \vec{\alpha}'(t_i) \Delta t$. Por lo tanto, el trabajo realizado al ir desde $\vec{\alpha}(t_i)$ a $\vec{\alpha}(t_i + \Delta t)$ es aproximadamente :

$$\vec{F}(\vec{\alpha}(t_i)) \cdot \Delta \vec{d} \approx \vec{F}(\vec{\alpha}(t_i)) \cdot \vec{\alpha}'(t_i) \Delta t$$

Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces el trabajo realizado por \vec{F} es aproximadamente :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{\alpha}(t_i)) \cdot \vec{\alpha}'(t_i) \Delta t$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ esta aproximación es cada vez mejor, por lo cual es razonable tomar como definición de trabajo al límite de la suma anterior (cuando $n \rightarrow \infty$). Pero, por lo visto en el curso de Cálculo II, este límite es precisamente la integral :

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt.$$

Este concepto físico nos conduce a la siguiente definición matemática :

Definición 1.9 Supongamos que C es una curva suave en \mathbb{R}^n y que \vec{F} es un campo vectorial definido y continuo sobre la $tr(C)$. Entonces la integral de línea de \vec{F} a lo largo de C está definida por:

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt}$$

donde $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una representación suave de C . (aquí “ \cdot ” denota el producto escalar de vectores)

Observación 1.3 1. La definición anterior también se puede dar si C es una curva con representación paramétrica $\vec{\alpha}$ de clase C^1 y \vec{F} es un campo vectorial continuo sobre la $tr(C)$.

2. Para que la definición anterior tenga sentido, se debe probar que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

es independiente de la representación suave escogida para C . Para esto, supongamos que $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\vec{\beta} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son representaciones equivalentes de C , con:

$$\vec{\beta}(\tau) = \vec{\alpha}(\sigma(\tau)) \quad , \quad c \leq \tau \leq d$$

donde σ tiene derivada continua y aplica $[c, d]$ sobre $[a, b]$. Si $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt &= \int_a^b \left[\sum_{j=1}^n F_j(\vec{\alpha}(t)) \alpha_j'(t) \right] dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_a^b F_j(\vec{\alpha}(t)) \alpha_j'(t) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^n \int_c^d F_j(\vec{\alpha}(\sigma(\tau))) \alpha_j'(\sigma(\tau)) \sigma'(\tau) d\tau \end{aligned}$$

((*): Aplicamos el cambio de variables $t = \sigma(\tau)$).

Como $\alpha_j(\sigma(\tau)) = \beta_j(\tau)$, entonces la regla de la cadena dice que:

$$\alpha'_j(\sigma(\tau))\sigma'(\tau) = \beta'_j(\tau)$$

Luego :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_c^d F_j(\vec{\alpha}(\sigma(\tau)))\alpha'_j(\sigma(\tau))\sigma'(\tau)d\tau &= \sum_{j=1}^n \int_c^d F_j(\vec{\beta}(\tau))\beta'_j(\tau)d\tau \\ &= \int_c^d \left[\sum_{j=1}^n F_j(\vec{\beta}(\tau))\beta'_j(\tau) \right] d\tau \\ &= \int_c^d \vec{F}(\vec{\beta}(\tau)) \cdot \vec{\beta}'(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

no depende de la representación suave escogida para C .

Definición 1.10 Si $C = C_1 + C_2 + \dots + C_k$ es una curva seccionalmente suave, y \vec{F} es una campo vectorial definido y continuo sobre la $tr(C)$, entonces la $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$ se define como:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Teorema 1.3 Si C es una curva seccionalmente suave y \vec{F} es un campo vectorial definido y continuo sobre la $tr(C)$, entonces:

$$\boxed{\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}}$$

Ejercicio 1.1 Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$, donde $n = 2$, $\vec{F}(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$, y C es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$, seguido por el segmento de recta desde $(0,1)$ a $(1,1)$.

Solución :

$C = C_1 + C_2$, donde C_1 es el arco de circunferencia y C_2 es el segmento de recta.

Por definición, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$

Parametrizando C_1 por $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, tenemos:

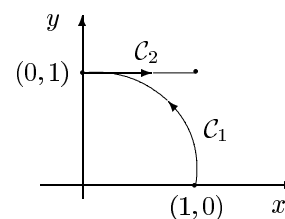


Figura 1.11: $C = C_1 + C_2$

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1, 2 \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t + 2 \cos^2 t \sin t) dt \\
&= [\cos t - \frac{2}{3} \cos^3 t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Parametrizando C_2 como $\vec{\beta}(t) = (t, 1), 0 \leq t \leq 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_0^1 \vec{F}(t, 1) \cdot (1, 0) dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + 1, 2t)(1, 0) dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + 1) dt \\
&= \frac{t^3}{3} + t \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$$

Observación 1.4 Resulta conveniente escribir las integrales de línea menos formalmente. Si $n = 2$, usualmente escribiremos:

$$\int_C P dx + Q dy \text{ o bien } \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \text{ para referirnos a } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} \text{ con } \vec{F} = (P, Q).$$

Una similar notación se usa para n arbitrario. Por ejemplo si $n = 3$ y $\vec{F} = (P, Q, R)$ entonces la $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$ se escribe usualmente en la forma:

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

Ejemplo 1.8 La integral de línea del ejercicio anterior se escribe como $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$

El siguiente Teorema nos habla sobre la propiedad de **linealidad** de las integrales de línea, y se sigue directamente de la definición.

Teorema 1.4 Si C es una curva seccionalmente suave, \vec{F} y \vec{G} son campos vectoriales continuos sobre la $tr(C)$, y a, b son constantes, entonces:

$$\int_C (a\vec{F} + b\vec{G}) \cdot d\vec{x} = a \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} + b \int_C \vec{G} \cdot d\vec{x}$$

1.6. El Concepto de Trabajo como Integral de Línea

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una curva C bajo la acción de un campo de fuerzas \vec{F} . El **trabajo** W realizado por \vec{F} se define como:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Los ejemplos siguientes ponen de manifiesto algunas de las propiedades fundamentales del trabajo.

Ejemplo 1.9 (Trabajo realizado por una fuerza constante). Si \vec{F} es una fuerza constante, a saber $\vec{F} = \vec{k}$, puede demostrarse que el trabajo realizado por \vec{F} al mover una partícula desde un punto \vec{a} a un punto \vec{b} a lo largo de cualquier camino seccionalmente suave que une \vec{a} y \vec{b} es $\vec{k} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, es decir el producto escalar de la fuerza \vec{k} por el desplazamiento $(\vec{b} - \vec{a})$. Lo demostraremos en el caso particular que el camino sea suave.

Sea C un camino suave que une \vec{a} y \vec{b} , con parametrización suave $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Luego $\vec{\alpha}(a) = \vec{a}$, $\vec{\alpha}(b) = \vec{b}$, $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt \\ &= \int_a^b (k_1, \dots, k_n) \cdot (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t)) dt \\ &= \int_a^b [k_1 \alpha_1'(t) + \dots + k_n \alpha_n'(t)] dt \\ &= k_1 \int_a^b \alpha_1'(t) dt + \dots + k_n \int_a^b \alpha_n'(t) dt \\ &= k_1 [\alpha_1(b) - \alpha_1(a)] + \dots + k_n [\alpha_n(b) - \alpha_n(a)] \\ &= (k_1, \dots, k_n) \cdot (\alpha_1(b) - \alpha_1(a), \dots, \alpha_n(b) - \alpha_n(a)) \\ &= (k_1, \dots, k_n) \cdot [(\alpha_1(b), \dots, \alpha_n(b)) - (\alpha_1(a), \dots, \alpha_n(a))] \\ &= (k_1, \dots, k_n) \cdot [\vec{b} - \vec{a}] \\ &= \vec{k} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \end{aligned}$$

Para este campo de fuerzas constantes, el trabajo depende solamente de los puntos extremos \vec{a} y \vec{b} y no de la curva que los une. No todos los campos de fuerza tienen esta propiedad. Los que la tienen se llaman **Conservativos**.

Ejemplo 1.10 (Principio del trabajo y la energía) Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva bajo la acción de un campo de fuerzas \vec{F} . Si la rapidez de la partícula en el instante t es $v(t)$, su energía cinética está definida por $\frac{1}{2}mv^2(t)$. Demostrar que la variación de la energía cinética en cualquier intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por \vec{F} durante dicho intervalo de tiempo.

Solución:

Designemos por $\vec{r}(t)$ a la posición de la partícula en el instante t . El trabajo realizado por \vec{F} durante un intervalo de tiempo $[a, b]$ es

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Queremos demostrar que:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a)$$

Según la segunda ley del movimiento de Newton tenemos:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{r}''(t) = m\vec{v}'(t),$$

donde $\vec{v}(t)$ designa el vector velocidad en el instante t . La rapidez es la longitud del vector velocidad, $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) = m \cdot \vec{v}'(t) \cdot \vec{v}(t) \\ &= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v^2(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v^2(t)) dt = \frac{1}{2}mv^2(t) \Big|_a^b = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a),$$

como queríamos probar.

1.7. Integrales de Línea a lo Largo de Curvas Cerradas

El punto inicial y terminal de una curva cerrada parece especial simplemente porque éste es el punto en el cual el recorrido de la curva comienza y termina. Sin embargo, si cambiamos el parámetro de tal forma que otro punto juegue este rol, entonces no cambiará el valor de la integral de línea a lo largo de la curva. Para hacer preciso lo anterior, sea $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de \mathcal{C} , supongamos que $a < c < b$, y sea \mathcal{C}_1 la curva parametrizada por $\vec{\beta} : [c, c + b - a] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

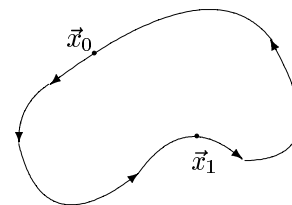


Figura 1.12: Curva cerrada

$$\vec{\beta}(\tau) = \begin{cases} \vec{\alpha}(\tau), & \text{si } c \leq \tau \leq b \\ \vec{\alpha}(\tau - b + a), & \text{si } b \leq \tau \leq c + b - a \end{cases}$$

Así, $\vec{x}_1 = \vec{\beta}(c) = \vec{\alpha}(c)$ es el punto inicial y terminal de \mathcal{C}_1 (notar que $tr(\mathcal{C}) = tr(\mathcal{C}_1)$).

Notemos que si \vec{F} es un campo vectorial continuo sobre la $tr(\mathcal{C})$ y \mathcal{C} es suave, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_c^{c+b-a} \vec{F}(\vec{\beta}(\tau)) \vec{\beta}'(\tau) d\tau \\ &= \int_c^b \vec{F}(\vec{\alpha}(\tau)) \cdot \vec{\alpha}'(\tau) d\tau + \int_b^{c+b-a} \vec{F}(\vec{\alpha}(\tau - b + a)) \cdot \vec{\alpha}'(\tau - b + a) d\tau \end{aligned}$$

Reemplazando τ por t en la primera integral, y haciendo el cambio de variable $t = \tau - b + a$ en la segunda integral, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_c^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt + \int_a^c \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt \\ &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$

Si \mathcal{C} es seccionalmente suave, entonces también se cumple que:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Por lo tanto, cuando hablemos de una integral de línea a lo largo de una curva cerrada, no será necesario especificar el punto inicial. (Observar que lo que sí hace cambiar el valor de la integral a lo largo de una curva cerrada, es cuando uno cambia el número de veces en que recorre la curva, y también cuando uno cambia el sentido de recorrido).

1.8. Integrales de Línea independientes del camino

Ejercicio 1.2 Considerar las siguientes curvas que unen $(0,0)$ con $(1,1)$

\mathcal{C}_1 : la parte de la parábola $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$.

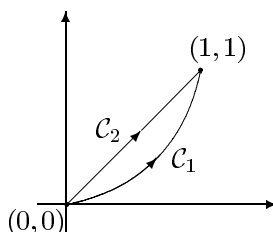
\mathcal{C}_2 : el segmento de recta que va desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$.

1. Si \vec{F} es el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x + y^2, x^2)$, calcular $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{x}$ y $\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$
2. Si \vec{F} es el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (2xy^2 + 1, 2x^2y)$, calcular $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{x}$ y $\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$.

Solución:

$$C_1 : \vec{\alpha}_1(t) = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 : \vec{\alpha}_2(t) = (t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$



1.

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\alpha}_1(t)) \cdot \vec{\alpha}'_1(t) dt = \int_0^1 (t + t^4, t^2) \cdot (1, 2t) dt =$$

$$\int_0^1 (t + t^4 + 2t^3) dt = \left. \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{6}{5}$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\alpha}_2(t)) \cdot \vec{\alpha}'_2(t) dt = \int_0^1 (t + t^2, t^2) \cdot (1, 1) dt$$

$$= \int_0^1 (t + t^2 + t^2) dt = \int_0^1 (t + 2t^2) dt = \left. \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t^3 \right|_0^1 =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} (\neq \frac{6}{5})$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} \neq \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

2.

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \vec{F}(\alpha_1(t)) \cdot \alpha'_1(t) dt = \int_0^1 (2t^5 + 1, 2t^4) \cdot (1, 2t) dt$$

$$= \int_0^1 (2t^5 + 1 + 4t^5) dt = \int_0^1 (6t^5 + 1) dt = t^6 + t \Big|_0^1 = 2.$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \vec{F}(\alpha_2(t)) \cdot \alpha'_2(t) dt = \int_0^1 (2t^3 + 1, 2t^3) \cdot (1, 1) dt =$$

$$\int_0^1 (2t^3 + 1 + 2t^3) dt = \int_0^1 (4t^3 + 1) dt = t^4 + t \Big|_0^1 = 2.$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}.$$

Se observa que para el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x + y^2, x^2)$, $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} \neq \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$, a pesar de que C_1 y C_2 tienen el mismo punto inicial y el mismo punto terminal; es decir las integrales de línea de este campo sí dependen del camino a lo largo del cual se integre.

Por otro lado, para el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2xy^2 + 1, 2x^2y)$ se observa que $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$; aún más, en este caso se puede probar que para todo par de curvas C_1, C_2 en \mathbb{R}^2 con el mismo punto inicial (x_0, y_0) y el mismo punto terminal (x_1, y_1) se cumple la igualdad.

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Es decir, que las integrales de línea de $\vec{F}(x, y) = (2xy^2 + 1, 2x^2y) = (P, Q)$ son independientes del camino a lo largo del cual se integre, sólo dependen del punto inicial y del punto terminal del camino. Notar que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 4xy = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, condición que no cumple el campo vectorial dado en 1. Más adelante veremos que esta es una condición necesaria (pero no suficiente) para que las integrales de línea de un campo sean independientes del camino.

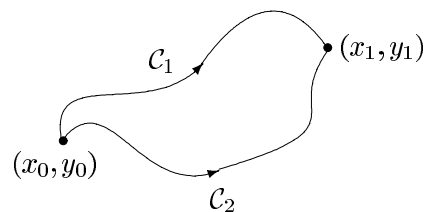


Figura 1.13: Independencia del camino

Definición 1.11 Si \vec{F} es un campo vectorial continuo en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

para todo par de curvas seccionalmente suaves C_1, C_2 contenidas en D con el mismo punto inicial y el mismo punto terminal, entonces se dice que las integrales de línea de \vec{F} son **independientes del camino** en D . En este caso escribimos:

$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{F} \cdot d\vec{x}$, para denotar la integral de línea de \vec{F} a lo largo de cualquier curva seccionalmente suave en D desde \vec{x}_0 hasta \vec{x}_1 .

Se tiene la siguiente equivalencia:

Teorema 1.5 Supongamos que \vec{F} es un campo vectorial continuo en un abierto D . Entonces: Las integrales de línea de \vec{F} son independientes del camino en D si y sólo si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$ para toda curva cerrada C (seccionalmente suave) contenida en D .

Demostración:

En primer lugar, supongamos que las integrales de línea de \vec{F} son independientes del camino en D y probemos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$ para toda curva cerrada C contenida en D .

Sea $C \subseteq D$ una curva cerrada. Si fijamos dos puntos \vec{x}_0, \vec{x}_1 en C , entonces ellos dividen a C en dos curvas C_1, C_2 , que mantienen el mismo sentido de C , y $C = C_1 + C_2$. Dado que C_1 y $-C_2$ tienen el mismo punto inicial y el mismo punto terminal, entonces por hipótesis se tiene que:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x},$$

de donde

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$$

Recíprocamente, supongamos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$ para toda curva cerrada contenida en D y probemos que las integrales de línea de \vec{F} son independientes del camino en D .

Sean C_1, C_2 dos curvas contenidas en D con el mismo punto inicial y el mismo punto terminal. Consideremos la curva $C = C_1 + (-C_2)$. Claramente C es una curva cerrada contenida en D . Por hipótesis, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$. Pero ocurre que:

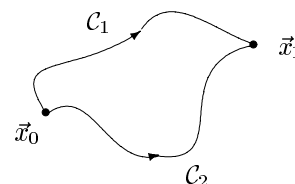


Figura 1.16: $C = C_1 + (-C_2)$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_{C_1 + (-C_2)} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}, \end{aligned}$$

y luego:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0,$$

de donde:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

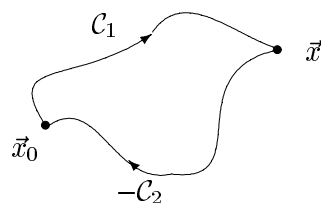


Figura 1.17: $C = C_1 + (-C_2)$

Antes de enunciar el siguiente resultado, necesitamos dar dos definiciones:

Definición 1.12 Se dice que un campo vectorial $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **conservativo** si existe un campo escalar diferenciable $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x) = \nabla f(x), \forall x \in D$. En este caso, a f se le llama un **potencial** de \vec{F} .

(Recordar que $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$).

Definición 1.13 Sea D un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . El conjunto D se llama **conexo** si todo par de puntos de D puede unirse mediante un camino seccionalmente suave contenido en D .

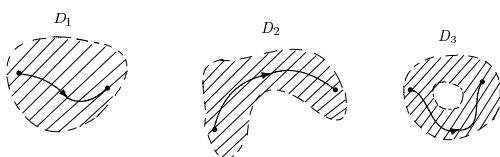


Figura 1.18: D_1, D_2 y D_3 son abiertos conexos de \mathbb{R}^2

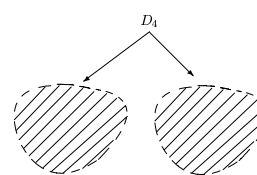


Figura 1.19: D_4 (unión de dos abiertos disjuntos) no es conexo

Consideremos ahora el siguiente importante:

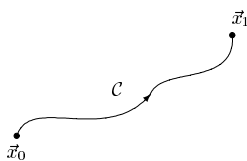
Teorema 1.6 Supongamos que \vec{F} es un campo vectorial continuo en el abierto conexo D . Entonces, las integrales de línea de \vec{F} son independientes del camino en D si y sólo si existe un campo escalar f definido en D tal que $\vec{F} = \nabla f$, esto es, si y sólo si \vec{F} es conservativo en D .

Observación 1.5 En el caso que $\vec{F} = \nabla f$, se cumple que si C es cualquier curva seccionalmente suave contenida en D , con punto inicial \vec{x}_0 y punto terminal \vec{x}_1 , entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_0), \quad \text{es decir que :} \quad \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \nabla f \cdot d\vec{x} = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_0).$$

Observación 1.6 De los dos últimos teoremas podemos concluir lo siguiente: Si $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo en un abierto conexo D , entonces las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Las integrales de línea de \vec{F} son independientes del camino en D .
2. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$ para toda curva cerrada C (seccionalmente suave) contenida en D .

Figura 1.20: Curva que une \vec{x}_0 con \vec{x}_1

3. Existe un campo escalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Sin un método para determinar si un campo vectorial \vec{F} es conservativo o no, el Teorema anterior es de poco valor práctico para calcular integrales de línea. El siguiente Teorema nos dará condiciones necesarias para que \vec{F} sea conservativo.

Teorema 1.7 Si $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ es un campo vectorial conservativo de clase C^1 en un abierto conexo D de \mathbb{R}^n , entonces:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x), \forall x \in D \text{ y } \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.3)$$

Demostración: Si $\vec{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, entonces:

$$(F_1, \dots, F_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

es decir:

$$F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Luego:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

y como \vec{F} es de clase C^1 en D , entonces f es de clase C^2 en D , de donde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \forall x \in D,$$

es decir que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in D \text{ y } \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Observación 1.7 1. Si $n = 2$ y $\vec{F} = (P, Q)$, entonces las condiciones (1.3) se reducen a: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

2. Si $n = 3$ y $\vec{F} = (P, Q, R)$, entonces las condiciones (1.3) se reducen a: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$. Para este caso, existe una formulación equivalente del Teorema anterior, en términos del llamado **Rotacional** de \vec{F} . Más precisamente tenemos la siguiente definición: Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial definido en un abierto conexo D de \mathbb{R}^3 , entonces se define el **rotacional** de \vec{F} , $\text{rot}\vec{F}$, como el campo vectorial $\text{rot}\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\text{rot}\vec{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$. Esta definición es fácil de recordar si escribimos formalmente:

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (= \nabla \times \vec{F})$$

El teorema anterior nos dice que: “si $\vec{F} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial conservativo de clase C^1 en un abierto conexo D de \mathbb{R}^3 , entonces $\text{rot}\vec{F}(x) = (0, 0, 0) \forall x \in D$ ”

3. Las condiciones (1.3) son necesarias pero no suficientes para que \vec{F} sea conservativo en un abierto conexo D .

Por ejemplo el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\vec{F}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ es de clase C^1 , y satisface (1.3), ya que $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

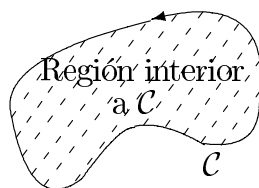
Sin embargo, \vec{F} no es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ ya que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 2\pi \neq 0$, donde C es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, $x^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

1.9. Regiones Simplemente Conexas

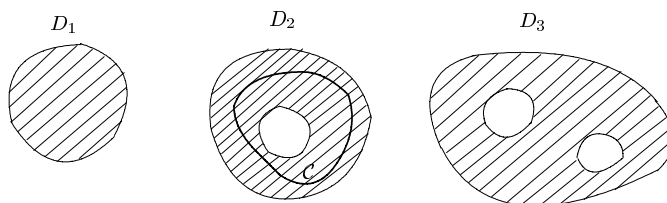
Para poder afirmar que las integrales de línea de \vec{F} son independientes del camino en D siempre que \vec{F} es de Clase C^1 y satisface (1.3) en D , nosotros necesitamos una suposición adicional sobre D : que sea **simplemente conexo**. Intuitivamente esto significa que toda curva cerrada C contenida en D puede ser deformada, sin quebrarse y sin salirse de D , hasta reducirse a un punto.

Un abierto conexo en \mathbb{R}^2 es simplemente conexo si no tiene hoyos. A continuación veremos la definición precisa de este concepto, pero antes de ello observaremos lo siguiente:

Observación 1.8 Si C es una curva de Jordan (= curva cerrada simple) en el plano, entonces C divide a $\mathbb{R}^2 - C$ en dos conjuntos abiertos conexos y disjuntos que tienen a la curva C como frontera común. Una de esas regiones es acotada y se llama la **región interior a C** . La otra es no-acotada y se llama la **región exterior a C** .

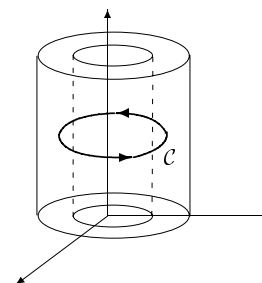
Figura 1.21: Región interior a C

Definición 1.14 Sea D un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^2 . Se dice que D es **simplemente conexo** si, para toda curva de Jordan C contenida en D , la región interior a C es también un subconjunto de D . En la siguiente figura, D_1 es simplemente conexo, y D_2 y D_3 no lo son.



En \mathbb{R}^3 , la región entre dos esferas concéntricas es simplemente conexa, pero la región entre cilindros: $D = \{(x, y, z) : 1 < x^2 + y^2 < 4, 0 < z < 1\}$ no es simplemente conexa, debido a que la curva cerrada C mostrada en la figura, es imposible deformarla (sin quebrarse y sin salirse de D) hasta reducirla a un punto.

Existe una definición precisa y general para el concepto de conjunto simplemente conexo en \mathbb{R}^n ($\forall n$). Antes de darla, necesitamos ver el concepto de curvas cerradas homotópicas.

Figura 1.22: Región no simplemente conexa en \mathbb{R}^3

Definición 1.15 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y C_1, C_2 dos curvas cerradas contenidas en D con parametrizaciones $\vec{\alpha}, \vec{\beta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente, tales que $\vec{\alpha}(a) = \vec{\alpha}(b) = \vec{\beta}(a) = \vec{\beta}(b)$. Se dice que C_1 es **homotópica** a C_2 si existe una función continua $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ tal que :

$$\begin{cases} H(t, 0) = \vec{\alpha}(t), & \forall t \in [a, b] \\ H(t, 1) = \vec{\beta}(t), & \forall t \in [a, b] \\ H(a, s) = H(b, s) = \vec{\alpha}(a) = \vec{\alpha}(b), & \forall s \in [0, 1] \end{cases}$$

Definición 1.16 Sea D un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n . Se dice que D es **simplemente conexo** si toda curva cerrada seccionalmente suave C contenida en D es homotópica a una curva constante, esto es si toda curva cerrada $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es homotópica a una curva $\vec{\beta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{\beta}(t) = \vec{\beta}(a) \forall t \in [a, b]$.

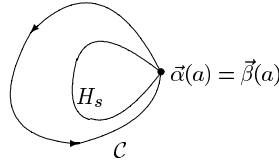


Figura 1.23: Curvas homotópicas

Observación 1.9 1. Recordemos que un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama **convexo** si $\forall x_0, x_1 \in D$, el segmento de recta que une a x_0 con x_1 está contenido en D . Es fácil probar que todo conjunto convexo es simplemente conexo.

2. \mathbb{R}^n es simplemente conexo, $\forall n$.

3. $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ no es simplemente conexo.

4. Un conjunto abierto y conexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, que no es simplemente conexo, se llama **múltiplemente conexo**.

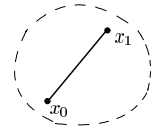


Figura 1.24: Conjunto Convexo

A continuación, se enunciará un importante resultado.

Teorema 1.8 Si D es un subconjunto simplemente conexo de \mathbb{R}^n y $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial de clase C^1 que satisface las igualdades:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x), \forall x \in D \quad y \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

entonces \vec{F} es conservativo en D (es decir, $\vec{F} = \nabla f$ para cierto $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$), y por lo tanto las integrales de línea de \vec{F} son independientes del camino en D .

1.10. Buscando funciones potenciales

Si

$$\vec{F} = \nabla f$$

en un abierto conexo D , entonces el símbolo

$$\vec{F} \cdot d\vec{x}$$

puede ser interpretado como df (=diferencial de f), dado que en este caso:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_n dx_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\ &= df \end{aligned}$$

Nosotros decimos en este caso que

$$\vec{F} \cdot d\vec{x}$$

es una **diferencial exacta**, y escribimos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_C df$$

La pregunta es :

¿Cómo encontrar f ?

Una manera es escogiendo un punto conveniente $\vec{x}_0 \in D$, y evaluando

$$f(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{y}$$

como una función de \vec{x} , a lo largo de cualquier curva conveniente en D que una \vec{x}_0 con \vec{x} .

Si D es **convexo**, entonces la integral de línea anterior puede ser tomada a lo largo del segmento de recta que une \vec{x}_0 con \vec{x} que, como bien sabemos, está parametrizada por :

$\alpha(t) = t\vec{x} + (1-t)\vec{x}_0$, $0 \leq t \leq 1$, y así nos queda :

$$f(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{F}(t\vec{x} + (1-t)\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) dt$$

Ejemplo 1.11 Si $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (e^x + y, x + 2y) = (P(x, y), Q(x, y))$, entonces \vec{F} es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 , su dominio \mathbb{R}^2 es simplemente conexo, y además

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por lo tanto, \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^2 , es decir existe un campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Como \mathbb{R}^2 es convexo entonces tomando $\vec{x}_0 = (0, 0)$ tenemos que un potencial f viene dado por:

$$f(x, y) = \int_0^1 \vec{F}(t(x, y) + (1-t)(0, 0)) \cdot ((x, y) - (0, 0)) dt$$

Calculando se obtiene

$$f(x, y) = e^x + xy + y^2 - 1$$

Ahora podemos usar f para calcular las integrales de línea de \vec{F} . Por ejemplo :

$$\int_{(0,0)}^{(2,4)} (e^x + y)dx + (x + 2y)dy = f(2, 4) - f(0, 0) = e^2 + 23.$$

Otro método para encontrar potenciales se muestra en los siguientes ejercicios :

Ejercicio 1.3 Calcular $\int_C (2xe^y + y)dx + (x^2e^y + x - 2y)dy$, donde C es la porción de la parábola $y = x^2$ desde $(0, 0)$ a $(1, 1)$, **sin parametrizar la curva C .**

Solución:

$\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^2 es simplemente conexo y además:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 2xe^y + 1 = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto, \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^2 , es decir existe $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Para encontrar un potencial f de \vec{F} procedemos como sigue:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^y + y \cdots (i) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2e^y + x - 2y \cdots (ii) \end{cases}$$

Integrando ambos lados de (i) con respecto a x , obtenemos: $f(x, y) = x^2e^y + xy + g(y)$.

Tomando derivadas parciales con respecto a y , y comparando con (ii), encontramos que: $x^2e^y + x + g'(y) = x^2e^y + x - 2y$, de donde $g'(y) = -2y$, es decir, $g(y) = -y^2 + c$.

Dando cualquier valor real a c obtenemos un potencial f de \vec{F} . En particular tomando $c = 0$, obtenemos $f(x, y) = x^2e^y + xy - y^2$

Por lo tanto :

$$\int_C (2xe^y + y)dx + (x^2e^y + x - 2y)dy = f(1, 1) - f(0, 0) = e.$$

Ejercicio 1.4 Probar que la integral de línea :

$$\int_{(1,-1,2)}^{(1,1,-1)} (2x + 2yz)dx + (2y + 2xz)dy + (2xy)dz$$

es independiente del camino en \mathbb{R}^3 , y luego calcúlela.

Solución :

$\vec{F}(x, y, z) = (2x + 2yz, 2y + 2xz, 2xy) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ es de clase C^1 en \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^3 es simplemente conexo y además:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = 2z = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z), \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = 2y = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = 2x = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Por lo tanto, \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 , es decir existe un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$ (y en consecuencia las integrales de línea de \vec{F} son independientes del camino en \mathbb{R}^3). En particular, la integral dada en el enunciado es independiente del camino en \mathbb{R}^3 . Para calcular esta integral basta con encontrar un potencial f de \vec{F} y luego evaluar.

Para encontrar un potencial f de \vec{F} procedemos como sigue:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 2yz \cdots (i) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y + 2xz \cdots (ii) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2xy \cdots (iii) \end{cases}$$

Integrando ambos lados de (i) con respecto a x , obtenemos: $f(x, y, z) = x^2 + 2yzx + g(y, z)$. Tomando derivadas parciales con respecto a y , y comparando con (ii), encontramos que:

$$2zx + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = 2y + 2xz,$$

de donde

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y.$$

Integrando con respecto a y concluimos que $g(y, z) = y^2 + h(z)$. Por lo tanto

$$f(x, y, z) = x^2 + 2yzx + y^2 + h(z).$$

Ahora tomando derivadas parciales con respecto a z y comparando con (iii), obtenemos $2yx + h'(z) = 2xy$, de donde $h'(z) = 0$, es decir $h(z) = c$ (constante). Por lo tanto

$$f(x, y, z) = x^2 + 2yzx + y^2 + c$$

nos entrega la familia de potenciales del campo vectorial \vec{F} .

Por lo tanto, la integral del enunciado vale :

$$\int_{(1, -1, 2)}^{(1, 1, -1)} (2x + 2yz)dx + (2y + 2xz)dy + (2xy)dz = f(1, 1, -1) - f(1, -1, 2) = 2.$$

1.11. Teorema de Green para regiones planas simplemente conexas

Teorema 1.9 (1ra. forma del Teorema de Green)

Sean $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares de clase C^1 en un subconjunto abierto D de \mathbb{R}^2 . Sea C una curva de Jordan seccionalmente suave, y representemos por R a la unión de C y de la región interior a C . Supongamos que R está contenida en D . Se tiene entonces la igualdad:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_C P dx + Q dy$$

en la que la integral de línea se toma a lo largo de C en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Ejercicio 1.5 Utilizando el Teorema de Green calcular $\oint_C y^2 dx + x dy$, donde

1. C es el cuadrado de vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$.
2. C es el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.
3. C es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

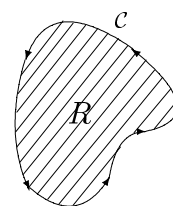


Figura 1.25: Teorema de Green

Corolario 1.1 Si C es una curva de Jordan seccionalmente suave en \mathbb{R}^2 y R es la unión de C y de la región interior a C (R es llamada comúnmente la **región acotada por C** o la **región encerrada por C**), entonces:

$$\text{Area de } R = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy,$$

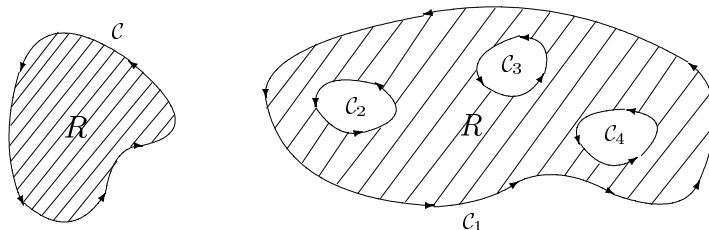
donde C está recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Ejercicio 1.6 Encontrar el área de la región encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, siendo a, b constantes positivas.

1.12. Teorema de Green para regiones planas múltiplemente conexas

Observación 1.10 En primer lugar, recordemos que si C es una curva de Jordan en el plano, entonces C divide a $\mathbb{R}^2 - C$ en dos conjuntos abiertos conexos y disjuntos que tienen a la curva C como frontera común. Una de esas regiones es acotada y se llama la **región interior de C** . La otra es no-acotada y se llama la **región exterior de C** .

La figura de la derecha corresponde al Teorema 1.10 :



Teorema 1.10 (2da forma del Teorema de Green)

Sean C_1, C_2, \dots, C_k , k curvas de Jordan seccionalmente suaves, contenidas en \mathbb{R}^2 , que tienen las siguientes propiedades:

1. Dos cualesquiera de esas curvas no se intersectan.
2. Todas las curvas C_2, \dots, C_k están situadas en la región interior de C_1 .
3. Para cada $i \neq j$, $i > 1$, $j > 1$, la curva C_i está situada en la región exterior de la curva C_j .

Designemos con R la región que consiste en la unión de C_1 con la porción de la región interior de C_1 que no está en la región interior de cualquiera de las curvas C_2, C_3, \dots, C_k .

Sean $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares de clase C^1 en un conjunto abierto D que contiene a R .

Se tiene entonces la siguiente igualdad:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_{C_1} (Pdx + Qdy) - \sum_{i=2}^k \oint_{C_i} (Pdx + Qdy)$$

en la que C_1, C_2, \dots, C_k son recorridas en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Ejercicio 1.7 Calcule $\oint_C \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Observación 1.11 1. Si C es una curva de Jordan en \mathbb{R}^2 , precisemos a continuación qué significa que C es recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Diremos que C es recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj, si un hombre de pie sobre el plano xy que vaya caminando a lo largo de C tiene siempre a la región interior de C a su izquierda.

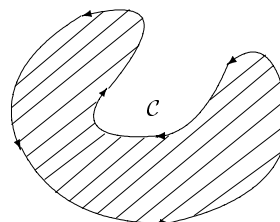


Figura 1.26: Sentido positivo de recorrido

2. Para una región simplemente conexa, la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ implica que las integrales de línea $\int_C Pdx + Qdy$ son independientes del camino. Como ya hemos observado, si el dominio no es simplemente conexo, la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ no implica necesariamente la independencia del camino. No obstante, para este caso existe una condición de independencia que se deduce del Teorema anterior, y que enunciaremos a continuación.

Teorema 1.11 (invariancia de una integral de línea al deformar el camino)

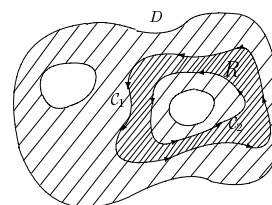
Sean D un conjunto abierto conexo del plano \mathbb{R}^2 , $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares de clase C^1 , y supongamos que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en todo D . Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan seccionalmente suaves situadas en D y que satisfacen las siguientes condiciones:

1. C_2 está en la región interior de C_1 .
2. Los puntos de la región interior de C_1 que están en la región exterior de C_2 pertenecen a D .

Se tiene entonces que:

$$\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \oint_{C_2} Pdx + Qdy$$

recorriéndose ambas curvas en el mismo sentido.



Demostración: De la 2ª forma del Teorema de Green, tenemos que:

Figura 1.27: Invariancia de una integral

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_{C_1} (Pdx + Qdy) - \oint_{C_2} (Pdx + Qdy),$$

donde R es la región que consiste de los puntos situados entre las dos curvas C_1, C_2 y las propias curvas. Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en todo R , obtenemos de la igualdad anterior que:

$$\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \oint_{C_2} Pdx + Qdy$$

Observación 1.12 Algunas veces el Teorema anterior se expresa diciendo que si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en D , entonces el valor de una integral de línea a lo largo de una curva cerrada simple en D no varía si el camino se cambia por deformación en otra curva cerrada simple cualquiera de D , con tal que todas las curvas intermedias que se van obteniendo en la deformación permanezcan dentro de D . Se supone que el conjunto D es conexo y abierto, pero no es necesario que sea simplemente conexo.

1.13. Integrales de Línea con respecto a la Longitud de Arco

Definición 1.17 Sea C una curva suave en \mathbb{R}^n , f un campo escalar continuo sobre la $tr(C)$, y sea $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una representación suave de C . Entonces la integral de línea de f con respecto a la longitud de arco, a lo largo de C , se representa con el símbolo $\int_C f ds$ y se define como:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{\alpha}(t)) \|\vec{\alpha}'(t)\| dt$$

Si $C = C_1 + C_2 + \dots + C_k$ donde C_1, C_2, \dots, C_k son suaves (es decir si C es seccionalmente suave), entonces la $\int_C f ds$ se define como.

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \dots + \int_{C_k} f ds$$

En particular, $\int_C ds$, obtenida tomando $f \equiv 1$, es la longitud de arco de C , como fué definido anteriormente.

Ejercicio 1.8 Sea C el segmento de recta que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, -3, 2)$. Calcular la : $\int_C (x + y^2 - 2z) ds$.

Solución: $f(x, y, z) = x + y^2 - 2z$

$$\vec{\alpha}(t) = (0, 0, 0) + t((1, -3, 2) - (0, 0, 0)), 0 \leq t \leq 1$$

$\vec{\alpha}(t) = (t, -3t, 2t), 0 \leq t \leq 1$, parametriza a C

$$\begin{aligned} \int_C (x + y^2 - 2z) ds &= \int_0^1 f(\vec{\alpha}(t)) \cdot \|\vec{\alpha}'(t)\| dt = \int_0^1 f(t, -3t, 2t) \|(1, -3, 2)\| dt = \\ &= \int_0^1 (t + 9t^2 - 4t) \cdot \sqrt{1 + 9 + 4} dt = \int_0^1 \sqrt{14} \cdot (9t^2 - 3t) dt = \sqrt{14} \cdot \left[3t^3 - \frac{3t^2}{2} \Big|_0^1 \right] = \sqrt{14} \cdot \left[3 - \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2} \sqrt{14} \end{aligned}$$

Observación 1.13 1. La $\int_C f ds$ es independiente de la representación $\vec{\alpha}$ escogida para C .

2. Es fácil probar que : $\int_{-C} f ds = - \int_C f ds$.

Notar que el signo menos que aparece en la correspondiente igualdad para integrales de línea de campos vectoriales, aquí no aparece.

Observación 1.14

Toda integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$ puede ser escrita como una integral de línea con respecto a la longitud de arco. En efecto:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|} \|\vec{\alpha}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{T}(\vec{\alpha}(t)) \|\vec{\alpha}'(t)\| dt \\ &= \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds, \end{aligned}$$

donde

$$\vec{T}(\vec{\alpha}(t)) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}$$

es el vector tangente unitario a C en $\vec{\alpha}(t)$, en la dirección de C .

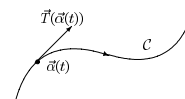


Figura 1.28: Vector tangente unitario a C

1.14. Otras aplicaciones de las integrales de línea

Las integrales de línea con respecto a la longitud de arco se presentan en problemas relativos a la distribución de la masa a lo largo de una curva. Por ejemplo, imaginemos una curva C en el espacio \mathbb{R}^3 como un delgado alambre de densidad variable. Supongamos que la densidad se expresa mediante un campo escalar f , siendo $f(x, y, z)$ la **masa por unidad de longitud** en el punto (x, y, z) de C . La **masa total** M del alambre está definida como la integral de línea de f con respecto a la longitud de arco:

$$M = \int_C f(x, y, z) ds$$

El **centro de gravedad** se define como el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas están determinadas por las ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x f(x, y, z) ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y f(x, y, z) ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z f(x, y, z) ds$$

Un alambre de densidad constante se llama **uniforme**. En este caso el centro de gravedad también se llama **centroide**.

Ejercicio 1.9 Calcular la masa M de un alambre que tiene la forma de una hélice cuya ecuación vectorial es: $\vec{\alpha}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (a y b son constantes positivas), si la densidad en (x, y, z) es $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución :

$$\begin{aligned} M &= \int_C f(x, y, z) ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{\alpha}(t)) \|\vec{\alpha}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \|(-a \sin t, a \cos t, b)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \left[2\pi a^2 + b^2 \frac{8\pi^3}{3} \right]. \end{aligned}$$

En este caso, la coordenada \bar{z} del centro de gravedad viene dada por:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{M} \int_C z f(x, y, z) ds = \frac{1}{M} \int_C z(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} bt(a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{M} \int_0^{2\pi} (ta^2 + b^2 t^3) dt = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{M} [2\pi^2 a^2 + 4\pi^4 b^2].\end{aligned}$$

Las integrales de línea se pueden utilizar también para definir el **Momento de Inercia** de un alambre o hilo con respecto a un eje. Si $\delta(x, y, z)$ representa la distancia desde un punto (x, y, z) de C a un eje L , entonces el momento de inercia I_L está definido por la integral de línea:

$$I_L = \int_C \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) ds$$

en donde $f(x, y, z)$ es la densidad en (x, y, z) . Los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados se representan por I_x , I_y e I_z .

Ejercicio 1.10 Calcular el momento de inercia I_z del alambre del ejercicio anterior.

Solución: En este caso $\delta^2(x, y, z) = x^2 + y^2 = a^2$ y $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, por lo tanto, $I_z = \int_C a^2(x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 M$, donde M es la masa que se calculó en el ejercicio anterior.

Capítulo 2

Integrales de Superficie

2.1. Representación Paramétrica de una Superficie

Una superficie es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el espacio \mathbb{R}^3 con dos grados de libertad.

Existen tres métodos para representar analíticamente una superficie. Uno es la:

Representación implícita: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$

Ejemplo 2.1 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ es una representación implícita de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2.

Observación 2.1 En este texto, cuando se hable de “el punto (x, y, z) ”, nos estaremos refiriendo a “el punto de coordenadas (x, y, z) ”.

Algunas veces podemos despejar en la ecuación una de las coordenadas en función de las otras dos, por ejemplo z en función de x e y . Cuando esto es posible obtenemos una **Representación explícita** dada por una o varias ecuaciones de la forma $z = f(x, y)$.

Ejemplo 2.2 Una esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2 tiene la representación implícita $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Al despejar z se obtienen dos soluciones $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$; la primera es la representación explícita de la semiesfera superior y la segunda es la representación explícita de la semiesfera inferior.

Existe un tercer método llamado la **Representación paramétrica** que veremos a continuación.

Definición 2.1 Sean T un subconjunto conexo del plano \mathbb{R}^2 y $X, Y, Z : T \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. El subconjunto de \mathbb{R}^3 :

$$S = \{(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) : (u, v) \in T\}$$

se llama una **Superficie Paramétrica**.

Las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \\ z = Z(u, v) \end{cases}, (u, v) \in T$$

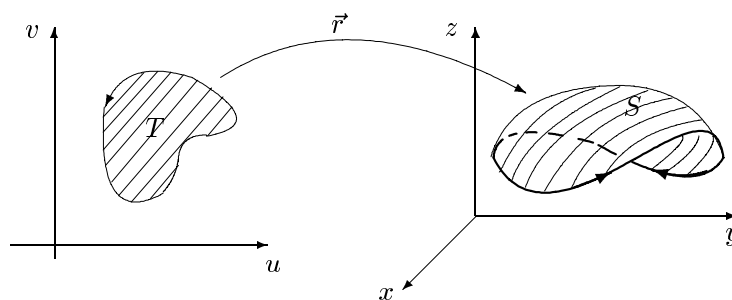
son las **Ecuaciones paramétricas** de la superficie S .

Si introducimos el radio vector \vec{r} que une el origen a un punto (x, y, z) de la superficie, podemos combinar las tres ecuaciones paramétricas anteriores en una ecuación vectorial de la forma:

$$\vec{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)), \quad (u, v) \in T$$

Esta es la llamada **Ecuación vectorial** de S .

Observación 2.2 *Notar que $S = \vec{r}(T)$*



Ejemplo 2.3 *Si una superficie S viene dada explícitamente por:*

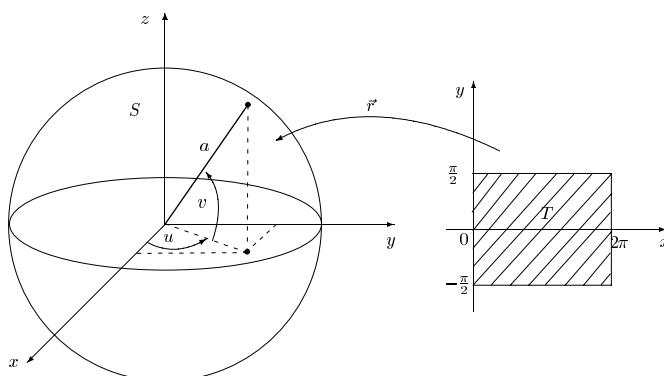
$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

Entonces una representación paramétrica de S se obtiene tomando $X(u, v) = u, Y(u, v) = v, Z(u, v) = f(u, v)$. Es decir que una ecuación vectorial de S es:

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

o lo que es lo mismo: $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D$.

Ejemplo 2.4 *La representación paramétrica de una esfera de radio $a > 0$.*



Las tres ecuaciones

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = a \operatorname{sen} u \cos v \\ z = a \operatorname{sen} v \end{cases} \quad (2.1)$$

parametrizan una esfera de radio $a > 0$ y centro $(0, 0, 0)$. Los parámetros u y v pueden interpretarse como los ángulos que aparecen en la figura. Si hacemos que (u, v) varíe en el rectángulo $T = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, los puntos determinados por (2.1) describen toda la esfera. El hemisferio superior es la imagen de $[0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ y el inferior es imagen de $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

2.2. Producto Vectorial Fundamental

Consideremos una superficie representada por la ecuación vectorial $\vec{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$, $(u, v) \in T$.

Si X, Y y Z son derivables en T , podemos considerar los dos vectores:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v} \right)$$

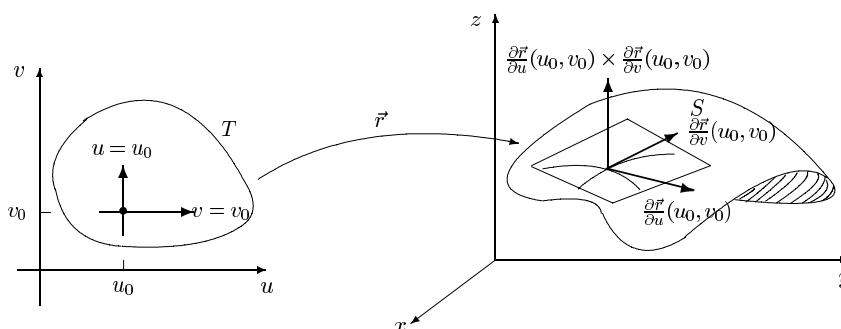
El producto vectorial $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ se denomina **producto vectorial fundamental** de la representación \vec{r} . Sus componentes pueden expresarse como determinantes jacobianos. En efecto, tenemos:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right) \quad (2.2)$$

si (u, v) es un punto en T en el cual $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ son continuas y el producto vectorial fundamental es no-nulo, entonces el punto imagen $\vec{r}(u, v)$ se llama **punto regular de \vec{r}** . Los puntos que no son

regulares se llaman **puntos singulares de \vec{r}** . Una superficie $S = \vec{r}(T)$ se llama **regular** si todos sus puntos son regulares.

En cada punto regular, los vectores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ determinan un plano que tiene al vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ como normal(perpendicular); el plano determinado por $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ se llama **Plano tangente a la superficie**. Más precisamente: Si $\vec{r}(u_0, v_0)$ es un punto regular de la superficie $S = \vec{r}(T)$, entonces el plano que pasa por $\vec{r}(u_0, v_0)$ y tiene a $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ como vector normal se llama **Plano tangente a S en $\vec{r}(u_0, v_0)$** . Al vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ se le llama **vector normal a S en $\vec{r}(u_0, v_0)$** .



Si consideramos en T un segmento rectilíneo horizontal (tal como en la figura), su imagen por \vec{r} es una curva situada en la superficie S . Si pensamos al parámetro u como el tiempo, entonces el vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ es el vector velocidad de esta curva. Cuando u se incrementa en Δu , un punto situado al comienzo en $\vec{r}(u_0, v_0)$ se desplaza a lo largo de la curva mencionada una distancia que es aproximadamente igual a $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \right\| \Delta u$. Análogamente, si consideramos en T un segmento rectilíneo vertical, su imagen por \vec{r} es también una curva situada en la superficie S y un punto se desplaza a lo largo de esta curva, en el tiempo Δv , una distancia aproximadamente igual a $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| \Delta v$. Un rectángulo en T que tenga un área $\Delta u \Delta v$ se transforma bajo la acción de \vec{r} en una porción de la superficie S que se puede aproximar por un paralelogramo determinado por los vectores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v$. Se sabe que el área del paralelogramo determinado por dos vectores es igual a la longitud de su producto vectorial. Por lo tanto, el área del paralelogramo determinado por $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v$ es igual a :

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

2.3. Superficies Suaves

Definición 2.2 Una función $\vec{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$, $(u, v) \in T$, se llama una **función paramétrica suave** de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 si:

- su dominio T es un conexo cerrado y acotado en \mathbb{R}^2 , cuya frontera consiste de una cantidad finita de curvas de Jordan seccionalmente suaves y mutuamente disjuntas.
- $\vec{r}(u, v) \neq \vec{r}(u_1, v_1)$, siempre que $(u, v) \in \overset{\circ}{T}$, $(u_1, v_1) \in T$ y $(u, v) \neq (u_1, v_1)$.
- \vec{r} es de clase \mathcal{C}^1 , y el vector:

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \quad \text{es no-nulo, } \forall (u, v) \in \overset{\circ}{T}$$

En este caso, a la superficie $S = \vec{r}(T)$ se le llama una **Superficie suave**.

Observación 2.3 En la definición anterior, $\overset{\circ}{T}$ simboliza el **interior** del conjunto T .

2.4. Area de Superficie

Sea $S = \vec{r}(T)$ una superficie suave. Al final de la **Sección 2.2** observamos que un rectángulo en T de área $\Delta u \Delta v$ es transformado por \vec{r} en un paralelogramo curvilíneo en S cuya área es aproximadamente igual a:

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

Esto sugiere la siguiente :

Definición 2.3 El **Area de superficie** de la superficie suave S de la **Definición 2.2**, se define como:

$$A(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v)$$

Ejercicio 2.1 Calcular el área de la superficie S definida por $\vec{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$ (a cte. positiva), $(u, v) \in T = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, |v| \leq b\}$ (b cte. positiva)

(Respuesta : $4\pi ab$). (S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ acotado por los planos $z = b$ y $z = -b$).

Ejercicio 2.2 Calcular el área de la esfera S definida por: $\vec{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ (a cte > 0), $(u, v) \in T = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$

(Respuesta : $4\pi a^2$). (S corresponde a la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio a).

Observación 2.4 Si una superficie S está definida explícitamente por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in T$, entonces sabemos que puede ser representada paramétricamente por:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in T$$

En este caso ,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

El área de S es entonces:

$$A(S) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} d(x, y)$$

Ejercicio 2.3 Calcular el área de la parte del paraboloido $z = 9 - x^2 - y^2$ que queda por encima del plano $z = 5$.

(Respuesta : $\frac{\pi}{6} \cdot (17^{3/2} - 1)$).

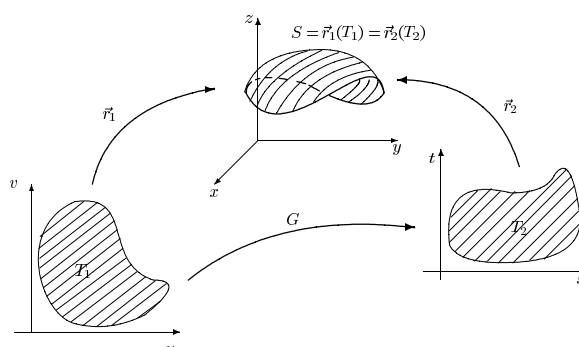
Definiciones 2.1 1. Una función $G : T \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es una **Transformación regular** si G es inyectiva, es de clase \mathcal{C}^1 , y $\det JG(x) \neq 0$, $\forall x \in T$.

2. Dos funciones paramétricas suaves $\vec{r}_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\vec{r}_2 : T_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dicen **equivalentes** si ellas están relacionadas por:

$$\vec{r}_2(s(u, v), t(u, v)) = \vec{r}_1(u, v), \quad \forall (u, v) \in T_1$$

donde $G(u, v) = (s(u, v), t(u, v))$ es una transformación regular con $G(T_1) = T_2$. ($\vec{r}_1(u, v) = \vec{r}_2(G(u, v))$, $\forall (u, v) \in T_1$).

En este caso se dice que \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son representaciones paramétricas equivalentes de la superficie $S = \vec{r}_1(T_1) = \vec{r}_2(T_2)$.



Observación 2.5 En la definición anterior, $\det JG(x)$ denota el determinante de la matriz Jacobiana de G en el punto x .

Para que la definición de área de superficie tenga sentido, el área de una superficie suave debe ser independiente de cual de la infinidad de representaciones paramétricas equivalentes se escoja para representarla. El siguiente teorema nos dice que esto es así.

Teorema 2.1 Si $\vec{r}_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\vec{r}_2 : T_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son funciones paramétricas suaves equivalentes, entonces:

$$\iint_{T_1} \left\| \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v) = \iint_{T_2} \left\| \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t}(s, t) \right\| d(s, t)$$

2.5. Borde de una Superficie

Aún sin una definición formal, la idea de Borde de una Superficie suave es intuitivamente clara. Así por ejemplo,

1. El borde de la semiesfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$ es la circunferencia $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, z = 0\}$

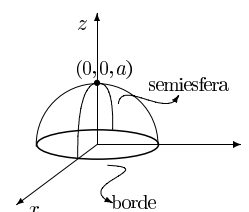


Figura 2.1: Borde de una semi-esfera

2. El borde del cilindro $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, |z| \leq 1\}$ consiste de las dos circunferencias $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, z = 1\}$ y $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, z = -1\}$

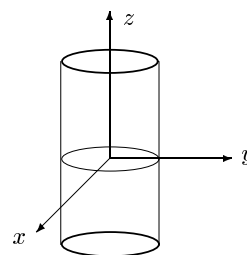


Figura 2.2: Borde de un cilindro

3. La esfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ no tiene borde.

Definición 2.4 El Borde de una superficie suave S , denotado por ∂S , es el conjunto de puntos \vec{x}_0 en S para los cuales todos los conjuntos de la forma:

$$U_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon \text{ y } \vec{x} \notin S\} \quad (\epsilon > 0)$$

son conexos.

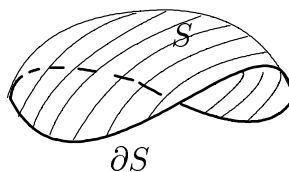


Figura 2.3: Borde de una superficie

- Observación 2.6**
1. Todo punto del borde de una superficie $S = \vec{r}(T)$ debe ser de la forma $\vec{x}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ con (u_0, v_0) en la frontera de T . Sin embargo un punto en la frontera de T no necesariamente se aplica en el borde de S .
 2. Diremos que una **superficie** S es **cerrada** si **no tiene borde**, esto es si $\partial S = \emptyset$. Así por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada.
 3. El complemento de una superficie cerrada S , $\mathbb{R}^3 - S$, consiste de dos conjuntos abiertos, uno acotado y uno no-acotado. El acotado es el **interior** y el no-acotado es el **exterior de la superficie**. Un vector normal a una superficie cerrada S es una **normal exterior a S** si apunta hacia el exterior de S , y es una **normal interior a S** si apunta hacia el interior de S .

2.6. Superficies Seccionalmente Suaves

Si S_1, S_2, \dots, S_k son superficies suaves, que satisfacen:

1. Cada uno de los bordes $\partial S_1, \partial S_2, \dots, \partial S_k$ interseca al a menos uno de los otros bordes en una curva seccionalmente suave.
2. Ningún par de entre las superficies S_1, S_2, \dots, S_k tienen puntos en común que no son borde,

entonces decimos que S_1, S_2, \dots, S_k , forman una **superficie seccionalmente suave** S con secciones suaves S_1, S_2, \dots, S_k y escribimos

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$$

Ejemplo 2.5 1. La superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ es una superficie seccionalmente suave, con seis secciones suaves. Esta es una superficie cerrada.

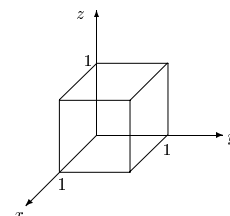


Figura 2.4: Superficie de un cubo

2. La superficie comprendida del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 1, -2 \leq z \leq 0$, es seccionalmente suave. Esta no es cerrada.

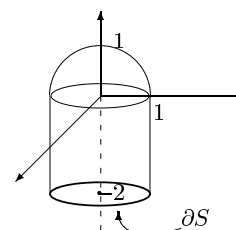


Figura 2.5: Superficie seccionalmente suave

Definición 2.5 Se define el área de superficie de una superficie seccionalmente suave $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$ como:

$$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + \dots + A(S_k)$$

2.7. Integral de Superficie de un Campo Escalar

Definición 2.6 Sea S una superficie suave representada por $\vec{r}: T \rightarrow \mathbb{R}^3$, y supongamos que f es una función real-valorada y continua en S . Entonces la integral de superficie de f sobre S se representa con el símbolo $\iint_S f(x, y, z) dS$ y está definida como:

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_T f(\vec{r}(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v)}$$

Si $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$ es una superficie seccionalmente suave, entonces:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS + \dots + \iint_{S_k} f(x, y, z) dS$$

Observación 2.7 1. La $\iint_S f(x, y, z) dS$ es independiente de cual de la infinidad de representaciones paramétricas equivalentes se escoge para representar a S .

2. Si $f \equiv 1$, entonces $\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S dS = A(S)$

Ejercicio 2.4 Calcular $\iint_S (1+z) dS$, donde S es el hemisferio $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Solución

S corresponde a la semiesfera superior de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1, y puede ser parametrizada por:

$$\vec{r}(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v), \quad (u, v) \in T = [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

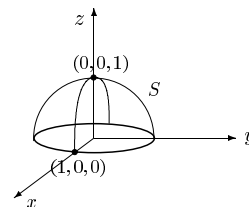


Figura 2.6: Superficie de una semiesfera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin u \cos v & \cos u \cos v & 0 \\ -\cos u \sin v & -\sin u \sin v & \cos v \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(\cos u \cos^2 v) - \hat{j}(-\sin u \cos^2 v) + \hat{k}(\cos v \sin v) \\ &= (\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \cos v \sin v) \\ &= \cos v \cdot \vec{r}(u, v) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \|\cos v \cdot \vec{r}(u, v)\| = |\cos v| \cdot \|\vec{r}(u, v)\| = |\cos v| = \cos v, \quad \text{para } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \iint_S (1+z) dS &= \iint_T f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v) \\ &= \iint_T (1 + \operatorname{sen} v) \cdot \cos v d(u, v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v + \operatorname{sen} v \cos v) dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen} v + \frac{\operatorname{sen}^2 v}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] du \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} du = 2\pi \left(\frac{3}{2} \right) = 3\pi \end{aligned}$$

2.8. Superficies Orientables y Orientación de Superficies

La idea intuitiva de superficie orientable es la de una superficie tal que se pueda definir en todo punto de ella un vector normal unitario de modo que dicho vector varíe en forma continua sobre la superficie. Un modelo en papel de una superficie orientable siempre presenta dos caras que pueden distinguirse pintándolas con dos colores diferentes. Las superficies no-orientables tienen tan sólo 1 cara.

Más precisamente se tiene la siguiente:

Definición 2.7 Una superficie suave S se dice **orientable** si tiene una representación

$\vec{r}: T \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que si:

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v),$$

entonces:

1. $\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$ existe, $\forall (u_0, v_0) \in \partial T$, y

- 2.

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|} = \lim_{(u,v) \rightarrow (u_1, v_1)} \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$$

siempre que (u_0, v_0) y (u_1, v_1) son puntos en ∂T tal que $\vec{r}(u_0, v_0) = \vec{r}(u_1, v_1)$.

Notación: En la definición anterior, ∂T simboliza la frontera del conjunto T .

Ejemplo 2.6 *El cilindro, la esfera, el plano, el elipsoide, el paraboloides elíptico, y en general todas las superficies con las cuales trabajaremos, son orientables.*

Observación 2.8 1. *El clásico ejemplo de superficie no-orientable es la Banda de Möbius.*

2. *Si S es una superficie orientable y $\vec{r} : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa a S y satisface la **Definición 2.7**, entonces podemos definir un campo vectorial $\hat{n} = \hat{n}(\vec{x})$ sobre S como sigue:*

Si $\vec{x} = \vec{r}(u, v)$, donde (u, v) pertenece al interior de T , y $\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)$ entonces:

$$\hat{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|},$$

mientras que si $\vec{x} = \vec{r}(u_0, v_0)$, para algún $(u_0, v_0) \in \partial T$, entonces:

$$\hat{n}(\vec{x}) = \lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$$

El campo vectorial \hat{n} es llamado la orientación de S inducida por \vec{r}

Claramente, $\hat{n}(\vec{x})$ es un vector unitario para cada $\vec{x} \in S$, y es normal a la superficie S en \vec{x} . La orientación puede ser visualizada dibujando una flecha de longitud 1 en la dirección de $\hat{n}(\vec{x})$, en cada punto \vec{x} de S .

3. *Una superficie orientable puede tener sólo 2 orientaciones. Relacionado con esto, tenemos el siguiente resultado.*

Teorema 2.2 *Sean $\vec{r}_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\vec{r}_2 : T_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representaciones paramétricas equivalentes de una superficie orientable S , las cuales satisfacen la **Definición 2.7**, y supongamos que ellas están relacionadas por $\vec{r}_2(s(u, v), t(u, v)) = \vec{r}_1(u, v)$ donde $G(u, v) = (s(u, v), t(u, v))$ es una transformación regular de T_1 sobre T_2 .*

Sean \hat{n}_1 y \hat{n}_2 las orientaciones inducidas en S por \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente. Entonces:

1. $\hat{n}_1 = \hat{n}_2$ si $\frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} > 0$
2. $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$ si $\frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} < 0$.

2.9. Orientación de superficies seccionalmente suaves

Para discutir la orientabilidad de una superficie seccionalmente suave, debemos introducir la noción de **Borde positivamente dirigido** de una superficie suave.

Definición 2.8 Si \hat{n} es una orientación de una superficie suave S y C es una curva suave del borde ∂S de S , decimos que C está **positivamente dirigida con respecto a \hat{n}** si una persona caminando a lo largo de C con su cabeza en la dirección de $\hat{n}(\vec{x})$ siempre tiene a S a su izquierda. Decimos que ∂S está **positivamente dirigido con respecto a \hat{n}** si toda curva suave en ∂S lo está.

Si S es la sección del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ acotada por los planos $z = 0$ y $z = 1$, y \hat{n} es la orientación indicada en la figura, entonces ∂S está positivamente dirigido con respecto a \hat{n} , si es recorrido en el sentido mostrado en la figura:

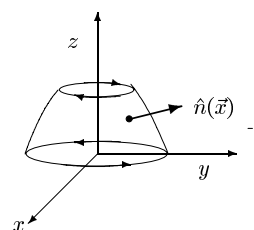


Figura 2.7: Borde positivamente dirigido

Si tomamos como orientación a $-\hat{n}$, entonces ∂S estará positivamente dirigida con respecto a $-\hat{n}$, si es recorrida en el sentido mostrado en la **Figura 2.8**

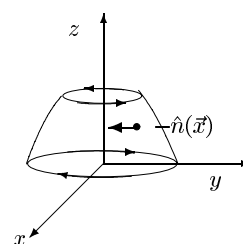


Figura 2.8: Tomando $-\hat{n}$ como orientación

Definición 2.9 Una superficie seccionalmente suave $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$ se dice **orientable** si sus secciones suaves S_1, S_2, \dots, S_k son orientables, y es posible escoger orientaciones $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \dots, \hat{n}_k$ sobre ellas de tal modo que si C es cualquier curva común de ∂S_i y ∂S_j ($i \neq j$) entonces la dirección positiva de C con respecto a \hat{n}_i coincide con la dirección negativa de C con respecto a \hat{n}_j . Si las orientaciones son escogidas de esta manera, entonces S se dice **orientada**.

La superficie seccionalmente suave de la siguiente figura está orientada. Notar que la dirección positiva del borde común con respecto a \hat{n}_1 coincide con la dirección negativa de dicho borde con respecto a \hat{n}_2 , y vice-versa.

S_2 : semiesfera superior

S_1 : cilindro

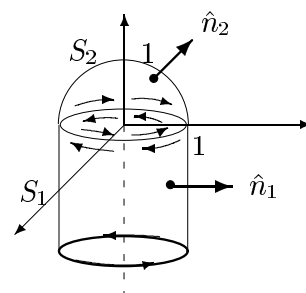


Figura 2.9: Orientación de una superficie seccionalmente suave

Observación 2.9 Una superficie seccionalmente suave orientable tiene exactamente dos orientaciones posibles.

2.10. Integral de Superficie de un Campo Vectorial

Definición 2.10 Sea $\vec{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial continuo en la superficie suave orientable S , y supongamos que \hat{n} es una orientación de S . Entonces la **integral de superficie de \vec{F} sobre la superficie orientada S** está definida como la integral de superficie del campo escalar $\vec{F} \cdot \hat{n}$, esto es como :

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS}$$

Observación 2.10 Si \hat{n} es inducida sobre S por la representación paramétrica

$$\vec{x} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \overset{\circ}{T},$$

entonces:

$$\hat{n}(\vec{r}(u, v)) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\|},$$

y por lo tanto, de acuerdo a la definición de integral de superficie de campos escalares, se tiene que:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \iint_T \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \hat{n}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v) \\ &= \iint_T \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\|} \cdot \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v), \end{aligned}$$

es decir que:

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iint_T \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right) d(u, v)}$$

Ejercicio 2.5 Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z^4)$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ orientada con la normal hacia afuera.

(Respuesta : 0).

Ejercicio 2.6 Calcular $\iint_S (x\hat{i} + y^2\hat{j} + z\hat{k}) \cdot \hat{n}(\vec{x}) \, dS$, donde S es el triángulo determinado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados, y $\hat{n}(\vec{x})$ tiene componente z positiva.

(Respuesta : $\frac{5}{12}$).

Definición 2.11 Sea $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$ una superficie seccionalmente suave y orientable, orientada con $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \dots, \hat{n}_k$ tal como en la **Definición 2.9**. Si \vec{F} es un campo vectorial continuo sobre S , entonces se define la integral de superficie de \vec{F} sobre la superficie orientada S , como:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \vec{F} \cdot \hat{n}_i \, dS$$

Ejercicio 2.7 Sea S la superficie seccionalmente suave cerrada, que consiste de:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} \\ S_2 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 0\}, \\ S_3 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = -1\}, \end{aligned}$$

con la orientación hacia afuera.

Calcular

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS, \quad \text{donde } \vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

(Respuesta : $\frac{9\pi}{2}$).

A continuación veremos una forma más simple de calcular una integral como la anterior.

2.11. El Teorema de la Divergencia (o de Gauss)

Definición 2.12 La divergencia de un campo vectorial diferenciable $\vec{F} = (P, Q, R)$ está definida como:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Teorema 2.3 (de la Divergencia)

Sea D una región sólida acotada en \mathbb{R}^3 , limitada por una superficie seccionalmente suave orientable y cerrada S , y supongamos que \vec{F} es un campo vectorial de clase C^1 en D y \hat{n} es la orientación de S que apunta hacia el exterior. Entonces:

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) \, d(x, y, z)}$$

Ejercicio 2.8 Utilizando el Teorema de la divergencia calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (0, y, z)$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ orientada con la normal hacia afuera.

(Respuesta : $64\pi/3$).

Ejercicio 2.9 Use el Teorema de la divergencia para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (2x, xy, xz)$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada con la normal hacia afuera

(Respuesta : $\frac{8\pi}{3}$).

Ejercicio 2.10 Hacer el Ejercicio 2.7, utilizando el Teorema de la divergencia.

Observación 2.11 1. Notar que el Teorema de la divergencia expresa una relación entre una integral triple extendida a un sólido y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese sólido.

2. La divergencia de un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$ a veces se denota simbólicamente usando el símbolo $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, como el producto escalar $\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

2.12. El Teorema de Stokes

En primer lugar, recordaremos el concepto de rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , y haremos algunas observaciones.

1. Si $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (P, Q, R)$, es un campo vectorial diferenciable en un abierto D de \mathbb{R}^3 , entonces se define el **Rotacional de \vec{F}** , $rot\vec{F}$, como el campo vectorial $rot\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Esta definición es fácil de recordar si escribimos simbólicamente:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}$$

Por ejemplo, si $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2z^2, z^2seny, x^2e^y)$, entonces

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & z^2seny & x^2e^y \end{vmatrix}$$

es decir, $rot\vec{F}(x, y, z) = (x^2e^y - 2zseny, 2xy^2z - 2xe^y, -2xyz^2)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Combinando los **Teorema 1.7** y **Teorema 1.8** que vimos en el **Capítulo 1**, podemos concluir en términos del **Rotacional**, que en el caso tridimensional (\mathbb{R}^3) se tiene :

“ Si $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto simplemente conexo D de \mathbb{R}^3 , entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } D \iff \text{rot}\vec{F}(x,y,z) = (0,0,0), \forall (x,y,z) \in D ”$$

(Recordar, que por definición: \vec{F} es conservativo en $D \iff \vec{F} = \nabla f$, para algún campo escalar f diferenciable en D).

De lo anterior, concluimos en particular que :

3. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2 en un abierto D de \mathbb{R}^3 , entonces $\text{rot}(\nabla f)(x,y,z) = (0,0,0), \forall (x,y,z) \in D$ o escrito simbólicamente:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

4. Si $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^2 en un abierto A de \mathbb{R}^3 , entonces $\text{div}(\text{rot}\vec{F}) = 0$ en A . Por lo tanto, el Teorema de la divergencia implica que si una superficie orientable **cerrada** S y la región sólida D encerrada para S están contenidas en A , entonces:

$$\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \pm \iiint_D (\text{div}(\text{rot}\vec{F})) d(x,y,z) = 0$$

donde \hat{n} es cualquier orientación de S .

A continuación enunciaremos el Teorema de Stokes. En primer lugar, daremos una versión restringida, para luego dar la forma general.

Teorema 2.4 (Forma restringida del Teorema de Stokes)

Supongamos que S es una superficie orientable suave definida por $\vec{x} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in T$, donde T es un conexo cerrado en el plano uv acotado por una curva de Jordan γ . Supongamos también que \vec{r} es de clase C^2 en T , y que el campo vectorial $\vec{F} = (P,Q,R)$ es de clase C^1 en S . Sea \hat{n} la orientación de S inducida por \vec{r} y finalmente supongamos que $\vec{r}(u,v)$ recorre el borde de $S, \partial S$, exactamente una vez cuando (u,v) recorre γ . Entonces:

$$\boxed{\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x}}$$

donde el sentido de recorrido del ∂S es aquel en el cual $\vec{r}(u,v)$ lo recorre cuando (u,v) recorre a γ en el sentido antihorario.

Observación 2.12 .

Notar que en el caso especial en que S es una región del plano xy acotada por una curva de Jordan ∂S , y consideramos la parametrización natural de $S : \vec{r}(x,y) = (x,y,0), (x,y) \in S$, entonces $\hat{n} = (0,0,1)$ y la fórmula del Teorema anterior se reduce a:

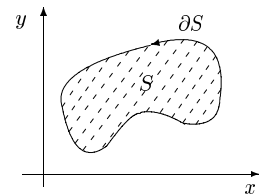
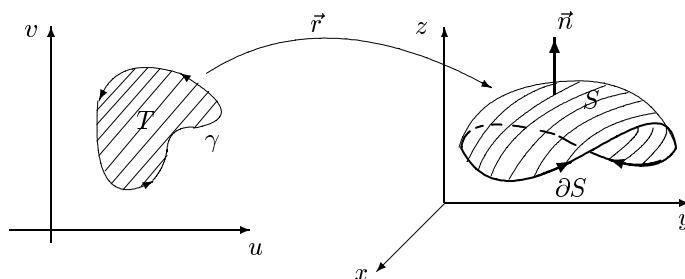


Figura 2.10: Teorema de Green en \mathbb{R}^2

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_{\partial S} (Pdx + Qdy),$$

es decir se recupera la igualdad del Teorema de Green.

La siguiente figura corresponde al Teorema 2.4 :



A continuación, se enunciará la **forma general del Teorema de Stokes para superficies en \mathbb{R}^3** .

Teorema 2.5 (de Stokes)

Sea S una superficie seccionalmente suave orientable y acotada, con borde consistente de curvas seccionalmente suaves C_1, C_2, \dots, C_k , cada una de las cuales positivamente dirigida con respecto a la orientación \hat{n} de S , y supongamos que el campo vectorial \vec{F} es de clase C^1 en S . Entonces:

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Observación 2.13 1. Algunos casos particulares muy comunes son:

- a) Si S es como en la figura, con borde consistente de 1 sola curva seccionalmente suave C_1 , positivamente dirigida con respecto a la orientación \hat{n} de S , entonces el Teorema de Stokes dice que:

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

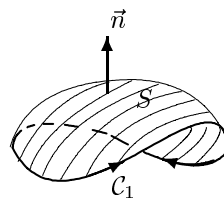


Figura 2.11: Borde con una sola curva seccionalmente suave

- b) Si S es como en la figura, con borde consistente de 2 curvas seccionalmente suaves C_1, C_2 cada una de las cuales positivamente dirigidas con respecto a la orientación \hat{n} de S , entonces el Teorema de Stokes dice que:

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

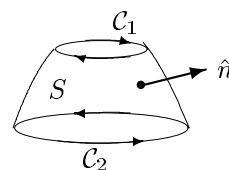
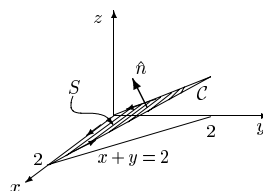


Figura 2.12: Borde con dos curvas seccionalmente suave

2. El Teorema de Stokes expresa una relación entre una integral extendida a una superficie y una integral de línea tomada sobre la curva o curvas que constituyen el borde de tal superficie.

La siguiente figura corresponde al Ejercicio 2.11 :



Ejercicio 2.11 Sea C el borde orientado del triángulo descrito en la figura anterior, el cual está contenido en el plano $z = \frac{y}{2}$.

Si $\vec{F}(x, y, z) = (-3y^2, 4z, 6x)$, calcular la $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$

Solución

El cálculo directo de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$ requeriría la evaluación de 3 integrales de línea, una sobre cada uno de los segmentos de recta que componen C . Sin embargo, si aplicamos el Teorema de Stokes, obtenemos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS,$$

donde \hat{n} es la orientación que apunta hacia arriba.

$$\text{rot} \vec{F}(x, y, z) = (-4, -6, 6y)$$

$$S : \vec{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{y}{2} \right), (x, y) \in R$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(0, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

que nos dá la orientación requerida.

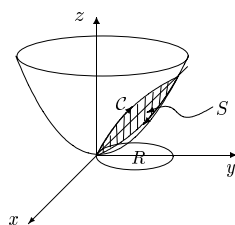
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS &= \iint_R \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) d(x, y) = \\ \iint_R (-4, -6, 6y) \cdot \left(0, \frac{-1}{2}, 1 \right) d(x, y) &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (3 + 6y) dy dx = 14. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 14$$

La siguiente figura corresponde al **Ejercicio 2.12** :



Ejercicio 2.12 Sea C la curva intersección del paraboloides $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = y$, recorrida de tal forma que mirando desde el eje z positivo, el sentido es el contrario al de las agujas del reloj. Calcular: $\int_C xy dx + x^2 dy + z^2 dz$.

Solución: Sea $\vec{F}(x, y, z) = (xy, x^2, z^2)$, y S la porción del plano $z = y$ que queda en la región interior al paraboloides $z = x^2 + y^2$ (esto es, que queda en la región $z \geq x^2 + y^2$).

Por el Teorema de Stokes, tenemos que:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

donde \hat{n} es la orientación que apunta hacia arriba.

Si $(x, y, z) \in C$ entonces $x^2 + y^2 = y$, y esta es la ecuación de la circunferencia en el plano xy , $r = \operatorname{sen} \theta$. Por lo tanto, la proyección de S sobre el plano xy es el círculo R acotado por la circunferencia $r = \operatorname{sen} \theta$. Así, S se puede parametrizar como:

$$S : \vec{r}(x, y) = (x, y, y), \quad (x, y) \in R$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

que nos dá la orientación \hat{n} .

$$\text{rot}\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, x)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS &= \iint_R x \, d(x, y) = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\theta} (r \cos\theta) r \, dr \, d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \text{sen}^3\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{12} \text{sen}^4\theta \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Observación 2.14 Si dos superficies orientadas S_1 y S_2 tienen a una misma curva C como borde común, y C está positivamente dirigida tanto con respecto a la orientación \hat{n}_1 de S_1 como con respecto a la orientación \hat{n}_2 de S_2 , entonces por el Teorema de Stokes se cumple que:

$$\iint_{S_1} (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_1 \, dS = \int_C \vec{F} \, d\vec{x} = \iint_{S_2} (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_2 \, dS$$

para todo campo vectorial \vec{F} de clase C^1 en S_1 y S_2 . Lo anterior sirve para casos en los cuales es difícil integrar sobre S_1 , y sin embargo es fácil integrar sobre S_2 .

Ejemplo 2.7 Sea S_1 el semi-elipsoide $z = 2\sqrt{1-x^2-y^2}$ orientado con la normal apuntando hacia arriba, y sea $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2 \tan xy)$.

Calcular:

$$\iint_{S_1} (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_1 \, dS$$

Solución: $\text{rot}\vec{F}(x, y, z) = (xz^2 \sec^2 xy, -yz^2 \sec^2 xy, 0)$

Sea S_2 el disco unitario $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientado con la normal apuntando hacia arriba. Notar que la circunferencia unitaria $C : x^2 + y^2 = 1$ es el borde común de S_1 y S_2 , y si se recorre en sentido antihorario, entonces está positivamente dirigida con respecto a \hat{n}_1 y con respecto a \hat{n}_2 . Luego :

$$\iint_{S_1} (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_1 \, dS = \iint_{S_2} (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_2 \, dS = 0$$

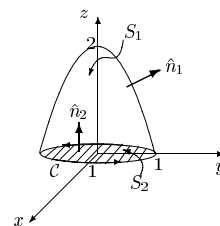


Figura 2.13: Cálculo sobre un semi-elipsoide

La segunda integral es cero porque $S_2 : \vec{r}_2(x, y) = (x, y, 0), (x, y) \in R_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y} = (0, 0, 1), \quad \text{rot}\vec{F}(\vec{r}_2(x, y)) = \text{rot}\vec{F}(x, y, 0) = (0, 0, 0)$$

2.13. Algunas Aplicaciones de las Integrales de Superficie

1.- Area de una superficie

$$\text{Area}(S) = \iint_S dS = \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| d(u, v)$$

2.- Centro de gravedad. Momento de inercia Si un campo escalar f representa la densidad (masa por unidad de área) de una lámina delgada adaptada a la superficie S , entonces la **masa total** m de la superficie se define por la fórmula:

$$m = \iint_S f(x, y, z) dS$$

Su **centro de gravedad** es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ determinado por las fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x f(x, y, z) dS$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y f(x, y, z) dS$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z f(x, y, z) dS$$

El **momento de inercia** I_L de S alrededor de un eje L viene dado por:

$$I_L = \iint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) dS$$

donde $\delta(x, y, z)$ representa la distancia de un punto cualquiera (x, y, z) de S a la recta L .

Ejercicio 2.13 a) Determinar el centro de gravedad de la superficie de una esfera uniforme (=densidad constante) de radio a .

b) Determinar el centro de gravedad de la superficie de una semiesfera uniforme de radio a .

Solución (a):

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), a \sin(v)),$$

$$(u, v) \in T = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| = a^2 \cos(v)$$

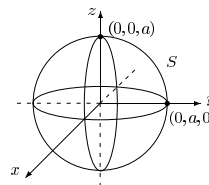


Figura 2.14: Centro de gravedad de una esfera

Como S es uniforme entonces la densidad es constante, esto es,
 $f(x, y, z) = k$ para alguna constante k .

$$m = \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S k dS = k \iint_S dS = k \cdot \text{Area}(S) = k \cdot (4\pi a^2).$$

Por lo tanto, $m = 4\pi a^2 k$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_S x f(x, y, z) dS = \frac{1}{4\pi a^2 k} \iint_S x k dS \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \iint_S x dS = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_T a \cos u \cos v \cdot (a^2 \cos v) d(u, v) \\ &= \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u \cos^2 v dv du = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos u \left[\frac{v}{2} + \frac{1}{4} \sin 2v \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} du \\ &= \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} \cos u du = \frac{a}{8} [\text{sen} u]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_S y f(x, y, z) dS = \frac{1}{4\pi a^2 k} \iint_S y k dS \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \iint_S y dS = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_T a \text{sen} u \cos v \cdot (a^2 \cos v) d(u, v) \\ &= \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen} u \cos^2 v dv du = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} \text{sen} u du \\ &= \frac{a}{8} [-\cos u]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m} \iint_S z f(x, y, z) dS = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_S z k dS = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_S z dS \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \iint_T a \text{sen} v (a^2 \cos v) d(u, v) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen} v \cos v dv du \\ &= \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\text{sen}^2 v}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} du = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} 0 du = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de gravedad es: $(0, 0, 0)$.

Por lo tanto, el centro de gravedad de la superficie de una esfera uniforme es el centro de la esfera.

Solución (b): $\vec{r}(u, v) = (a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), a \sin(v))$

$$(u, v) \in T = [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| = a^2 \cos v$$

Como S es uniforme entonces la densidad es constante, esto es, $f(x, y, z) = k$ para alguna constante k .

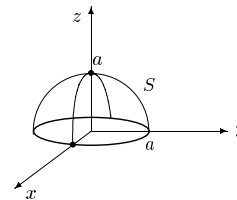


Figura 2.15: Centro de gravedad de una semi-esfera

$$\begin{aligned} m &= \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S k dS = k \iint_S dS \\ &= k \cdot \text{Area}(S) = k(2\pi a^2) = 2\pi a^2 k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_S x f(x, y, z) dS = \frac{1}{2\pi a^2 k} \iint_S x k dS \\ &= \frac{1}{2\pi a^2} \iint_T a \cos u \cos v \cdot a^2 \cos v d(u, v) \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos u \cos^2 v dv du = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos u \left[\frac{v}{2} + \frac{1}{4} \sin 2v \right]_0^{\pi/2} du \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} \cos u du = \frac{a}{8} [\sin u]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\bar{y} = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m} \iint_S z \cdot k dS = \frac{k}{m} \iint_T a \sin v (a^2 \cos v) d(u, v) \\ &= \frac{a^3 k}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin v \cos v dv du = \frac{a^3 k}{2\pi a^2 k} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2 v}{2} \right]_0^{\pi/2} du \\ &= \frac{a}{2\pi} \left(2\pi \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de gravedad es $(0, 0, \frac{a}{2})$.

3.- Flujo de fluido a través de una superficie

Imaginemos que un fluido es una colección de puntos llamadas **partículas**. A cada partícula de coordenadas (x, y, z) le asignamos un vector $\vec{V}(x, y, z)$ que representa su velocidad. Este es el campo de velocidad de la corriente. El campo de velocidad puede o no cambiar con el tiempo. Consideraremos tan solo corrientes **estacionarias**, esto es, corrientes para las que la velocidad $\vec{V}(x, y, z)$ depende únicamente de la posición de la partícula y no del tiempo.

Designemos con $\rho(x, y, z)$ a la densidad (masa por unidad de volumen) del fluido en el punto (x, y, z) . Si el fluido es incompresible, la densidad ρ será constante en todo el fluido. Para un fluido compresible, tal como un gas, la densidad puede variar de un punto a otro. En cualquier caso, la densidad es un campo escalar asociado a la corriente. El producto de la densidad por la velocidad lo representaremos por \vec{F} , esto es,

$$\vec{F}(x, y, z) = \rho(x, y, z) \cdot \vec{V}(x, y, z).$$

Este es un campo vectorial llamado **densidad de flujo** de la corriente. El vector $\vec{F}(x, y, z)$ tiene la misma dirección que la velocidad, y su longitud tiene las dimensiones :

$$\frac{\text{masa}}{\text{unidad de volumen}} \cdot \frac{\text{distancia}}{\text{unidad de tiempo}} = \frac{\text{masa}}{(\text{unidad de area}) \cdot (\text{unidad de tiempo})}$$

Dicho de otro modo, el vector densidad de flujo $\vec{F}(x, y, z)$ nos dice cuánta masa de fluido circula por el punto (x, y, z) en la dirección de $\vec{V}(x, y, z)$, por unidad de área y de tiempo.

Sea $S = \vec{r}(T)$ una superficie paramétrica. En cada punto regular de S designemos con \hat{n} al vector unitario normal que tiene la misma dirección que el producto vectorial fundamental, es decir:

$$\hat{n}(\vec{r}(u, v)) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\|},$$

El producto escalar $\vec{F} \cdot \hat{n}$ es la componente del vector densidad de flujo en la dirección de \hat{n} .

La masa de fluido que pasa a través de la superficie S en la unidad de tiempo en la dirección de \hat{n} es entonces igual al valor de la integral de superficie :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS.$$

Capítulo 3

Series de Fourier

En este capítulo estudiaremos uno de los conceptos de mayor importancia en la matemática, las llamadas **Series de Fourier**.

3.1. Introducción

Es bien sabido que bajo ciertos supuestos de regularidad, podemos describir algunas funciones en términos de series de funciones, por ejemplo recordemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Este es el desarrollo en Serie de Taylor de la función exponencial. Pero en este caso es necesario que nuestra función tenga infinitas derivadas y que además la serie de la derivadas sea convergente para un cierto conjunto de valores, es decir, el intervalo de convergencia no sea un punto.

Una pregunta es ¿podemos expresar en términos de series de funciones algunas aplicaciones que no sean tan regulares?

La respuesta la daremos a lo largo de este capítulo.

La mayoría de los conceptos de este capítulo fueron generados a fines del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX y llevan asociados los nombres de grandes matemáticos de la época, como por ejemplo Fourier, Laplace, Bernoulli, D'Alembert, Green, Poisson, Dirichlet, Neumann, Lagrange, Gauss, por nombrar algunos. Estos conceptos han marcado el inicio de importantes líneas de investigación en la actualidad, con una amplia aplicación, como son por ejemplo el estudio de la teoría de señales o la gran área relacionada con las EDP, en donde hay una gran cantidad de investigadores en todo el mundo trabajando en una amplia gama de problemas, entre los que podemos nombrar por ejemplo, el análisis no lineal, la teoría de control, la teoría de scattering, la teoría de los elementos finitos, el diseño optimal, por citar algunas líneas de trabajo.

3.2. Series de Fourier

Como se ha visto en los cursos de Cálculo, las series de funciones más comunes corresponden a los desarrollos de Taylor y Maclaurin. En lo que sigue analizaremos otro tipo de desarrollo para funciones, el cual será útil en una gran cantidad de aplicaciones.

Recordemos que para obtener desarrollos en Series de Taylor y MacLaurin de una función, es necesaria una gran regularidad de la función, sin embargo, existe una serie de fenómenos descritos por funciones no regulares, en particular, al estudiar las señales, podemos encontrar muchos puntos de discontinuidad o no diferenciabilidad.

Las Series de Fourier aparecen en 1822, cuando Jean Baptiste Fourier resolvió por primera vez la ecuación del flujo del calor a través de series trigonométricas. Luego el mismo método ha sido utilizado para estudiar una amplia clase de problemas.

En primer lugar veamos algunas definiciones y resultados previos.

3.2.1. Convergencia puntual de una serie de funciones

Definición 3.1 Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que la serie de funciones $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ **converge puntualmente** en $I \subseteq \mathbb{R}$ si para cada $x \in I$ la sucesión de números reales $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ es convergente. La sucesión $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ se llama *sucesión de sumas parciales*.

Si $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, entonces $S(x)$ se llama el *valor* (o la *suma*) de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ y se escribe $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

3.2.2. Funciones continuas por tramos

Definición 3.2 Se dice que una función f de valor real es **continua por tramos** en un intervalo $[a, b]$ si:

1. f está definida y es continua en todos, excepto un número finito de puntos de $[a, b]$, y
2. Los límites $f(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h)$ y $f(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x_0 + h)$ existen y son números reales, para cada punto x_0 de $[a, b]$. (Observar que sólo uno de estos límites es apropiado si x_0 es un punto extremo de $[a, b]$).

Observación 3.1 1. Una función que es continua por tramos en $[a, b]$ no necesariamente está definida en todos los puntos de $[a, b]$. Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & , \text{ si } -\pi < x < 0 \\ x - \pi & , \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

es continua por tramos en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

2. Por definición, toda función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua por tramos en $[a, b]$.

3. El conjunto de todas las funciones continuas por tramos en un intervalo fijo $[a, b]$ se denotará por $PC[a, b]$. Así, si denotamos por $C[a, b]$ el conjunto de todas las funciones continuas de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces por lo anterior, $C[a, b] \subseteq PC[a, b]$.
4. En el espacio $PC[a, b]$, consideraremos como iguales a 2 funciones que difieran solamente en un número finito de puntos.

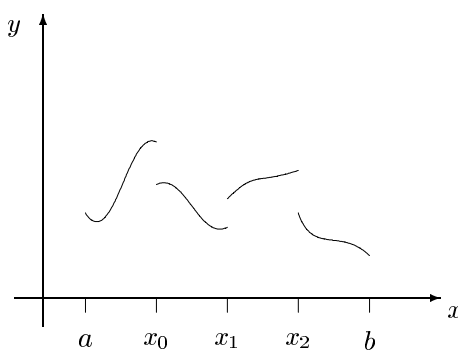


Figura 3.1: Ejemplo de una función continua por tramos en $[a, b]$.

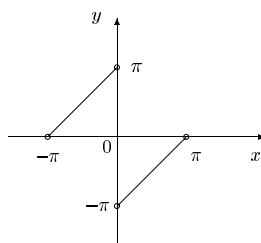


Figura 3.2: Gráfica de f de la **Observación 3.1, 1**.

3.2.3. Funciones Pares e Impares

Definición 3.3 Se dice que una función f continua por tramos en un intervalo de la forma $[-a, a]$ es

1. **par** si $f(-x) = f(x)$, para toda x en el dominio de f .

2. **impar** si $f(-x) = -f(x)$, para toda x en el dominio de f .

Observación 3.2 La importancia de las funciones pares e impares para lo que nos interesa es que:

$$f \text{ par} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad y$$

$$f \text{ impar} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Una observación elemental es que el producto de una función par con una impar es una función impar, y que el producto de dos funciones pares es una función par, y que el producto de dos funciones impares es una función par. En pocas palabras, la multiplicación de funciones pares e impares obedece a las reglas:

$$\begin{aligned} (\text{Par}) \cdot (\text{Par}) &= (\text{Impar}) \cdot (\text{Impar}) = \text{Par} \\ (\text{Par}) \cdot (\text{Impar}) &= (\text{Impar}) \cdot (\text{Par}) = \text{Impar} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1 Las funciones $1, \cos x, \cos 2x, \dots$, son pares en $PC[-a, a]$ y $\sin x, \sin 2x, \dots$, son impares.

Así:

$$f \text{ impar} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) \cos kx dx = 0 \quad y$$

$$f \text{ par} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) \sin kx dx = 0.$$

3.2.4. Series de Fourier

Definición 3.4 Sea f una función continua por tramos en $[-\pi, \pi]$ y consideremos la serie de funciones :

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)} \quad \text{donde}$$

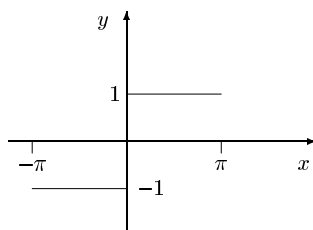
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad y$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Esta serie es llamada la **Serie de Fourier** de f y los coeficientes a_k, b_k son llamados los **Coe-ficientes de Fourier** de f .

Ejemplo 3.2 Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } -\pi < x < 0 \\ 1 & , \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$$



Solución

f es una función impar. En consecuencia:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0, \quad \forall k.$$

Por otro lado, $f(x) \operatorname{sen} kx$ es par y por lo tanto:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx dx = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & , \text{ si } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & , \text{ si } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

En consecuencia, el desarrollo en serie de Fourier de f es:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \left[\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots \right] \\ & = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{(2k-1)} \end{aligned}$$

Teorema 3.1 Sea f una función tal que f y su primera derivada f' son continuas por tramos en $[-\pi, \pi]$. Entonces el desarrollo en serie de Fourier para f converge puntualmente en $[-\pi, \pi]$ y tiene el valor:

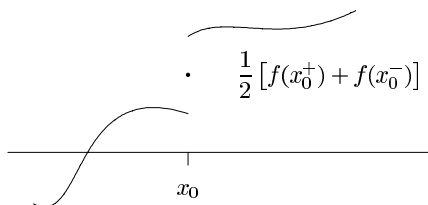
$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

en cada punto x_0 en el interior del intervalo, y

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} \quad \text{en } \pm \pi$$

Observación 3.3 1. Notar que la expresión $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ es el promedio de los límites por la derecha y por la izquierda de f en x_0 y es igual a $f(x_0)$ siempre que x_0 sea un punto de continuidad de f . En consecuencia:

“El desarrollo en serie de Fourier de una función f tal que f y f' son continuas por tramos en $[-\pi, \pi]$, converge a $f(x_0)$ siempre que x_0 sea un punto de continuidad de f , $x_0 \in]-\pi, \pi[$. Por otra parte, si f tiene una discontinuidad en x_0 , $x_0 \in]-\pi, \pi[$, entonces la serie de Fourier de f converge en x_0 al valor localizado en el punto medio del “salto” que se produce en la discontinuidad x_0 ”.



2. Otra forma equivalente de enunciar el Teorema anterior es :
 “Si f y $f' \in PC[-\pi, \pi]$, entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente en cada punto x_0 de $[-\pi, \pi]$ y tiene el valor $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \quad \forall x_0 \in]-\pi, \pi[$, y para los extremos $\pm\pi$ toma el valor $\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$.”
3. Si aplicamos el Teorema anterior al **Ejemplo 3.2**, concluimos que la serie :
 $\frac{4}{\pi} \left[\text{sen}x + \frac{\text{sen}3x}{3} + \frac{\text{sen}5x}{5} + \dots \right]$ converge puntualmente en el intervalo $[-\pi, \pi]$ a:

$$\begin{cases} -1 & , \text{ si } -\pi < x < 0 \\ 0 & , \text{ si } x = -\pi, 0, \pi \\ 1 & , \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Así, por ejemplo, cuando $x = \frac{\pi}{2}$, el valor de esta serie es 1, y por lo tanto:

$$1 = \frac{4}{\pi} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$$

o lo que es equivalente:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Análogamente, cuando $x = \frac{\pi}{4}$ se obtiene:

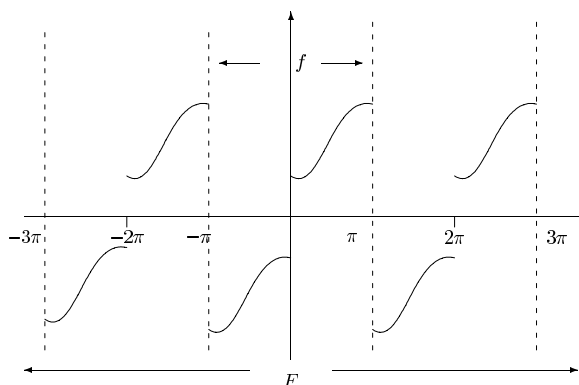
$$1 = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 5} - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 7} + \dots \right]$$

y se tiene una segunda representación de $\frac{\pi}{4}$ como:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

4. Observemos que si una serie trigonométrica $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sen kx)$ converge a un valor A cuando $x = x_0$, entonces también convergerá a A en todos los puntos de la forma $x_0 + 2n\pi$, siendo $n \in \mathbb{Z}$ un entero cualquiera. Esto es una consecuencia del hecho de que las funciones $\sen kx$ y $\cos kx$ son periódicas de un período que divide a 2π . Por lo tanto: “Si la serie $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sen kx)$ converge puntualmente en $[-\pi, \pi[$ a una función f , entonces realmente converge en todo \mathbb{R} a la función F obtenida por la repetición sucesiva de f a lo largo de \mathbb{R} , en intervalos de longitud 2π .”

Es claro que la función F obtenida en esta forma, es periódica de un período que divide a 2π , (y por lo tanto $F(x + 2\pi) = F(x)$, para todo x). F es conocida como la **Extensión Periódica** de f .



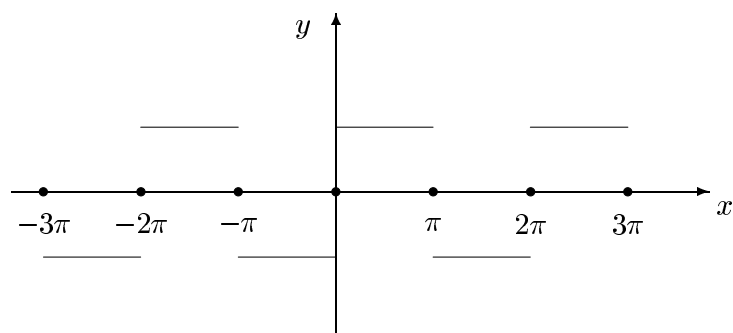
Combinando las ideas anteriores obtenemos el siguiente:

Teorema 3.2 Si f y f' son continuas por tramos en $[-\pi, \pi]$, entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente en todo \mathbb{R} . Más aún, si F denota la extensión periódica de f , entonces el valor de la serie es $F(x_0)$ cuando x_0 es un punto de continuidad de F , y es $\frac{F(x_0^+) + F(x_0^-)}{2}$ cuando x_0 es una discontinuidad de F .

Observación 3.4 El Teorema anterior puede usarse para trazar la gráfica de la serie de Fourier (esto es, la gráfica del valor de la suma de la serie) de cualquier función f tal que f y $f' \in PC[-\pi, \pi]$. El procedimiento es como sigue: Primero, se traza la gráfica de la extensión periódica F ; luego se localiza el punto medio del salto de cada discontinuidad de F . El dibujo resultante, incluyendo estos puntos aislados, será la gráfica de la serie en cuestión. Así por ejemplo, la gráfica de la serie de Fourier

$$\frac{4}{\pi} \left[\sen x + \frac{\sen 3x}{3} + \dots \right]$$

del ejemplo 3.2 es la siguiente :



Ejemplo 3.3 Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$, y trazar la gráfica de la serie.

Solución: Como f es una función par, entonces :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx = 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Por otro lado : } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{cos} kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{cos} kx dx$$

$$k = 0 : a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$k \neq 0 : a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{cos} kx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \operatorname{sen} kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx dx \right], \text{ de donde}$$

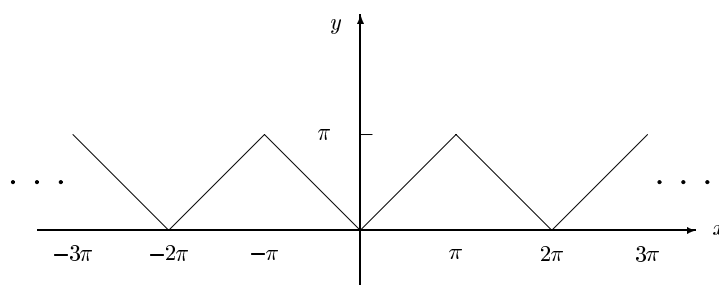
$$a_k = \begin{cases} \frac{-4}{\pi k^2} & , \text{ si } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & , \text{ si } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

En consecuencia, el desarrollo en serie de Fourier de f es:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{cos} x + \frac{\operatorname{cos} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{cos} 5x}{5^2} + \dots \right)$$

Como f y $f' \in PC[-\pi, \pi]$ entonces la serie de Fourier anterior converge puntualmente en todo \mathbb{R} .

La gráfica de la serie de Fourier de f es:



En particular se tiene que cuando $x = 0$,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

de donde: $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

Ejemplo 3.4 1. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } -\pi < x \leq 0 \\ x & , \text{ si } 0 \leq x < \pi \end{cases} \text{ y trazar la gráfica de la serie obtenida.}$$

2. Usar la serie obtenida en 1. para probar que:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

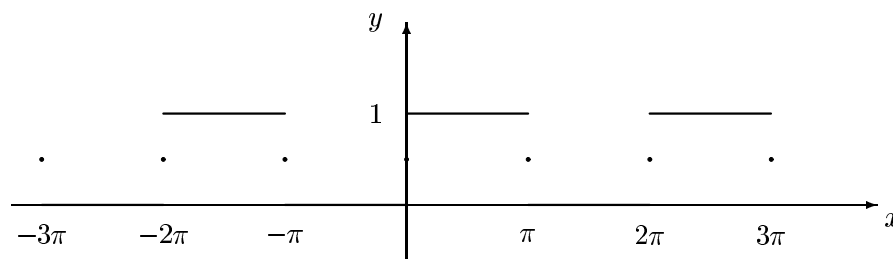
Ejemplo 3.5 Sea g la función en $PC[-\pi, \pi]$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } -\pi < x < 0 \\ 1 & , \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Notar que si f es la función del **Ejemplo 3.2**, entonces $g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f$. De lo anterior y del desarrollo encontrado en el **Ejemplo 3.2**, se concluye que el desarrollo en serie de Fourier de g es:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\text{sen}x + \frac{\text{sen}3x}{3} + \frac{\text{sen}5x}{5} + \dots \right)$$

La gráfica de la serie de g es:



3.3. Series de Senos y de Cosenos

Si f es una función **par** en $PC[-\pi, \pi]$, entonces, para todos los valores de k , $f(x)\cos kx$ es par, y $f(x)\sen kx$ es impar. Por lo tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx,$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sen kx dx = 0,$$

de donde concluimos que:

“El desarrollo en serie de Fourier de una función **par** en $PC[-\pi, \pi]$ incluye solamente términos cosenos, y viene dado por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{donde} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx”$$

Un argumento similar al anterior muestra que:

“El desarrollo en serie de Fourier de una función **impar** en $PC[-\pi, \pi]$ incluye solamente términos senos, y viene dado por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sen kx, \quad \text{donde} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sen kx dx”.$$

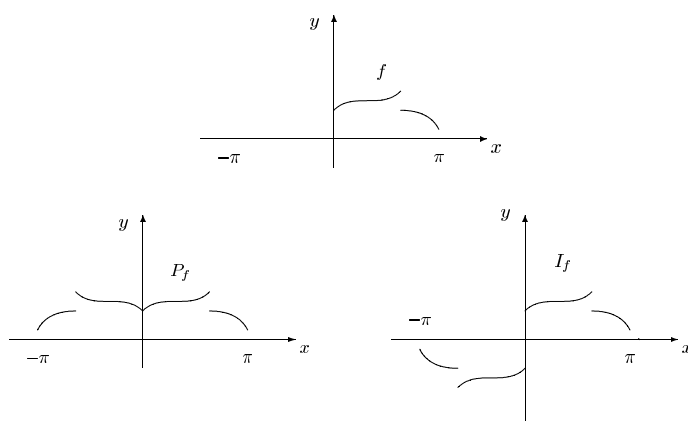
En las aplicaciones de la teoría de las series de Fourier, frecuentemente se necesita obtener el desarrollo en serie para una función f continua por tramos, que está definida solamente en el intervalo $[0, \pi]$. Una forma de obtener dicho desarrollo en serie, es **extendiendo** f al intervalo $[-\pi, \pi]$ (donde con esto quiere decirse que se define una función F en $[-\pi, \pi]$ de tal modo que F coincide con f en $[0, \pi]$), y entonces F se desarrolla en serie de Fourier. En aquellos casos donde f se comporte razonablemente bien (por ejemplo de tal forma que F y $F' \in PC[-\pi, \pi]$), el desarrollo en serie de Fourier de F será una buena aproximación de f en $[0, \pi]$.

Lo esencial de este método tiene relación con la forma en que f es extendida a $[-\pi, \pi]$. Esto, por supuesto puede hacerse de muchas formas, pero las siguientes dos extensiones son las más convenientes e importantes. La primera es llamada **extensión par** de f , denotada por P_f , y definida por:

$$P_f(x) = \begin{cases} f(-x) & , \text{ si } -\pi \leq x < 0 \\ f(x) & , \text{ si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

mientras que la segunda es llamada la **extensión impar** de f , denotada por I_f , y definida por:

$$I_f(x) = \begin{cases} -f(-x) & , \text{ si } -\pi \leq x < 0 \\ f(x) & , \text{ si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



Es claro que P_f es una función par, y que I_f es una función impar, para cualquier f . Por lo tanto:

1. El desarrollo en serie de Fourier de P_f es:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{donde} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Esta serie es llamada el **desarrollo en serie de Fourier de coseno** de f .

2. El desarrollo en serie de Fourier de I_f es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \text{donde} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Esta serie es llamada el **desarrollo en serie de Fourier de seno** de f .

Ejercicio 3.1 Sea f la función definida por $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq \pi$.

1. Encontrar las extensiones par e impar de f .
2. Calcular las series de Fourier de coseno y de seno de f .

Solución:

1.

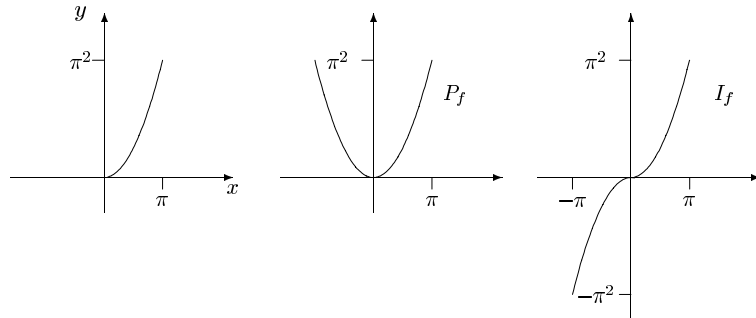
$$P_f(x) = \begin{cases} (-x)^2 & , \text{ si } -\pi \leq x < 0 \\ x^2 & , \text{ si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} x^2 & , \text{ si } -\pi \leq x < 0 \\ x^2 & , \text{ si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

es decir, la extensión par de f es: $P_f(x) = x^2$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Por su parte, la extensión impar de f es:

$$I_f(x) = \begin{cases} -(-x)^2 & , \text{ si } -\pi \leq x < 0 \\ x^2 & , \text{ si } 0 < x \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & , \text{ si } -\pi \leq x < 0 \\ x^2 & , \text{ si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Los gráficos de f , P_f e I_f vienen dados por:



2. El desarrollo en serie de Fourier de coseno de f es:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

donde

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right] \\ &= \frac{-4}{\pi k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{-4}{\pi k} \left[\frac{-x}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4}{\pi k} \left[\frac{-\pi}{k} (-1)^k + \frac{1}{k} \left[\frac{\text{sen} kx}{k} \Big|_0^\pi \right] \right] \\
&= \frac{-4}{\pi k} \left[\frac{-\pi}{k} (-1)^k \right] = (-1)^k \frac{4}{k^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
a_k &= (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \\
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,
\end{aligned}$$

y luego el desarrollo en serie de coseno es:

$$\frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right)$$

Como f y f' son continuas por tramos en $[0, \pi]$, entonces la serie anterior converge puntualmente en todo \mathbb{R} . Su gráfica se muestra a continuación.

Por su parte, el desarrollo en serie de Fourier de seno de f es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen} kx,$$

donde

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \text{sen} kx dx$$

de donde,

$$b_k = \begin{cases} \frac{2\pi}{k} - \frac{8}{k^3\pi} & , \text{ si } k = 1, 3, 5, \dots \\ -\frac{2\pi}{k} & , \text{ si } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

de donde el desarrollo en serie de Fourier de seno de $f(x) = x^2$, $x \in [0, \pi]$, es:

$$2\pi \left(\text{sen} x - \frac{\text{sen} 2x}{2} + \frac{\text{sen} 3x}{3} - \dots \right) - \frac{8}{\pi} \left(\text{sen} x + \frac{\text{sen} 3x}{3^3} + \frac{\text{sen} 5x}{5^3} + \dots \right)$$

Tal como antes, la serie anterior converge puntualmente en todo \mathbb{R} , y su gráfica también se muestra a continuación.

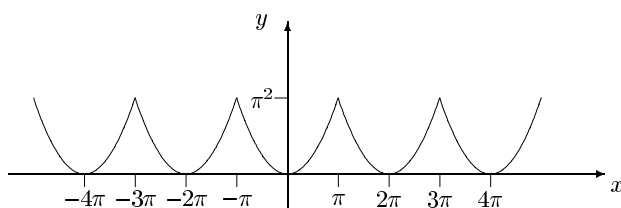


Figura 3.3: Gráfica de la serie de Fourier de coseno de f .

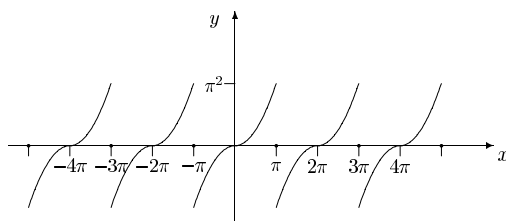


Figura 3.4: Gráfica de la serie de Fourier de seno de f .

3.4. Cambio de Intervalo

Hasta ahora se ha tratado exclusivamente con funciones definidas en los intervalos $[-\pi, \pi]$ y $[0, \pi]$. Sin embargo, esto es demasiado restrictivo, y ahora generalizaremos los resultados a un intervalo arbitrario $[a, b]$.

Antes de ver el caso general, primero consideremos intervalos de la forma $[-p, p]$.

Definición 3.5 Sea f una función continua por tramos en $[-p, p]$ (donde p es una constante positiva). Llamaremos Serie de Fourier de f a la serie :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{p} \right) + b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{p} \right) \right) \quad \text{donde}$$

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{p} \right) dx, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad y$$

$$b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{p} \right) dx, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Observación 3.5 1. Los resultados anteriores referentes a convergencia, son también válidos en este caso. Así por ejemplo se tiene que: “Si f y $f' \in PC[-p, p]$, entonces la Serie de Fourier de f converge puntualmente en todo \mathbb{R} ; más aún, si F denota la extensión periódica de f (esto es, F coincide con f en $[-p, p]$ y fuera de $[-p, p]$ está definida por $F(x+2p) = F(x)$), entonces el valor de la serie es $F(x_0)$ si x_0 es un punto de continuidad de F , y es $\frac{F(x_0^+) + F(x_0^-)}{2}$ si x_0 es una discontinuidad de F ”

2. Notar que si $p = \pi$, entonces tenemos la Serie de Fourier que consideramos en la sección 3.2.4.
3. La discusión anterior puede adaptarse fácilmente al caso general de una función $f \in PC[a, b]$, siendo $[a, b]$ un intervalo arbitrario. De hecho, el desarrollo en Serie de Fourier de una $f \in PC[a, b]$ es:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{2k\pi x}{b-a} \right) + b_k \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi x}{b-a} \right) \right)$$

donde

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \left(\frac{2k\pi x}{b-a} \right) dx, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots$$

y

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi x}{b-a} \right) dx, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Ejercicio 3.2 Encontrar el desarrollo en serie de Fourier, en $PC[0, 1]$, de la función $f(x) = x$.

Solución: En este caso, $[a, b] = [0, 1]$, y luego el desarrollo en Serie de Fourier de f es:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2k\pi x) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi x))$$

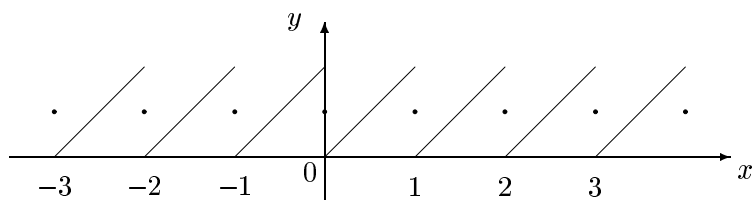
donde

$$a_k = 2 \int_0^1 x \cos(2k\pi x) dx, \quad \text{y} \quad b_k = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(2k\pi x) dx$$

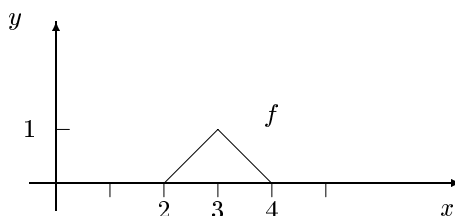
Integrando por partes se obtiene que: $a_0 = 1$, $a_k = 0$ para $k \neq 0$, y $b_k = \frac{-1}{k\pi}$ para $k = 1, 2, \dots$. Por lo tanto, la serie de Fourier de la función $f(x) = x$ en $PC[0, 1]$ es:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{sen} 2\pi x + \frac{\operatorname{sen} 4\pi x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 6\pi x}{3} + \dots \right)$$

La gráfica de esta serie es:



Ejercicio 3.3 Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función $f \in PC[2,4]$ cuya gráfica es:



Solución: Del gráfico de f deducimos que $[a, b] = [2, 4]$, y :

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & , \text{ si } 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x & , \text{ si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

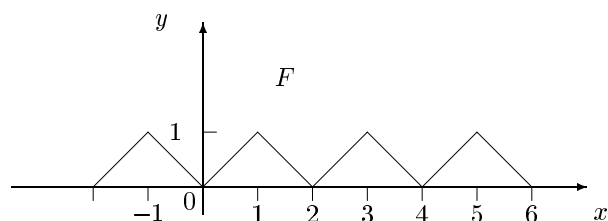
El desarrollo en serie de Fourier de f es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \operatorname{sen}(k\pi x)), \quad \text{donde:}$$

$$a_k = \int_2^4 f(x) \cos(k\pi x) dx = \int_2^3 (x-2) \cos(k\pi x) dx + \int_3^4 (4-x) \cos(k\pi x) dx \quad y$$

$$b_k = \int_2^4 f(x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx = \int_2^3 (x-2) \operatorname{sen}(k\pi x) dx + \int_3^4 (4-x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx$$

Aunque estas integrales pueden calcularse directamente, los cálculos pueden simplificarse considerablemente al tomar en cuenta el siguiente argumento :



Si F es la extensión periódica de f a todo \mathbb{R} , ($F(x+2) = F(x)$, $\forall x$) entonces las funciones $F(x)\cos(k\pi x)$ y $F(x)\sen(k\pi x)$ son periódicas de período 2 y luego se cumple que:

$$\int_{x_0}^{x_0+2} F(x)\cos(k\pi x)dx = \int_2^4 F(x)\cos(k\pi x)dx = \int_2^4 f(x)\cos(k\pi x)dx, \quad y$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2} F(x)\sen(k\pi x)dx = \int_2^4 F(x)\sen(k\pi x)dx = \int_2^4 f(x)\sen(k\pi x)dx$$

para todo número real x_0 .

En particular, si $x_0 = -1$ tenemos:

$$a_k = \int_2^4 f(x)\cos(k\pi x)dx = \int_{-1}^1 F(x)\cos(k\pi x)dx = \int_{-1}^1 |x|\cos(k\pi x)dx$$

$$b_k = \int_2^4 f(x)\sen(k\pi x)dx = \int_{-1}^1 F(x)\sen(k\pi x)dx = \int_{-1}^1 |x|\sen(k\pi x)dx$$

Pero la función valor absoluto $x \mapsto |x|$ es una función par en $[-1, 1]$, de donde:

$$b_k = 0, \quad \forall k, \quad y$$

$$a_k = 2 \int_0^1 x\cos(k\pi x)dx$$

Calculando se obtiene :

$$a_0 = 1, \quad a_k = \begin{cases} \frac{-4}{k^2\pi^2} & , \text{ si } k \text{ es impar} \\ 0 & , \text{ si } k \text{ es par, } k \neq 0 \end{cases}$$

Así, el desarrollo en serie de Fourier de $f \in PC[2, 4]$ es:

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos\pi x + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \dots \right)$$

Observación 3.6 Sea f una función continua por tramos en \mathbb{R} (esto es, tal que f restringida a cualquier intervalo acotado $[a, b]$, es continua por tramos en $[a, b]$). Se dice que f es **periódica** si existe una constante real $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo x en el dominio de f . La constante real positiva más pequeña T con esta propiedad se llama el **período** de f .

Se tiene la siguiente propiedad importante:

“ Si f es una función continua por tramos en \mathbb{R} que es periódica de período $2p$, entonces:

$$\int_{x_0}^{x_0+2p} f(x)dx = \int_{y_0}^{y_0+2p} f(x)dx \quad \text{para todo par de números reales } x_0, y_0$$

3.5. Integración de Series de Fourier

Teorema 3.3 Sea f una función continua por tramos en \mathbb{R} , periódica de período 2π , y sea:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

la serie de Fourier de f . Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\operatorname{sen}kb - \operatorname{sen}ka) - b_k(\operatorname{cos}kb - \operatorname{cos}ka)}{k}$$

En otras palabras, la integral definida de f de a a b puede calcularse por la integración, término a término, de la serie de Fourier de f .

Teorema 3.4 (Teorema de Integración)

Sea f una función cualquiera en $PC[-\pi, \pi]$, cuya serie de Fourier es :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{cos}kx + b_k \operatorname{sen}kx).$$

Entonces la función $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$, $x \in]-\pi, \pi[$, tiene una serie de Fourier que converge puntualmente en $]-\pi, \pi[$, y

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \operatorname{cos}kx + [a_k + (-1)^{k+1}a_0] \operatorname{sen}kx}{k}, \quad \forall x \in]-\pi, \pi[.$$

3.6. Problemas de Sturm-Liouville

Consideremos la ecuación diferencial en el intervalo $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

donde $p \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $p(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$, $q, r \in \mathcal{C}[a, b]$, $r(x) \neq 0, \quad \forall x \in]a, b[$, y λ es un parámetro independiente de x . Esta ecuación es conocida como una **Ecuación de Sturm-Liouville**.

Si a dicha ecuación diferencial le agregamos las condiciones en la frontera:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

donde α_1, α_2 , son constantes reales no ambas cero, y β_1, β_2 son constantes reales no ambas cero, entonces obtenemos el problema con valores en la frontera :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \quad a \leq x \leq b \\ \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

(*) es llamado un **Problema de Sturm-Liouville**.

Estos problemas se presentan en la práctica al usar el método de separación de variables en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

Es claro que para todo número λ , el problema (*) tiene la solución trivial $y \equiv 0$, es decir $y(x) = 0, \forall x \in [a, b]$. Las soluciones no-triviales (si es que existen) se llaman **funciones propias** del problema, y los valores de λ para los que esas soluciones no triviales existen son los **valores propios** del problema (*).

Ejemplo 3.6 *Encontrar los valores propios y las funciones propias del siguiente problema de Sturm-Liouville:*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Solución: Si $\lambda < 0$ entonces la solución general de la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ es:

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

De las condiciones $y(0) = y(\pi) = 0$ se obtiene $c_1 = c_2 = 0$, de donde $y \equiv 0$ la cual no es una función propia.

Si $\lambda = 0$, entonces la solución general de la ecuación $y'' = 0$ es: $y(x) = c_1 + c_2 x$. De las condiciones $y(0) = y(\pi) = 0$ se obtiene $c_1 = c_2 = 0$, de donde $y \equiv 0$ la cual no es una función propia.

Si $\lambda > 0$, entonces la solución general de la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ es $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$.

$y(0) = 0 \implies c_1 = 0$
 $y(\pi) = 0 \implies c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, de donde $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ (buscamos soluciones no-triviales), es decir:

$$\sqrt{\lambda} = n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto:

$$\lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, $\lambda = 1, 4, 9, 16, \dots$, son los valores propios del problema planteado, y las funciones propias correspondientes son $y(x) = c_2 \operatorname{sen}(nx)$ ($c_2 \neq 0$), $n \in \mathbb{N}$. Tomando $c_2 = 1$ se obtiene que:
 $y(x) = \operatorname{sen}(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ es un conjunto completo de funciones propias.

En resumen:

Valores propios: $\lambda = 1, 4, 9, 16, \dots$

Funciones propias: $y(x) = \operatorname{sen}x, \operatorname{sen}2x, \operatorname{sen}3x, \operatorname{sen}4x, \dots$

Capítulo 4

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Una ecuación diferencial parcial (E.D.P.) es una ecuación que contiene una función incógnita de dos o más variables independientes y una o más derivadas parciales de dicha función incógnita.

El orden de una ecuación diferencial parcial es el orden de la derivada de más alto orden que aparece.

Ejemplo 4.1 *La ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(*c constante*) es una E.D.P. de orden 2 (o de segundo orden). Aquí u es la función incógnita, y x, t son las variables independientes. Esta ecuación es conocida como la **ecuación unidimensional de onda**.

Notemos que la ecuación anterior se puede escribir como $L(u) = 0$ donde

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

este operador tiene una propiedad muy especial: observemos que si $u(x, t)$ y $v(x, t)$ son funciones cualesquiera dos veces derivables y α, β son constantes, entonces:

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v),$$

es decir, L es un operador lineal.

Una E.D.P. de la forma $L(u) = f$ donde f es una función dada y L es un operador lineal, es llamada una **ecuación diferencial parcial lineal**. La ecuación unidimensional de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

es una E.D.P. lineal. Por otro lado, la E.D.P.:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 1$$

no es lineal.

Una E.D.P. lineal $L(u) = f$ donde $f = 0$ (es decir una E.D.P. lineal de la forma $L(u) = 0$) se llama **ecuación homogénea**.

Una E.D.P. lineal general de orden dos en dos variables independientes tiene la forma:

$$(*) \dots A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

donde A, B, \dots, G pueden depender de x, y , pero no de u .

La ecuación (*) es llamada:

1. **elíptica** si $B^2 - 4AC < 0$
2. **parabólica** si $B^2 - 4AC = 0$
3. **hiperbólica** si $B^2 - 4AC > 0$.

Algunos ejemplos de E.D.P. lineales de orden dos importantes son:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Ecuación unidimensional de onda.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Ecuación unidimensional del calor.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Ecuación bidimensional de Laplace.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{Ecuación bidimensional de Poisson.}$$

Una **solución** de una E.D.P. en alguna región R del espacio de las variables independientes es una función u que tiene todas las derivadas parciales que aparecen en la ecuación, en algún dominio que contiene a R , y que satisface la ecuación, en todo punto de R .

En general, la totalidad de las soluciones de una E.D.P. es muy grande. Por ejemplo, las funciones:

$$u_1(x, y) = x^2 - y^2, \quad u_2(x, y) = e^x \cos y, \quad u_3(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

que son totalmente diferentes entre sí, son soluciones de la ecuación bidimensional de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Más adelante se verá que la solución única de una E.D.P. correspondiente a un problema físico dado se obtiene mediante la aplicación de información adicional derivada de la situación física. Por ejemplo, en algunos casos, se dan los valores de la solución requerida del problema sobre la frontera de algún dominio (**condiciones en la frontera**); en otros casos, cuando el tiempo t es una de las variables, se indican los valores de la solución en $t = 0$ (**condiciones iniciales**).

Teorema 4.1 (superposición) Si u_1 y u_2 son soluciones cualesquiera de una ecuación diferencial parcial lineal y homogénea $Lu = 0$ en alguna región R , entonces $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ (donde c_1, c_2 son constantes cualesquiera) también es una solución de esa ecuación, en R .

4.1. Modelo de la Cuerda vibrante. Ecuación unidimensional de onda.

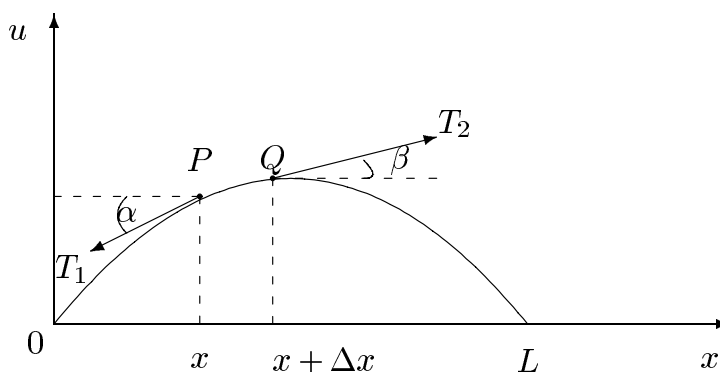
Como una primera E.D.P. importante, consideraremos la ecuación que rige las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda vibrante, la cual se estira hasta tener la longitud L y a continuación se fija en los puntos extremos. Supóngase que la cuerda se deforma y entonces, en un determinado momento considerado como $t = 0$, se suelta y se le deja vibrar. El problema es determinar las vibraciones de la cuerda.

Al deducir una ecuación diferencial correspondiente a un problema físico dado, normalmente tienen que efectuarse simplificaciones para que la ecuación resultante no quede demasiado complicada. En este caso se hacen las siguientes suposiciones :

- 1.- La masa de la cuerda por unidad de longitud es constante (**cuerda homogénea**). Además, la cuerda es perfectamente elástica y no ofrece resistencia alguna a la flexión.
- 2.- La tensión causada al estirar la cuerda antes de fijarla en sus puntos extremos es tan grande que puede despreciarse la acción de la fuerza gravitacional sobre la cuerda.
- 3.- La cuerda realiza un movimiento transversal pequeño en un plano vertical, es decir, toda partícula de la cuerda se mueve estrictamente en la dirección vertical, de modo que la deflexión y la pendiente en todo punto de la cuerda se mantienen con valor absoluto pequeño.

Ahora, introducimos un sistema de coordenadas rectangulares (x, u) de modo que un extremo de la cuerda esté en $(0, 0)$ y el otro extremo en $(L, 0)$.

Con las suposiciones anteriores se tiene que si $u(x, t)$ representa el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x en el instante t , entonces la función $u(x, t)$ describirá de manera razonable las vibraciones de la cuerda vibrante.



Para obtener la ecuación diferencial se consideran las fuerzas que actúan sobre una pequeña porción de la cuerda (ver figura anterior). Como la cuerda no ofrece resistencia a la flexión, la tensión es tangencial a la curva de la cuerda en cada punto. Sean T_1 y T_2 las tensiones en los

puntos extremos P y Q de esa porción. Debido a que no hay movimiento en la dirección horizontal, las componentes horizontales de la tensión deben ser constantes. Usando la notación mostrada en la figura anterior, se obtiene :

$$(i) \dots T_1 \cos(\alpha) = T_2 \cos(\beta) = T = \text{constante}$$

En la dirección vertical se tienen dos fuerzas : las componentes verticales $-T_1 \text{sen}(\alpha)$ y $T_2 \text{sen}(\beta)$ de T_1 y T_2 respectivamente. De acuerdo a la **segunda ley de Newton**, la resultante de esas dos fuerzas es igual a la masa $\rho \Delta s$ de la porción por la aceleración $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, evaluada en algún punto entre x y $x + \Delta x$; (ρ es la masa de la cuerda por unidad de longitud (densidad) y Δs es la longitud de la porción). Así tenemos por lo anterior que :

$$T_2 \text{sen}(\beta) - T_1 \text{sen}(\alpha) = \rho \Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Aplicando (i) a lo anterior obtenemos :

$$\frac{T_2 \text{sen}(\beta)}{T_2 \cos(\beta)} - \frac{T_1 \text{sen}(\alpha)}{T_1 \cos(\alpha)} = \frac{\rho \Delta s}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Como la pendiente de la curva de la cuerda es pequeña, puede sustituirse Δs por Δx . Por lo tanto la ecuación anterior queda como :

$$(ii) \dots \tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Pero sucede que $\tan(\alpha)$ y $\tan(\beta)$ son las pendientes de la curva de la cuerda en x y en $x + \Delta x$, respectivamente, es decir :

$$\tan(\alpha) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x, \quad \tan(\beta) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

Dividiendo (ii) por Δx , obtenemos :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Por último, si ahora hacemos tender Δx a cero, se obtiene la ecuación :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Si $c^2 = \frac{T}{\rho} (> 0)$, entonces la E.D.P. anterior queda como :

$$(1) \dots \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

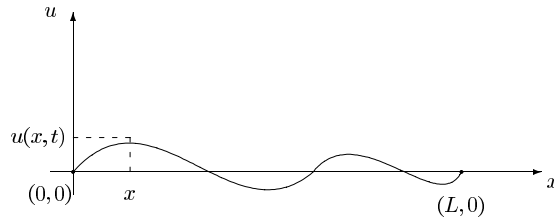


Figura 4.1: Cuerda en el instante t

Tal como mencionamos antes, esta ecuación es conocida como la **ecuación unidimensional de onda**.

Para determinar como se mueve la cuerda, se busca una solución u de (1) que también satisfaga las condiciones impuestas por el sistema físico.

Como la cuerda se fija en los extremos $x = 0$ y $x = L$, se tienen las dos **condiciones en la frontera**:

$$(2) \dots u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

La forma del movimiento de la cuerda dependerá de la posición inicial de la cuerda $u(x, 0)$ y de la velocidad inicial $u_t(x, 0)$. Si se denota la posición inicial por $f(x)$ y la velocidad inicial por $g(x)$, se obtienen entonces las dos **condiciones iniciales**:

$$(3) \dots u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad y$$

$$(4) \dots u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

(Notar que para que las condiciones iniciales sean compatibles con las condiciones en la frontera, necesariamente $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$).

Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} (1) \dots u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\ (2) \dots u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ (3) \dots u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ (4) \dots u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Para solucionar este problema, lo haremos en 3 etapas:

Primer paso: Aplicar el llamado **Método de separación de variables**, de donde se obtendrán dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Segundo paso: Se determinarán soluciones de esas dos ecuaciones, que satisfagan las condiciones en la frontera.

Tercer paso: Se sumarán esas soluciones de modo que el resultado sea una solución de la ecuación de onda (1), que satisfaga también las condiciones iniciales dadas.

Primer paso : Suponemos que $u(x, t) = F(x)G(t) \dots (5)$, es decir que u es el producto de dos funciones, una que depende sólo de x y otra que depende sólo de t . Reemplazando en (1), obtenemos: $F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$, de donde dividiendo por $c^2 F(x)G(t)$ se tiene:

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}, \quad \text{siempre que } F(x)G(t) \neq 0,$$

y luego como x y t son variables independientes, concluimos que :

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k, \quad \text{siendo } k \text{ una constante.}$$

Lo anterior produce las siguientes dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias :

$$(6) \dots F''(x) - kF(x) = 0, \quad \text{y}$$

$$(7) \dots G''(t) - c^2 k G(t) = 0$$

Aquí, k es una constante arbitraria.

Segundo paso: A continuación, se determinan soluciones F y G de (6) y (7) tales que $u(x, t) = F(x)G(t)$ satisfaga las condiciones en la frontera (2), es decir tales que:

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = F(L)G(t) = 0, \quad \forall t.$$

Es claro que si $G \equiv 0$ entonces $u \equiv 0$, lo cual no tiene interés alguno (ya que no nos ayudará a resolver nuestro problema de la cuerda vibrante). Por lo tanto, $G \neq 0$, de donde se obtiene:

$$F(0) = F(L) = 0 \dots (8)$$

Pasamos ahora a resolver:

$$(9) \dots \begin{cases} F''(x) - kF(x) = 0 \\ F(0) = F(L) = 0 \end{cases}$$

Si $k > 0$ entonces la solución general de $F''(x) - kF(x) = 0$ es $F(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$, y aplicando las condiciones $F(0) = F(L) = 0$, obtenemos $F \equiv 0$ lo cual no tiene interés alguno porque entonces $u \equiv 0$.

Si $k = 0$ entonces la solución general de $F''(x) - kF(x) = 0$ ($\Leftrightarrow F''(x) = 0$) es $F(x) = Ax + B$, y aplicando las condiciones $F(0) = F(L) = 0$ se obtiene $A = B = 0$, de donde $F \equiv 0$, como antes.

Por lo tanto, $k \geq 0 \Rightarrow$ la única solución de (9) es $F \equiv 0$, la cual no tiene interés alguno.

Por último, si $k < 0$ entonces la solución general de $F''(x) - kF(x) = 0$ es:

$$F(x) = A\cos(\sqrt{-k}x) + B\sen(\sqrt{-k}x),$$

y aplicando las condiciones $F(0) = F(L) = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ F(L) = 0 &\Rightarrow B\sen(\sqrt{-k}L) = 0 \Rightarrow \sen(\sqrt{-k}L) = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{-k}L = n\pi, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{-k} = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así, se ha obtenido las siguientes soluciones no-triviales de (9):

$$(10) \dots F_n(x) = B_n \sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (B_n \neq 0) \quad (\text{una infinidad de soluciones}).$$

Ahora, consideramos la ecuación diferencial $G''(t) - c^2kG(t) = 0$ para los valores $k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ($n \in \mathbb{N}$) que acaban de obtenerse. Es decir, se considera:

$$G''(t) + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0, \quad \text{o escrito más brevemente:}$$

$$G''(t) + \lambda_n^2 G(t) = 0, \quad \text{donde} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Una solución general de esta ecuación es:

$$G_n(t) = C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \sen(\lambda_n t) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Por lo tanto: las funciones

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) &= (C_n B_n \cos(\lambda_n t) + D_n B_n \sen(\lambda_n t)) \sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \\ &= (\alpha_n \cos(\lambda_n t) + \beta_n \sen(\lambda_n t)) \sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

son soluciones de (1) que satisfacen las condiciones en la frontera (2) (siendo $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$, y siendo α_n, β_n constantes arbitrarias).

Tercer paso:

En general, una solución :

$$u_n(x, t) = (\alpha_n \cos(\lambda_n t) + \beta_n \sen(\lambda_n t)) \sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \dots (11)$$

no satisface las condiciones iniciales (3) y (4).

Pero como la ecuación (1) es lineal y homogénea, y las condiciones (2) son $u(0, t) = u(L, t) = 0$, entonces la suma de un número finito (por grande que sea) de soluciones u_n , es también una solución de (1) que satisface las condiciones (2).

Para obtener una solución que satisfaga (3) y (4), se considera la serie infinita (que en principio no sabemos si es o no convergente):

$$(12) \cdots u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(\lambda_n t) + \beta_n \operatorname{sen}(\lambda_n t)) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

A partir de esto y la condición inicial (3) se concluye que:

$$(13) \cdots u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

de donde, para que (12) satisfaga (3) deben elegirse los coeficientes α_n de modo que $u(x, 0)$ sea el desarrollo en serie de Fourier de seno de $f \in PC[0, L]$, es decir:

$$(14) \cdots \alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Análogamente, si obtenemos $u_t(x, t)$ derivando la serie dada en (12) término a término (procediendo formalmente), y aplicamos la segunda condición inicial (4), se encuentra que:

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_n \lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n t + \beta_n \lambda_n \cos \lambda_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \lambda_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

de donde para que (12) satisfaga (4) deben elegirse las coeficientes β_n de modo que $u_t(x, 0)$ sea el desarrollo en serie de Fourier de seno de $g(x)$; es decir:

$$\beta_n \lambda_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

de donde como $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$, se obtiene:

$$(15) \cdots \beta_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

En principio, $u(x, t)$ dada por (12), con coeficientes dados por (14) y (15), suministra sólo una solución **formal** del problema (1) – (2) – (3) – (4) (decimos “formal” ya que no sabemos, al menos por ahora, si la serie dada en (12) es o no convergente).

Existen resultados que garantizan que bajo ciertas condiciones sobre las funciones f y g , la serie dada en (12) con coeficientes α_n, β_n dados por (14) y (15), no sólo es convergente, sino que define una función $u(x, t)$ que es de clase C^2 , que satisface la ecuación unidimensional de onda (1), satisface las condiciones de contorno (2) y las condiciones iniciales (3) y (4). A continuación, entregamos uno de estos resultados :

Teorema 4.2 *Supongamos que f y g son funciones reales definidas en $[0, L]$ tales que f, f', f'', g, g' son continuas, y f''' y g'' son continuas por tramos. Además, supongamos que $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$. Entonces, la serie dada en (12) con coeficientes dados por (14) y (15), es una serie convergente, define una función $u(x, t)$ que es continua en $\overline{\mathcal{R}} \equiv \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$, que es de clase C^2 en $\mathcal{R} \equiv \{(x, t) : 0 < x < L, t > 0\}$, que satisface la ecuación (1) en \mathcal{R} , y satisface las condiciones (2), (3), y (4).*

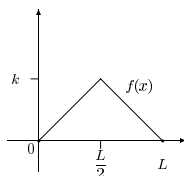
En los capítulos 6 y 7 aparecerán varios problemas del tipo (1) – (2) – (3) – (4), en los que las funciones f y g satisfacen las condiciones requeridas en el teorema anterior.

Sin embargo, las condiciones exigidas en el Teorema anterior son demasiado restrictivas, y en la práctica se presenta una gran cantidad de problemas en los cuales f y g no satisfacen tales hipótesis. En este tipo de casos, también se habla de una solución del problema (1) – (2) – (3) – (4) en un sentido más amplio. Un caso como el recién mencionado es el de una deflexión inicial triangular, que se muestra a continuación :

Ejemplo 4.2 *Encontrar la solución de la ecuación de onda (1) correspondiente a la deflexión inicial triangular (k será aquí una constante positiva) :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x, & \text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x), & \text{si } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

y velocidad inicial 0.



Solución: Como $g(x) \equiv 0$, se tiene que $\beta_n = 0, \quad \forall n$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} \frac{2k}{L} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{L/2}^L \frac{2k}{L} (L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{4k}{L^2} \left[\int_0^{L/2} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{L/2}^L (L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{4k}{L^2} \left[2 \left(\frac{L^2}{n^2\pi^2} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \right] = \frac{8k}{n^2\pi^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right).$$

Por lo tanto, la solución $u(x, t)$ buscada viene dada por:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\lambda_n t) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8k}{n^2\pi^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \cos \left(\frac{cn\pi t}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{8k}{\pi^2} \left[\cos \left(\frac{c\pi t}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) - \frac{1}{3^2} \cos \left(\frac{3c\pi}{L} t \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi}{L} x \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

4.2. Solución de D'Alembert de la Ecuación de onda

Es importante hacer notar que la solución (17) de la ecuación de onda:

$$(1) \dots \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

puede obtenerse de otra forma, transformando adecuadamente (1). Más precisamente, si se introducen las nuevas variables independientes:

$$v = x + ct, \quad z = x - ct$$

Entonces, u se transforma en una función de v y z , y es posible expresar las derivadas que aparecen en (1) desde el punto de vista de derivadas con respecto a v y z , aplicando la regla de la cadena.

La situación es:

$$u = u(v, z) = u(v(x, t), z(x, t))$$

Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

y si suponemos que u es de clase C^2 entonces concluimos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Análogamente se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Reemplazando en (1), tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0.$$

Está claro entonces que el punto central del presente enfoque es que la ecuación anterior puede resolverse con facilidad mediante dos integraciones sucesivas. En efecto :

Al integrar con respecto a z , se obtiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v), \quad \text{donde } h(v) \text{ es una función arbitraria de } v.$$

A continuación, integrando con respecto a v , obtenemos:

$$u = \int h(v) dv + \Psi(z), \quad \text{donde } \Psi(z) \text{ es una función arbitraria de } z.$$

Como la $\int h(v) dv$ es una función de v , entonces llamándole $\phi(v)$, obtenemos que la solución u es de la forma:

$$u = \phi(v) + \Psi(z).$$

Ahora, como $v = x + ct$, $z = x - ct$, entonces:

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \Psi(x - ct) \dots (I).$$

Esta expresión (I) se conoce como **solución de d'Alembert** de la ecuación de onda (1).

Es posible determinar las funciones ϕ y Ψ a partir de las condiciones iniciales. Para simplificar, consideremos el caso de velocidad inicial $g(x) \equiv 0$ y deflexión inicial $u(x, 0) = f(x)$.

Al derivar (I) con respecto a t obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x + ct) - c\Psi'(x - ct).$$

Luego:

$$u(x, 0) = \phi(x) + \Psi(x) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\Psi'(x) = 0$$

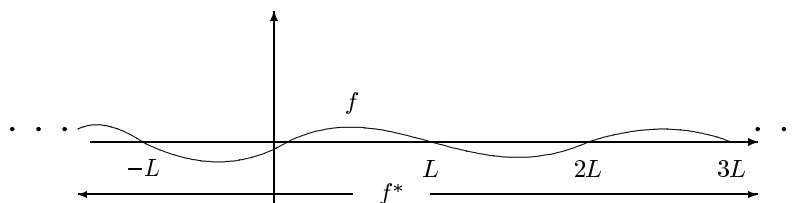
De la última ecuación tenemos: $\Psi' = \phi'$, de donde: $\Psi = \phi + k$, k constante; de esto último y de la primera ecuación tenemos: $2\phi + k = f$, es decir: $\phi = \frac{f-k}{2}$.

Por lo tanto:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] \cdots (II)$$

Como $u(x, t)$ debe estar definido para todo $0 \leq x \leq L$ y para todo $t \geq 0$, de la ecuación (II) anterior vemos que la función f debe extenderse a todo \mathbb{R} . De las condiciones de frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$ se observa que dicha extensión debe ser impar y periódica, de período $2L$. No olvidemos que también se requiere que dicha extensión debe resultar ser de clase C^2 . Así, si llamamos f^* a la extensión periódica impar de f , con período $2L$, entonces :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x + ct) + f^*(x - ct)]$$



4.3. Flujo Unidimensional del Calor

El flujo de calor en un cuerpo de material homogéneo lo rige la llamada ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u, \quad (c^2 = K/\sigma\rho)$$

donde $u(x, y, z, t)$ es la temperatura en el cuerpo (en el punto (x, y, z) y en el instante t), K es la conductividad térmica, σ es el calor específico y ρ es la densidad del material del cuerpo. $\nabla^2 u$ es el laplaciano de u con respecto a las coordenadas x, y, z ,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Como una aplicación importante, se considera la temperatura en una varilla delgada, o alambre, de sección transversal constante y material homogéneo, la cual está orientada a lo largo del eje x y se encuentra perfectamente aislada en toda su superficie lateral, de modo que el calor sólo fluye en la dirección x .



Por lo tanto, u sólo depende de x , y del tiempo t , y la ecuación se convierte en:

$$(1) \dots \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

la cual es conocida como la **ecuación unidimensional del calor**.

Resolveremos (1) para cierto tipo importante de condiciones en la frontera y condiciones iniciales. El procedimiento será semejante al aplicado en el caso de la ecuación de onda.

Veremos el caso en el que los extremos $x = 0$ y $x = L$ de la varilla (L es la longitud de la varilla) se mantienen a la temperatura 0; luego las **condiciones en la frontera** son:

$$(2) \dots u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad \forall t$$

Sea $f(x)$ la temperatura inicial en la varilla; luego la **condición inicial** es:

$$(3) \dots u(x, 0) = f(x).$$

Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} (1) \dots u_t = c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\ (2) \dots u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ (3) \dots u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

que a continuación pasamos a resolver:

Primer Paso: Aplicando el método de separación de variables, en primer lugar se determinan soluciones de (1) que satisfagan las condiciones en la frontera (2). Se parte de:

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

Al sustituir en (1), se obtiene:

$$F(x)G'(t) = c^2 F''(x)G(t), \quad \text{de donde dividiendo por } c^2 F(x)G(t) \quad \text{se tiene :}$$

$$\frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}, \quad \text{siempre que } F(x)G(t) \neq 0.$$

La expresión de la izquierda sólo depende de t , mientras que la de la derecha sólo depende de x , por lo tanto las dos deben ser iguales a una constante, que la denotaremos por k .

Por lo tanto:

$$\frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

Esto conduce a las dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias:

$$(4) \dots F''(x) - kF(x) = 0, \quad y$$

$$(5) \dots G'(t) - c^2 kG(t) = 0.$$

Hasta aquí, k es todavía arbitraria.

Segundo Paso: Ahora se determinan soluciones F y G de (4) y (5) de modo que $u(x, t) = F(x)G(t)$ satisfaga las condiciones en la frontera (2), es decir:

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(L, t) = F(L)G(t) = 0, \quad \forall t,$$

de donde, como buscamos soluciones no-triviales, concluimos:

$$(6) \dots F(0) = F(L) = 0$$

Para $k = 0$ y $k > 0$, (4) y (6) implican que $F \equiv 0$ lo cual no tiene interés alguno porque entonces $u \equiv 0$.

Si $k < 0$ entonces la solución general de (4) es :

$$F(x) = A \cos(\sqrt{-k}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{-k}x).$$

De (6) se tiene: $F(0) = A = 0$, y entonces $F(L) = B \operatorname{sen}(\sqrt{-k}L) = 0$. Debemos tomar $B \neq 0$ ya que de lo contrario, $F \equiv 0$. Luego $\operatorname{sen}(\sqrt{-k}L) = 0$, de donde:

$$(7) \dots \sqrt{-k}L = n\pi, \quad \text{o bien,} \quad \sqrt{-k} = \frac{n\pi}{L} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Así entonces se obtienen las siguientes soluciones de (4) que satisfacen (6) :

$$(8) \dots F_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (B_n \neq 0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora se considera la ecuación diferencial (5). Para los valores $k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ que acaban de obtenerse, (5) toma la forma:

$$G'(t) + \lambda_n^2 G(t) = 0, \quad \text{donde} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

cuya solución general es:

$$G_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, las funciones:

$$(9) \dots u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n C_n e^{-\lambda_n^2 t} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = \alpha_n e^{-\lambda_n^2 t} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

son soluciones de (1) que satisfacen (2).

Tercer Paso: Para obtener una solución que también satisfaga (3), se considera la serie:

$$(10) \dots u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n^2 t} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

con $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$.

Basándose en esto y en (3) obtenemos:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = f(x)$$

de donde, para que (10) satisfaga (3), deben elegirse los coeficientes α_n de modo que $u(x, 0)$ sea el desarrollo en serie de Fourier de seno de $f \in PC[0, L]$; es decir:

$$(11) \dots \alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Observación 4.1 1. *Notar que, debido al factor exponencial, todos los términos (sumandos) de (10) tienden a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.*

2. *Tal como en el caso de la cuerda vibrante, aquí está presente el problema de la convergencia de la serie dada en (10). A continuación se entrega un resultado que da condiciones suficientes para que la serie dada por (10) sea convergente y sea una solución del problema (1) – (2) – (3).*

Teorema 4.3 *Sea $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $f(0) = f(L) = 0$ y tal que su derivada f' exista en $[0, L]$ y sea cuadrado integrable (esto es, que $\int_0^L |f'(x)|^2 dx < \infty$). Entonces la serie dada en (10) con coeficientes dados por (11), es una serie convergente, define una función $u(x, t)$ que es continua en $\overline{\mathcal{R}} \equiv \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$, tiene derivadas parciales u_t y u_{xx} en $\mathcal{R} \equiv \{(x, t) : 0 < x < L, t > 0\}$, y satisface (1) – (2) – (3).*

Observación 4.2 *Tal como antes, las condiciones exigidas en el Teorema anterior son demasiado restrictivas, y en la vida real se presenta una variedad de problemas en los que f no satisface las condiciones mencionadas. Nuevamente, en este tipo de casos se habla de una solución del problema (1) – (2) – (3) en un sentido más amplio. Un caso como este se da a continuación.*

Ejercicio 4.1 *Encontrar la solución $u(x, t)$ de la ecuación unidimensional del calor, que satisface las condiciones:*

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L - x, & \text{si } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Solución: *En este caso, la temperatura inicial es:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L - x, & \text{si } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Por lo anterior sabemos que la solución viene dada por:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-(\frac{cn\pi}{L})^2 t} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad \text{donde,} \\ \alpha_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} x \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx + \int_{L/2}^L (L - x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \right] \\ &= \frac{4L}{n^2 \pi^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución buscada es:

$$u(x, t) = \frac{4L}{\pi^2} \left[e^{-(\frac{c\pi}{L})^2 t} \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) - \frac{1}{9} e^{-(\frac{3c\pi}{L})^2 t} \text{sen} \left(\frac{3\pi}{L} x \right) + \dots \right]$$

Capítulo 5

Variable Compleja

Recordemos que, el conjunto de los números complejos se define como :
 $\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, provisto de la adición y multiplicación dados por:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

Los números complejos se representan también en forma binomial como $z = x + iy$, donde: $x + iy \equiv (x, y)$, $y \cdot i \equiv (0, 1)$.
Notar que $i^2 = -1$. Así, las operaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

Si $z = x + iy$ entonces:

$$x = \operatorname{Re}(z) = \text{parte real de } z$$

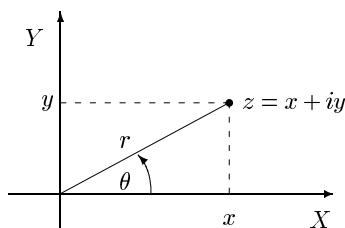
$$y = \operatorname{Im}(z) = \text{parte imaginaria de } z.$$

\mathbb{C} se representa geoméricamente por un plano, llamado el plano complejo. Si $z = x + iy$, entonces se llama módulo de z al número no-negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si z es no-nulo, al único número real θ , $-\pi < \theta \leq \pi$, que satisface las condiciones :

$$x = |z|\cos\theta, \quad y = |z|\operatorname{sen}\theta,$$

se le llama el **Argumento** (principal) de z , y se representa por $\theta = \operatorname{arg}(z)$. Notar que todo número complejo $z \neq 0$ puede escribirse en la **forma polar** :

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \text{ donde } r = |z| \text{ y } \theta = \operatorname{arg}(z).$$



Definición 5.1 1. Si $z = x + iy$, entonces se define: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

Notar que $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

2. Dado un número complejo z , definimos:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

5.1. Límite y Continuidad

1. Se llama **función compleja** a una función $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Ejemplo 5.1 a) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + 2z + 1$.

b) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

2. Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en un conjunto abierto D que contiene a z_0 , con la posible excepción de z_0 . Se dice que el número complejo L es el **límite** de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 , y escribimos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que :} \\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon \end{array} \right.$$

Ejemplo 5.2 $\lim_{z \rightarrow i} z^2 = i^2 = -1$.

3. Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, una función compleja, D abierto, y $z_0 \in D$. Se dice que f es **continua** en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Ejemplo 5.3 a) $f(z) = e^z$ es continua en z_0 , $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

b) Toda función polinomial $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$, es continua en z_0 , $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

5.2. Derivadas y Funciones Analíticas

Definición 5.2 Sea f una función compleja definida en un conjunto abierto D de \mathbb{C} , y supongamos que $z_0 \in D$. Se dice que f es **derivable** en z_0 si el

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existe en } \mathbb{C}.$$

En este caso, al límite anterior se le llama la **derivada** de f en z_0 y se le denota por $f'(z_0)$. Así,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Las siguientes proposiciones para funciones complejas son válidas:

1. f derivable en $z_0 \implies f$ continua en z_0 .
2. Si dos funciones complejas f y g son derivables en z_0 , entonces su suma, su diferencia y su producto también lo son, y se tiene que:

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f - g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

Si además, $g(z_0) \neq 0$, entonces la función $\frac{f}{g}$ es derivable en z_0 , y:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

3. Es válida la regla de la cadena, es decir, tenemos: $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$, siempre que el dominio de g contenga una vecindad de $f(z_0)$ y existan $f'(z_0)$ y $g'(f(z_0))$.

Ejemplo 5.4 1. Si $f(z) = z^3 - 2z$ entonces $f'(z) = 3z^2 - 2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

2. Si $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, entonces:

$$f'(z) = \frac{1 \cdot (1-z) - (1+z) \cdot (-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{1\}$$

3. Si $f(z) = \operatorname{sen} z$ entonces se puede probar que $f'(z) = \operatorname{cos} z$. Ahora, si $g(z) = \operatorname{sen}(z^2 + 2z)$, entonces por la regla de la cadena: $g'(z) = \operatorname{cos}(z^2 + 2z)(2z + 2)$

Si f es una función compleja, entonces sus valores pueden escribirse como: $f(z) = u(z) + iv(z)$ (es decir $f = u + iv$), donde u y v son funciones reales de una variable compleja (esto es, $u : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, y $v : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$).

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{si } z = x + iy$$

$$u = \text{parte real de } f$$

$$v = \text{parte imaginaria de } f$$

Ejemplo 5.5 1.- Si $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = (e^x \cos y) + i(e^x \operatorname{sen} y)$.

2.- Si $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + (-y^2) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.

Teorema 5.1 Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en un conjunto abierto D de \mathbb{C} , y escribamos $f = u + iv$. Si f es derivable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ de D , entonces u y v deben tener derivadas parciales finitas u_x, u_y, v_x, v_y , en (x_0, y_0) , y ellas están relacionadas con $f'(z_0)$ mediante las ecuaciones:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

y

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Esto implica, en particular, que deben verificarse en (x_0, y_0) las llamadas **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**, esto es, debe verificarse:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Observación 5.1 El Teorema anterior nos dice que una condición necesaria para que la función $f = u + iv$ tenga derivada en $z_0 = x_0 + iy_0$, es que las cuatro derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y existan en (x_0, y_0) y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann. El siguiente ejemplo nos mostrará que sin embargo, esta condición no es suficiente.

Ejemplo 5.6

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$v(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Satisfacen

$$\begin{aligned}u_x(0,0) &= v_y(0,0) = 1 \\u_y(0,0) &= -v_x(0,0) = -1\end{aligned}$$

Es decir, u y v satisfacen Cauchy-Riemann en $(0,0)$. Sin embargo, $f'(0)$ no existe, donde $f = u + iv$. En efecto :

$$\text{para } x = 0, \quad \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{-y + iy}{iy} = 1 + i$$

y

$$\text{para } x = y, \quad \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{xi}{x + ix} = \frac{1 + i}{2}$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son suficientes para establecer la existencia de la derivada de $f = u + iv$ en z_0 en el caso de que u y v tengan derivadas parciales continuas en una vecindad de z_0 . Más precisamente se tiene :

Teorema 5.2 Sean u y v dos funciones reales definidas en un conjunto abierto D de \mathbb{C} , y supongamos que las cuatro derivadas parciales u_x , u_y , v_x , v_y existan y sean continuas en D . Si en algún punto $z_0 = x_0 + iy_0$ de D se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),$$

entonces la función $f = u + iv$ es derivable en z_0 .

Definición 5.3 Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en un abierto D de \mathbb{C} . Se dice que f es **analítica** en D si f es derivable en todo punto de D .

Se tiene el siguiente importante criterio:

Teorema 5.3 Sean D un abierto de \mathbb{C} , y $f = u + iv$ una función compleja definida en D con u y v funciones reales. Entonces se cumple la siguiente equivalencia:

$$f \text{ es analítica en } D \iff \begin{cases} u \text{ y } v \text{ son de clase } C^1 \text{ en } D & \text{y} \\ \text{satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto de } D. \end{cases}$$

Ejemplo 5.7 1. Consideremos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$. Entonces al reemplazar z por $z = x + iy$, se obtiene :

$$f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

Es claro que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ y $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ son de clase \mathcal{C}^1 en \mathbb{C} . Además:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 6xy = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto $f(z) = z^3$ es analítica en \mathbb{C} .

2. Consideremos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$

$$f(x + iy) = x - iy = x + i(-y)$$

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

u y v son de clase \mathcal{C}^1 en \mathbb{C} , pero: $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$

Por lo tanto f no es analítica en \mathbb{C} .

Aún más, $\forall D$ abierto de \mathbb{C} , f no es analítica en D .

3. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x + iy) = x^2 + iy^3$

$u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = y^3$ son de clase \mathcal{C}^1 en \mathbb{C} .

Ahora:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{cases} \iff 2x = 3y^2.$$

Por lo tanto, f no es analítica en \mathbb{C} , y tal como en el ejemplo anterior, para todo D abierto de \mathbb{C} , f no es analítica en D . Sin embargo, obsérvese que f si es derivable en los puntos de la parábola $\{(x, y) : 2x = 3y^2\}$.

Observación 5.2 1. Un simple cálculo prueba que la función f definida mediante la ecuación $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, es analítica en todo \mathbb{C} y su derivada es $f'(z) = nz^{n-1}$. Cuando n es un entero negativo, la ecuación $f(z) = z^n$ define una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Las funciones polinomiales son analíticas en todo \mathbb{C} , y las funciones racionales (cuocientes de polinomios) son analíticas en todo el plano salvo en los puntos en los que el denominador se anula. La función exponencial definida por la fórmula $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ si $z = x + iy$, es analítica en todo \mathbb{C} y además coincide con su derivada. Las funciones complejas seno y coseno (siendo combinaciones lineales de exponenciales) son también analíticas en todo \mathbb{C} .

2. También se usa la expresión “ f es analítica en un punto z_0 ”. La definición es la siguiente:

Definición 5.4 Se dice que $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en el punto $z_0 \in D$ si existe una bola abierta con centro $z_0, B(z_0, r)$, tal que f es analítica en $B(z_0, r)$.

5.3. Integrales Complejas

Definición 5.5 Sea C una curva seccionalmente suave en \mathbb{C} descrita mediante una función compleja $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = x(t) + iy(t)$. Si f es una función compleja definida y continua en C , entonces la integral de contorno de f a lo largo de C , que se denota $\int_C f(z)dz$, está definida por:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt$$

Observación 5.3 Si $f = u + iv$ entonces la integral anterior queda más explícitamente como:

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt = \int_a^b f(x(t) + iy(t)) \cdot (x'(t) + iy'(t))dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) \cdot (x'(t) + iy'(t))dt = \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)]dt + \\ &\quad i \int_a^b [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)]dt \end{aligned}$$

Es decir que :

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx)$$

Ejemplo 5.8 Calcular: $\int_C \frac{2}{z} dz$ donde C es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 3, recorrida en sentido antihorario.

Solución :

$$C : z(t) = (3\cos t) + i(3\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$x(t) = 3\cos t, \quad y(t) = 3\sin t.$$

$$f(z) = \frac{2}{z} = \frac{2}{x + iy} = \frac{2(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + i \frac{-2y}{x^2 + y^2}$$

$$u(x(t), y(t)) = \frac{2}{3}\cos t, \quad v(x(t), y(t)) = -\frac{2}{3}\sin t,$$

$$x'(t) = -3\text{sent}, \quad y'(t) = 3\text{cost}.$$

Reemplazando en la fórmula dada en la **Observación 5.3** obtenemos que :

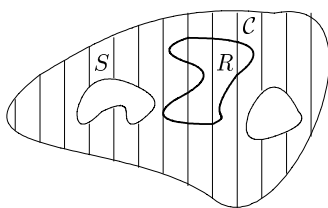
$$\int_C \frac{2}{z} dz = 0 + i \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi i.$$

5.4. Teorema de la Integral de Cauchy

El siguiente resultado es conocido como el **Teorema de la Integral de Cauchy**.

Teorema 5.4 Supongamos que $f = u + iv$ es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} . Sea C una curva de Jordan seccionalmente suave tal que tanto C como su región interior están contenidas íntegramente en S . En estas condiciones se cumple:

$$\int_C f(z) dz = 0$$



Demostración: Si escribimos:

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv) d(x + iy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx)$$

y aplicamos el **Teorema de Green** a cada integral real de línea, encontramos:

$$\int_C f(z) dz = \iint_R (-v_x - u_y) d(x, y) + i \iint_R (u_x - v_y) d(x, y)$$

donde $R = I(C) \cup C$, siendo $I(C)$ la región interior a C .

$R \subseteq S$ por hipótesis, y por ser f analítica en S se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en S y luego $-v_x - u_y = 0$ y $u_x - v_y = 0$ en R , de donde :

$$\int_C f(z) dz = 0 + i \cdot 0 = 0.$$



A modo de recíproco del Teorema de Cauchy, tenemos:

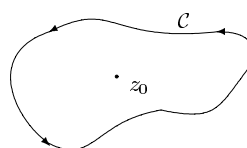
Teorema 5.5 Sea $f = u + iv$ continua en un abierto conexo S de \mathbb{C} y supongamos que u y v admitan derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y continuas en S . Si la integral de contorno $\int_C f(z) dz$ es igual a cero para toda curva poligonal cerrada C contenida en S , entonces f es analítica en S .

5.5. Fórmula de la Integral de Cauchy

El siguiente teorema es conocido como la Fórmula de la integral de Cauchy.

Teorema 5.6 Supongamos que f es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} . Sea C una curva de Jordan seccionalmente suave tal que C y su región interior $I(C)$ están contenidas en S . Entonces para todo punto $z_0 \in I(C)$, se cumple:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



con tal que la curva C esté orientada en sentido antihorario.

5.6. Valor medio de una función analítica sobre una circunferencia

Aplicamos la fórmula de la integral de Cauchy al caso en que C es una circunferencia con centro en z_0 descrito por:

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

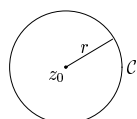
siendo $r =$ radio de la circunferencia C .

Suponiendo que f es analítica en un abierto conexo S que incluye a C y a su interior, tenemos:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt$$

Es decir:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

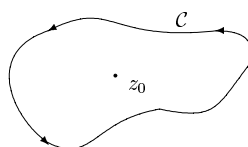


5.7. Fórmula de la Integral de Cauchy para la derivada de una función analítica

Teorema 5.7 *Supongamos que f es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} . Sea C una curva de Jordan seccionalmente suave tal que C y su región interior $I(C)$ están contenidos en S . Entonces, para todo punto $z_0 \in I(C)$, tenemos:*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

con tal que la curva C esté orientada en sentido antihorario.



5.8. Existencia de las derivadas superiores de una función analítica

Teorema 5.8 *Supongamos que f es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} . Sea C una curva de Jordan seccionalmente suave tal que C y su región interior $I(C)$ están contenidos en S . Entonces, para todo punto $z_0 \in I(C)$ y para todo entero $n \geq 1$, existe la derivada $f^{(n)}(z_0)$, y viene dada por la integral*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

con tal que la curva C esté orientada en sentido antihorario.

5.9. Series de potencias complejas

Una serie de la forma $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ se llama una serie de potencias de $(z - z_0)$. En ella z, z_0 y a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) son números complejos. A toda serie de potencias de este tipo se le asocia un círculo, llamado el círculo de convergencia de la misma, de manera que la serie converge para todo z interior a este círculo y diverge para todo z exterior al círculo. El centro del círculo es z_0 y su radio se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Un criterio para calcular dicho radio de convergencia es el siguiente :

Teorema 5.9 Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Si existe el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge si $|z - z_0| < R$, y diverge si $|z - z_0| > R$, donde $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Teorema 5.10 Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge para todo z en $B(z_0, r) \equiv \{z : |z - z_0| < r\}$. Entonces la función f definida por :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r)$$

tiene derivada $f'(z)$ para cada z en $B(z_0, r)$, dada por :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Observación 5.4 Como las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia, entonces mediante la aplicación reiterada del Teorema anterior, concluimos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe la derivada $f^{(k)}(z)$ para cada $z \in B(z_0, r)$, y viene dada por la serie :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}.$$

Si en la igualdad anterior hacemos $z = z_0$, obtenemos que :

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

De esta forma concluimos lo siguiente :

“Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge para todo z en $B(z_0, r)$, entonces la función f definida por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r)$$

tiene derivadas de todos los órdenes en la $B(z_0, r)$, y además se tiene la igualdad :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r)”$$

5.10. Desarrollo en serie de potencias para funciones analíticas

El **Teorema 5.10** nos dice que una serie de potencias convergente en un entorno $B(z_0, r)$ (= una bola abierta de centro z_0), define una función que es derivable en todo punto de dicho entorno. Una tal función es por consiguiente analítica en z_0 . Utilizando las fórmulas integrales dadas en las secciones 5.5 y 5.8, es posible demostrar el recíproco de este resultado, que damos a continuación.

Teorema 5.11 Supongamos que f es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} y sea z_0 un punto de S . Entonces, en todo entorno $B(z_0, r)$ tal que $B(z_0, r) \subseteq S$, puede representarse f mediante una serie de potencias convergente:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Observación 5.5 1. El desarrollo en serie anterior se conoce con el nombre de **Desarrollo de Taylor** de f alrededor de z_0 .

2. Los **Teoremas 5.10 y 5.11** reunidos nos dicen que una condición necesaria y suficiente para que una función compleja f sea analítica en un punto z_0 es que f sea representable por una serie de potencias en algún entorno de z_0 . Cuando existe una tal serie de potencias, su radio de convergencia es, por lo menos tan grande como el radio de cualquier entorno $B(z_0, r)$ que esté contenido en la región de analiticidad de f . Ya que el círculo de convergencia no puede contener en su interior ningún punto en el que f no sea analítica, se deduce que el radio de convergencia es exactamente igual a la distancia desde z_0 hasta el punto más próximo en el que f deja de ser analítica.
3. Con los resultados que hemos visto hasta el momento, podemos concluir que la analiticidad en un punto z_0 (que, por definición, sólo exige que la función posea primera derivada en un entorno de z_0), introduce una restricción muy severa a una función. Ella implica la **existencia de todas las derivadas de orden superior** en un entorno de z_0 , y también garantiza la existencia de una serie de potencias convergente que representa a la función en un entorno de z_0 . Esto marca una gran diferencia con el comportamiento de las funciones de variable real, entre las que es posible encontrar casos en que la primera derivada existe, y sin embargo la segunda derivada no existe.

Ejemplo 5.9 Los siguientes desarrollos en serie de potencias son válidos para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$1. \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$2. \quad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$3. \quad \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Utilizando los resultados anteriores, el lector debe demostrar la validez de los desarrollos de arriba.

5.11. Ceros de las funciones analíticas

Si f es analítica en z_0 y si $f(z_0) = 0$, el desarrollo de Taylor de f en torno a z_0 no tiene término constante y adopta por tanto la forma siguiente:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Esto es válido para cada z de algún entorno $B(z_0, r)$. Si f es idénticamente nula en este entorno (esto es, si $f(z) = 0$ para todo $z \in B(z_0, r)$) entonces cada $a_n = 0$, ya que $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. Si en cambio f no es idénticamente nula en ese entorno, existirá en el desarrollo un primer coeficiente a_k no nulo, en cuyo caso **el punto z_0 se llama un cero de orden k de f** . A continuación, demostraremos que existe un entorno de z_0 que no contiene ningún otro cero de f .

Teorema 5.12 *Supongamos que f es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} . Supongamos además que $f(z_0) = 0$ para algún punto z_0 de S y que f no es idénticamente nula en un entorno $B(z_0, r) \subseteq S$. Existe entonces un entorno $B(z_0, r') \subseteq B(z_0, r)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in B(z_0, r')$, $z \neq z_0$.*

Demostración: El desarrollo de Taylor en torno a z_0 se convierte en $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $k \geq 1$ y $g(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots$, y $g(z_0) = a_k \neq 0$.

Como g es continua en z_0 , existe un entorno $B(z_0, r') \subseteq S$ en el que g no se anula. Por consiguiente, $f(z) \neq 0$ para todo $z \in B(z_0, r')$, $z \neq z_0$.

Observación 5.6 1. *El resultado anterior nos dice que los ceros de una función analítica que no es idénticamente nula, son aislados.*

2. *El Teorema anterior tiene varias consecuencias importantes. Por ejemplo, podemos utilizarlo para demostrar que: “una función analítica en un abierto conexo S no puede ser nula en ningún subconjunto abierto no vacío de S sin ser idénticamente nula en toda la región S ”.*

5.12. Teorema de identidad para funciones analíticas

Teorema 5.13 *Supongamos que f es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} . Sea T un subconjunto de S que tenga un punto de acumulación $z_0 \in S$. Si $f(z) = 0 \ \forall z \in T$, entonces $f(z) = 0 \ \forall z \in S$.*

Observación 5.7 *Se dice que z_0 es un punto de acumulación de T si existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos distintos de T tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.*

Como corolario tenemos el siguiente resultado importante, citado algunas veces como el Teorema de identidad para funciones analíticas:

Teorema 5.14 *Sean f y g funciones analíticas en un abierto conexo S de \mathbb{C} . Si T es un subconjunto de S que tiene un punto de acumulación $z_0 \in S$ y si $f(z) = g(z) \ \forall z \in T$, entonces $f(z) = g(z) \ \forall z \in S$.*

Demostración: Basta aplicar el Teorema anterior a $(f - g)$.

Observación 5.8 *Otra forma equivalente de escribir el Teorema 5.14 es:*

“Si f y g son analíticas en un abierto conexo S y $\{z \in S : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en S , entonces $f(z) = g(z) \ \forall z \in S$ ”

5.13. Desarrollo de Laurent para funciones analíticas en un anillo

Definición 5.6 Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 < r_1 < r_2$, el conjunto

$$A(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

se llama un anillo en torno a z_0 .

Si una función es analítica en un anillo $A(z_0; r_1, r_2)$, pero no lo es en el entorno $B(z_0, r_2)$, no puede ser representada por una serie de potencias de $(z - z_0)$. LAURENT descubrió (en 1843) que una tal función puede representarse por medio de dos series, una de las cuales es una serie de potencias de $(z - z_0)$ y la otra es una serie de potencias de $(z - z_0)^{-1}$. El **Teorema de Laurent** es el siguiente:

Teorema 5.15 Supongamos que f es analítica en un anillo $A(z_0; r_1, r_2)$. En tal caso, para todo punto z en este anillo, tenemos:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \cdots (1),$$

donde

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad y \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

Los coeficientes vienen dados por las fórmulas:

$$(2) \cdots \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

siendo el camino C cualquier circunferencia orientada en sentido antihorario con centro z_0 y radio r , donde $r_1 < r < r_2$. La función f_1 (llamada parte regular de f en z_0) es analítica en el entorno $B(z_0, r_2)$. La función f_2 (que se llama la parte principal de f en z_0) es analítica en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r_1)$.

Observación 5.9 La suma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ se escribe también como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

y se llama **Desarrollo de Laurent de f en torno a z_0** . Así :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ analítica en el} \\ \text{anillo } A(z_0; r_1, r_2) \end{array} \right\} \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in A(z_0; r_1, r_2)$$

La fórmula (2) demuestra que una función puede tener a lo sumo un desarrollo de Laurent en un anillo dado.

5.14. Singularidades aisladas

Definición 5.7 Se dice que un punto z_0 es una **singularidad aislada** de f si:

1. f es analítica en un entorno reducido de z_0 (esto es, un círculo de centro z_0 sin su centro).
2. f no es analítica en z_0 .

Observación 5.10 i) En la definición anterior, no es necesario que f esté definida en z_0 .

ii) En virtud de 1., existe un anillo $A(z_0; r_1, r_2)$ en el que f es analítica y tiene un desarrollo (único) de Laurent, sea éste:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \cdots (*)$$

(Ya que el radio interior r_1 puede ser arbitrariamente pequeño, la fórmula $(*)$ es válida en el entorno reducido $B(z_0, r_2) \setminus \{z_0\}$). La singularidad z_0 se clasifica en uno de los tres tipos siguientes (dependiendo de la forma de la parte principal):

1. Si no aparecen potencias negativas en $(*)$, esto es, si $a_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces el punto z_0 se llama una **singularidad evitable**. En este caso, puede evitarse la singularidad definiendo f en z_0 como: $f(z_0) = a_0$.
2. Si $a_{-n} \neq 0$ para algún n pero $a_{-m} = 0 \quad \forall m > n$, entonces el punto z_0 se llama un **polo de orden n** . En este caso, la parte principal se reduce a una suma finita, a saber:

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Un polo de orden 1 se dice un **polo simple**.

3. Si $a_{-n} \neq 0$ para una infinidad de valores de n , entonces el punto z_0 se llama una **singularidad esencial**.

Ejemplo 5.10 Consideremos a $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$.

Esta función es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (es discontinua en 0, ya que $\frac{\operatorname{sen} z}{z} \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow 0$). El desarrollo de Laurent en torno a 0 tiene la forma:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

Como no aparecen potencias negativas de z , entonces el punto $z = 0$ es una singularidad evitable. Si definimos de nuevo f dándole el valor 1 en 0 (esto es, $f(0) = 1$), entonces la función así modificada se hace analítica en 0. Es decir:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & , \quad z \neq 0 \\ 1 & , \quad z = 0 \end{cases}$$

es analítica en 0.

Ejemplo 5.11 Consideremos a $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^5}$ si $z \neq 0$. El desarrollo de Laurent en torno a 0 es:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^5} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \cdot z^2 + \dots$$

En este caso, el punto $z = 0$ es un polo de orden 4. Obsérvese que no se ha dicho respecto al valor de f en 0.

Ejemplo 5.12 Consideremos a $f(z) = e^{1/z}$ si $z \neq 0$. El punto $z = 0$ es una singularidad esencial, ya que:

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots$$

Teorema 5.16 Supongamos que f es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} y definamos g mediante la ecuación: $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ si $f(z) \neq 0$. Entonces:

$$f \text{ tiene un cero de orden } k \text{ en } z_0 \in S. \iff g \text{ tiene un polo de orden } k \text{ en } z_0.$$

Demostración: Si f tiene un cero de orden k en z_0 , existe un entorno reducido $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ en el cual f no se anula. En el entorno $B(z_0, r)$ tenemos $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$, siendo $h(z) \neq 0$ si $z \in B(z_0, r)$. Luego, $1/h$ es analítica en $B(z_0, r)$ y tiene un desarrollo:

$$\frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots, \text{ donde } b_0 = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0$$

Por consiguiente, si $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^k \cdot h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot (b_0 + b_1(z - z_0) + \dots) \\ &= \frac{b_0}{(z - z_0)^k} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots, \quad b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

y, por tanto, z_0 es un polo de orden k para g . El recíproco se demuestra de la misma manera.

Observación 5.11 Notar que, en particular, este Teorema nos asegura que si $P(z)$ es un polinomio que tiene como ceros a z_1, \dots, z_r con multiplicidades m_1, \dots, m_r , entonces $g(z) = 1/P(z)$ tiene como polos a z_1, \dots, z_r con ordenes m_1, \dots, m_r .

5.15. Residuo de una función en un punto singular aislado

Si z_0 es un punto singular aislado de f (esto es, una singularidad aislada), existe un entorno reducido $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ en el cual f tiene un desarrollo de Laurent, sea éste:

$$(3) \cdots f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

El coeficiente a_{-1} que multiplica a $(z - z_0)^{-1}$ se llama el **residuo de f en z_0** y se representa con el símbolo:

$$\boxed{a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)}$$

La fórmula (2) nos dice que:

$$(4) \cdots 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$$

es decir:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$$

si \mathcal{C} es una circunferencia con centro en z_0 orientada en sentido antihorario, tal que $\mathcal{C} \subseteq B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Resulta relativamente fácil en muchos casos calcular el residuo en un punto sin emplear la integración. Por ejemplo, si z_0 es un **polo simple** de f , podemos usar la fórmula (3) para obtener:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Análogamente, si z_0 es un **polo de orden 2** de f , es fácil demostrar que:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = g'(z_0),$$

siendo g aquella función analítica en z_0 tal que $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$, para $z \neq z_0$.

Más generalmente, se tiene:

Supongamos que f tiene un polo de orden $m \geq 1$ en $z = z_0$, y sea g aquella función analítica en z_0 tal que $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, para $z \neq z_0$. Si $g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots$ es la expansión en serie de potencias de g alrededor de $z = z_0$, entonces para z cercano pero $\neq z_0$, se tiene que :

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k} (z - z_0)^k$$

Esta ecuación da la Expansión de Laurent de f en un entorno reducido $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Pero entonces:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

En particular, si $z = z_0$ es un polo simple, entonces $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

Todo esto puede ser resumido en el siguiente :

Teorema 5.17 *Supongamos que f tiene un polo de orden m en $z = z_0$ y sea g aquella función analítica en z_0 tal que $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, para $z \neq z_0$. Entonces:*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

En casos parecidos a éstos, en los que el residuo se puede calcular fácilmente, la igualdad (4) nos brinda un poderoso método para calcular integrales de contorno a lo largo de caminos cerrados.

CAUCHY fué el primero en comprobar que la teoría de los residuos tiene gran número de aplicaciones. Todas éstas están basadas en el Teorema del Residuo (Cauchy), que es una generalización de (4) al caso cuando el camino C incluye en su interior más de un punto singular aislado.

5.16. Teorema del Residuo (Cauchy)

Teorema 5.18 *Sea f una función analítica en todos los puntos de un abierto conexo S de \mathbb{C} , excepto en un número finito de puntos singulares aislados. Sea C una curva rectificable de Jordan tal que C y su región interior estén contenidas en S . Supongamos que C contiene un cierto número de singularidades de f en su interior, sean éstas z_1, \dots, z_n , pero que no existen singularidades sobre C .*

Tenemos entonces:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \cdots (5)$$

con tal que el camino C esté orientado en sentido antihorario.

Demostración:

Cuando solamente existe una singularidad z_1 dentro de C , la analiticidad de f nos permite reemplazar el contorno C por una circunferencia de centro z_1 , y la fórmula (5) se reduce a la (4).

El Teorema general puede demostrarse por inducción respecto al número n de singularidades.

Indicaremos el camino para deducir el caso $n = 2$ a partir del caso $n = 1$.

Supongamos que existen exactamente dos singularidades z_1 y z_2 dentro de C . En tal caso existe un entorno reducido $B(z_1, r) \setminus \{z_1\}$ contenido dentro de C en el que podemos escribir: $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ siendo f_1 la parte regular y f_2 la parte principal de f en z_1 . según el Teorema de Laurent, f_2 es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$, y por lo tanto, en particular, f_2 es analítica en $S \setminus \{z_1\}$. Sea ahora g la función definida en $S \setminus \{z_2\}$ como sigue:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) - f_2(z), & \text{si } z \in S, \quad z \neq z_1, \quad z \neq z_2 \\ f_1(z_1), & \text{si } z = z_1 \end{cases}$$

De este modo, g es analítica en $S \setminus \{z_2\}$.

A continuación, calcularemos la integral $\int_C g(z) dz$ de dos maneras. Ya que z_1 no está sobre C ,

podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_C g(z) dz &= \int_C (f(z) - f_2(z)) dz = \int_C f(z) dz - \int_C f_2(z) dz = \\ \text{i) } \dots &= \int_C f(z) dz - 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f_2(z) = \int_C f(z) dz - 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) \end{aligned}$$

Por otro parte, podemos reemplazar C por una circunferencia C_1 con centro en z_2 orientada en sentido antihorario, y contenida dentro de C , pero de tal manera que z_1 no sea interior a C_1 . Se tiene entonces:

$$\text{ii) } \dots \int_C g(z) dz = \int_{C_1} g(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_2} g(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z)$$

De **i)** y **ii)** concluimos:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Esto demuestra (5) para $n = 2$. El caso general se demuestra en forma parecida.

5.17. Diferencia entre el número de ceros y el número de polos en el interior de un contorno cerrado

Teorema 5.19 *Supongamos que f es analítica en un abierto conexo S de \mathbb{C} excepto, acaso, en un número finito de polos. Sea C una curva rectificable de Jordan tal que C y su región interior estén contenidas en S . Supongamos además que ninguno de los ceros o polos de f estén sobre C . Sean z_1, \dots, z_q los ceros de f que están dentro de C , y designemos por n_k el orden de z_k ($k = 1, 2, \dots, q$). Sean p_1, \dots, p_r los polos de f que están dentro de C y designemos por m_k el orden de p_k ($k = 1, 2, \dots, r$). Entonces se cumple que :*

$$(6) \dots \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^q n_k - \sum_{k=1}^r m_k$$

Observación 5.12 *El segundo miembro en (6) es la diferencia entre el número de ceros y el número de polos situados en el interior de C , con tal que cada cero y cada polo se cuente tantas veces como indique su orden.*

Demostración: Supongamos que en un entorno reducido de un punto z_0 tenemos $f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z)$, siendo g analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, y n un entero (positivo o negativo). Existe entonces un

entorno reducido de z_0 en el que podemos escribir:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

siendo el cociente g'/g analítico en z_0 . Esta igualdad nos dice que un cero de f de orden n (que para el caso es z_0) es un polo simple de f'/f con residuo n . Análogamente, un polo de f de orden n es un polo simple de f'/f con residuo $-n$. Este hecho, unido al Teorema del Residuo de Cauchy, da lugar a:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^q n_k - \sum_{k=1}^r m_k \right)$$

o lo que es equivalente :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^q n_k - \sum_{k=1}^r m_k$$

5.18. Cálculo de integrales reales mediante los residuos

Se dispone de varios métodos, que dependen de la forma particular de la integral a calcular. Vamos a describir brevemente dos de tales métodos:

El primer método se refiere a integrales de la forma: $\int_0^{2\pi} R(\text{sent}, \text{cost}) dt$, donde R es una función racional (= cociente de polinomios) de dos variables.

Teorema 5.20 Sea R una función racional de dos variables y consideremos:

$$f(z) = R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right)$$

siempre que la expresión del segundo miembro sea finita. Designemos por \mathcal{C} a la circunferencia unitaria con centro $(0,0)$. Entonces:

$$(7) \dots \dots \int_0^{2\pi} R(\text{sent}, \text{cost}) dt = \int_C \frac{f(z)}{iz} dz,$$

con tal que f no tenga polos sobre \mathcal{C} .

Demostración: Una función z que describa \mathcal{C} viene dada por $z(t) = e^{it}$, si $0 \leq t \leq 2\pi$. Para esta función tenemos:

$$z'(t) = iz(t), \quad \frac{z(t)^2 - 1}{2iz(t)} = \text{sent}, \quad \frac{z(t)^2 + 1}{2z(t)} = \text{cost},$$

y luego:

$$\int_C \frac{f(z)}{iz} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z(t)) \cdot z'(t)}{iz(t)} dt = \int_0^{2\pi} R(\text{sent}, \text{cost}) dt$$

■

Observación 5.13 Para calcular la integral del segundo miembro de (7) necesitamos tan sólo calcular los residuos del integrando en aquellos polos que son interiores a C .

Ejemplo 5.13 Calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$.

Solución :

Aplicando (7), encontramos:

$$I = -2i \int_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

El integrando tiene polos simples en las raíces de la ecuación $z^2 + 2az + 1 = 0$. Estos son los puntos:

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

Los correspondientes residuos R_1 y R_2 son:

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{z_1 - z_2},$$

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{z_2 - z_1}$$

Si $a > 1$, entonces z_1 es interior a C y z_2 exterior a C . Por lo tanto:

$$I = -2i \left(2\pi i \frac{1}{z_1 - z_2} \right) = \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Si $a < -1$, entonces z_2 es interior a C y z_1 exterior a C . Luego:

$$I = -2i \left(2\pi i \frac{1}{z_2 - z_1} \right) = \frac{4\pi}{-2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{-2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Ejemplo 5.14 Calcular la siguiente integral mediante los residuos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t \, dt}{1 - 2a \cos t + a^2}, \quad \text{si } a^2 < 1.$$

Solución: Aplicando la fórmula (7) que dice:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \cos t) \, dt = \int_C \frac{f(z)}{iz} \, dz, \quad \text{siendo } f(z) = R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right), \text{ encontramos:}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t \, dt}{1 - 2a \cos t + a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1 - 2a \cos t + a^2} \, dt = \int_C \frac{f(z)}{iz} \, dz$$

$$\frac{-1}{2i} \int_C \frac{(z^4 + 1) \, dz}{z^2 (az^2 - (1 + a^2)z + a)} = \frac{-1}{2i} \int_C \frac{(z^4 + 1) \, dz}{az^2 (z - a) \left(z - \frac{1}{a}\right)}$$

Como $a^2 < 1$ entonces $-1 < a < 1$ y $\frac{1}{a} > 1$, o $\frac{1}{a} < -1$.

Luego, los polos del integrando que son interiores a C son 0 (polo de orden 2) y a (polo simple). Así, del Teorema del Residuo tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2i} \int_C \frac{(z^4 + 1) dz}{az^2(z-a)(z-\frac{1}{a})} &= \frac{-1}{2i} \left\{ 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{f(z)}{iz} + \operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{iz} \right) \right\} \\ &= -\pi \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{(z^4 + 1)}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})} \right) \Big|_{z=0} + \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z^4 + 1)}{az^2(z-\frac{1}{a})} \right\} = \frac{2\pi a^2}{1-a^2} \end{aligned}$$

Muchas integrales impropias pueden tratarse por medio del Teorema siguiente:

Teorema 5.21 Designemos por $T = \{x + iy / y \geq 0\}$ al semiplano superior. Sea S un abierto conexo en \mathbb{C} que contiene a T y supongamos que f es analítica en S , excepto a lo más, en un número finito de **polos**. Supongamos además que ninguno de estos polos está sobre el eje real. Si :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(\operatorname{Re}^{i\theta}) \operatorname{Re}^{i\theta} d\theta = 0,$$

entonces el **valor principal de Cauchy** de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existe y es igual a:

$$2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

donde z_1, \dots, z_n son los polos de f contenidos en T .

Observación 5.14 El valor principal de Cauchy de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ es definido como:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx.$$

Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge entonces su valor es igual a su valor principal de Cauchy; sin embargo

puede suceder que el valor principal de Cauchy $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx$ converja y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ diverja.

Demostración(del Teorema): Sea C el camino orientado en sentido antihorario formado tomando la porción del eje real desde $-R$ a R y la semicircunferencia en T que tenga a $[-R, R]$ como diámetro, habiendo tomado R lo bastante grande para que incluya todos los polos z_1, \dots, z_n .

Entonces, por el Teorema del Residuo :

$$2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \int_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^\pi f(\operatorname{Re}^{i\theta}) i \operatorname{Re}^{i\theta} d\theta$$

Por lo tanto:

$$2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \int_{-R}^R f(x) dx + i \int_0^\pi f(\operatorname{Re}^{i\theta}) \operatorname{Re}^{i\theta} d\theta.$$

Aplicando $\lim_{R \rightarrow +\infty}$ obtenemos:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)$$

■

Observación 5.15 La igualdad $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(\operatorname{Re}^{i\theta}) \operatorname{Re}^{i\theta} d\theta = 0$ se satisface automáticamente si f es el cociente de dos polinomios, por ejemplo $f = P/Q$, con tal que el grado de Q exceda al grado de P por lo menos en 2 unidades.

Ejemplo 5.15 Para calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^4)}$ consideremos $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Claramente f es analítica en todo \mathbb{C} excepto en 4 polos que son las raíces de la ecuación $1+z^4=0$. Estas son: $z = z_k = e^{i(2k-1)\frac{\pi}{4}}$, $k = 1, 2, 3, 4$. (Ninguno de estos polos está sobre el eje real).

De éstos, tan sólo z_1 y z_2 están en el semiplano superior. Por otro lado: $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(\operatorname{Re}^{i\theta}) \operatorname{Re}^{i\theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\operatorname{Re}^{i\theta} d\theta}{1 + (\operatorname{Re}^{i\theta})^4} = 0$, ya que f es el cociente de dos polinomios $\frac{P}{Q}$ donde grado (Q) excede el grado (P) en 4 unidades.

El residuo en z_1 es:

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)}{1 + z^4} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{4i}$$

El residuo en z_2 es:

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z - z_2)}{1 + z^4} = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4i}$$

Por lo tanto: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{4i} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4i} \right) = \frac{\pi}{2} \left(2 \cos \frac{\pi}{4} \right) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejemplo 5.16 Calcular la siguiente integral mediante los residuos :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

Solución:

Consideremos la función $f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$. Claramente f es analítica en todo \mathbb{C} excepto en 2 polos simples que son las raíces de $z^2 + z + 1 = 0$.

$$\text{Pero } z^2 + z + 1 = 0 \iff z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\iff z = \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Ninguno de estos polos está sobre el eje real. De éstos sólo z_1 está en el semiplano superior $T = \{x + iy/y \geq 0\}$.

Por otro lado, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(\text{Re}^{i\theta}) \text{Re}^{i\theta} d\theta = 0$ ya que f es el cociente de dos polinomios donde el grado del denominador excede al grado del numerador en 2 unidades. Luego, por el **Teorema 5.21** se tiene que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = (2\pi i) \cdot \text{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = 2\pi i \left\{ \frac{1}{z_1 - z_2} \right\} = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

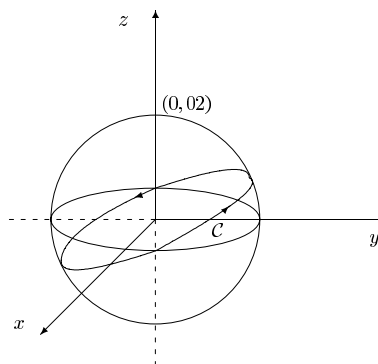
$$\text{Por lo tanto: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \quad \blacksquare$$

Capítulo 6

Ejercicios Resueltos

1. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $z = y \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$, en donde $0 < \alpha < \pi/2$. El camino es recorrido de modo que, observando el plano xy desde el eje z positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj.

Solución :



Sea \mathcal{C} la curva intersección. Se tiene que :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \mathcal{C} &\implies x^2 + y^2 + (y \cdot \operatorname{tg}\alpha)^2 = 4 \implies x^2 + (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)y^2 = 4 \\ &\implies x^2 + \operatorname{sec}^2\alpha \cdot y^2 = 4 \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4\cos^2\alpha} = 1\end{aligned}$$

Luego, una parametrización para \mathcal{C} es :

$$\vec{\alpha}(t) : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = (2\cos\alpha)\operatorname{sent} \\ z(t) = y \cdot \operatorname{tg}\alpha = (2\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sent} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos\alpha \operatorname{sent} - 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sent}, 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sent} - 2\operatorname{cost}, 2\operatorname{cost} - 2\cos\alpha \operatorname{sent}) \\ &\quad \cdot (-2\operatorname{sent}, 2\cos\alpha \operatorname{cost}, 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{cost}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\cos\alpha + 4\operatorname{sen}\alpha) dt = 8\pi(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha) \end{aligned}$$

■

2. Calcular:

$$\int_C 3x^2y^2z \, dx + 2x^3yz \, dy + x^3y^2 \, dz$$

donde C es el segmento de recta que va desde $(1, -1, 1)$ hasta $(2, 0, 1)$, **sin parametrizar la curva C** .

Solución :

$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ es de clase C^1 en \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^3 es simplemente conexo, y además:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = 6x^2yz = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z), \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = 3x^2y^2 = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = 2x^3y = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Por lo tanto, \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 , es decir existe un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Para encontrar un potencial f de \vec{F} procedemos como sigue:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2y^2z \dots (i) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x^3yz \dots (ii) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^3y^2 \dots (iii) \end{cases}$$

Integrando ambos lados de (i) con respecto a x , obtenemos: $f(x, y, z) = x^3y^2z + g(y, z)$.

Tomando derivadas parciales con respecto a y , y comparando con (ii), encontramos que:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = 0,$$

de donde

$$g(y, z) = h(z).$$

Por lo tanto,

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z + h(z).$$

Ahora tomando derivadas parciales con respecto a z y comparando con (iii), obtenemos $h'(z) = 0$, de donde $h(z) = c$ (constante). Por lo tanto

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z + c$$

nos entrega la familia de potenciales del campo vectorial \vec{F} .

Finalmente tenemos que :

$$\int_C 3x^2 y^2 z \, dx + 2x^3 y z \, dy + x^3 y^2 \, dz = f(2, 0, 1) - f(1, -1, 1) = -1.$$

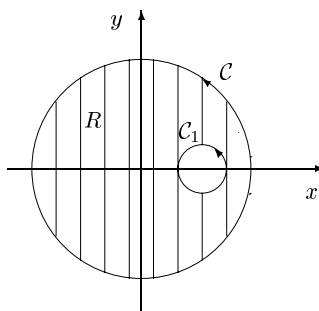
■

3. Utilizando el Teorema de Green, calcular :

$$\int_C \left[\frac{(x-1)^2 + y^2 + y}{(x-1)^2 + y^2} \right] dx + \left[\frac{2(x-1)^2 + 2y^2 - (x-1)}{(x-1)^2 + y^2} \right] dy$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, recorrida en sentido antihorario.

Solución :



$$P(x, y) = 1 + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = 2 - \frac{(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(1, 0)\}$$

Si C_1 es la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$ pequeño) y R es la región que es interior a C y exterior a C_1 , entonces el Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas nos dice que:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_C (Pdx + Qdy) - \oint_{C_1} (Pdx + Qdy),$$

de donde

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \oint_{C_1} (Pdx + Qdy)$$

$$C_1 : \vec{\alpha}_1(t) = (1 + acost, asent), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (Pdx + Qdy) &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\alpha}_1(t)) \cdot \vec{\alpha}'_1(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{asent}{a^2}, 2 - \frac{acost}{a^2} \right) \cdot (-asent, acost) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-asent - sen^2t + 2acost - cos^2t) dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi \end{aligned}$$

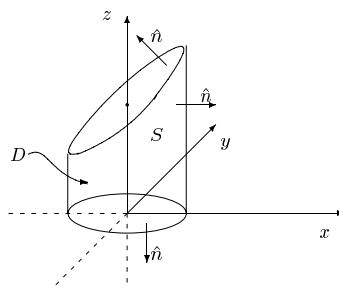
■

4. Sean $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + ye^z, y^2 + ze^x, z^2 + xe^y)$, y S la frontera de la región sólida que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y entre los planos $z = 0$ y $z = x + 2$. **Utilizando el Teorema de la divergencia**, calcular:

$$\iiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

donde \hat{n} es la orientación de S dirigida hacia afuera.

Solución :



Sea D la región sólida acotada por S . Por el Teorema de la divergencia tenemos que:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) \, d(x, y, z)$$

Pero $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 2x + 2y + 2z$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= 2 \cdot \iiint_D (x + y + z) \, d(x, y, z) \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r \cos \theta + 2} (r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta + z) \, r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{19\pi}{4} \end{aligned}$$

■

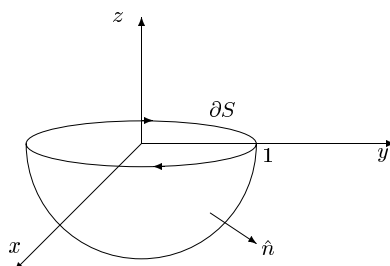
5. Utilizando el Teorema de Stokes, calcule:

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

donde $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, x^3, \cos(xz))$, S es la parte del elipsoide $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ que queda por debajo del plano xy , y \hat{n} está dirigida hacia afuera del elipsoide.

(Indicación: $\int \cos^4 t \, dt = \frac{3t}{8} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4t)}{32} + c$)

Solución :



El Teorema de Stokes nos dice que :

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x},$$

donde ∂S es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 contenida en el plano xy y recorrida en sentido horario, parametrizada por:

$$\vec{\alpha}(t) : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = -\sin t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Se tiene que:

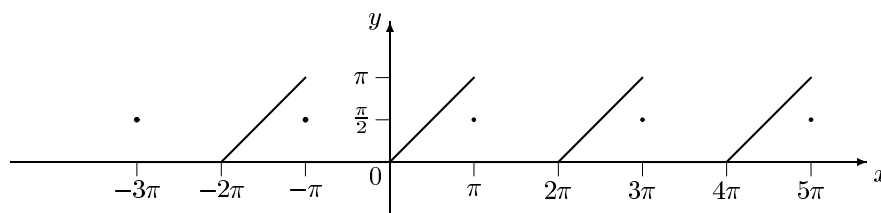
$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} (0, \cos^3 t, \cos(0)) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos^4 t) \, dt = - \left[\frac{3t}{8} + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\sin(4t)}{32} \Big|_0^{2\pi} \right] = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

■

6. Trazar la gráfica de la serie de Fourier de la función :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Solución :



■

7. Resolver el problema :

$$\begin{cases} u_{xx} = 16 \cdot u_t, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \dots\dots(1) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \geq 0 \dots\dots\dots(2) \\ u(x, 0) = 4 + 5 \cos(3\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \dots(3) \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables. **Detallar cada paso del procedimiento.**

Solución :

Suponemos que $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Reemplazando en (1) se tiene :
 $X''(x) \cdot T(t) = 16X(x) \cdot T'(t)$, de donde dividiendo por $X(x) \cdot T(t)$ se obtiene:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{16 \cdot T'(t)}{T(t)} = k, \quad \text{siendo } k \text{ una constante.}$$

De donde : $X''(x) - kX(x) = 0$ y $T'(t) - \frac{k}{16}T(t) = 0$.

De (2) tenemos que : $u_x(0, t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, de donde $X'(0) = 0$.

También : $u_x(1, t) = X'(1) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, de donde $X'(1) = 0$.

Pasamos a resolver:

$$(4) \dots \begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

$k > 0 \implies$ la única solución de (4) es $X(x) = 0$.

$k = 0 \implies$ la solución general de $X''(x) - kX(x) = 0$ es $X(x) = A_0 + A_1x$. Pero :
 $X'(0) = X'(1) = 0 \implies A_1 = 0$.

Luego, $X(x) = A_0$ (constante $\neq 0$) es solución de (4).

$k < 0 \implies$ la solución general de $X''(x) - kX(x) = 0$ es:

$$\begin{aligned} X(x) &= A\cos(\sqrt{-k}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{-k}x) \\ X'(x) &= -A\sqrt{-k}\operatorname{sen}(\sqrt{-k}x) + B\sqrt{-k}\cos(\sqrt{-k}x) \end{aligned}$$

$$X'(0) = 0 \implies B = 0$$

$X'(1) = 0 \implies -A\sqrt{-k}\operatorname{sen}(\sqrt{-k}) = 0 \implies \operatorname{sen}(\sqrt{-k}) = 0 \implies \sqrt{-k} = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$. Así, se han obtenido las siguientes soluciones no-triviales (no-nulas) de (4) :

$$X_n(x) = A_n\cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ahora, consideramos la ecuación diferencial $T'(t) - \frac{k}{16}T(t) = 0$ para los valores $k = -(n\pi)^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) que acaban de obtenerse. Es decir se consideran :

$$T'(t) + \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 T(t) = 0$$

cuya solución general es :

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, las funciones :

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = A_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t} \cos(n\pi x), \quad \text{esto es,}$$

$$u_n(x, t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t} \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

son soluciones de (1) y (2), siendo α_n una constante arbitraria.

Al observar la condición (3), postulamos como solución a :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_3(x, t).$$

(3) $\implies u(x, 0) = \alpha_0 + \alpha_3 \cos(3\pi x) = 4 + 5\cos(3\pi x), \quad \forall x \in [0, 1]$, de donde :

$$\alpha_0 = 4, \quad \alpha_3 = 5.$$

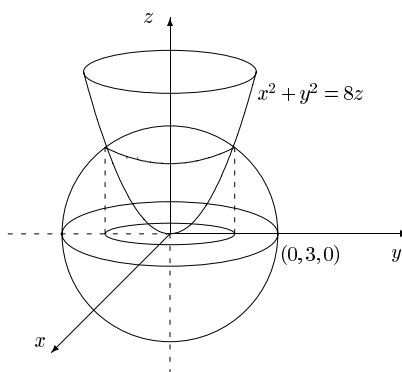
Por lo tanto, la solución buscada es :

$$u(x, t) = 4 + 5e^{-\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 t} \cos(3\pi x) = 4 + 5e^{-\frac{9\pi^2}{16}t} \cos(3\pi x).$$

■

8. Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está dentro del paraboloido $x^2 + y^2 = 8z$.

Solución :



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \implies 8z + z^2 = 9 \implies z = -9 \quad \vee \quad z = 1.$$

$$z = 1 \implies x^2 + y^2 = 8$$

Por lo tanto, la superficie en cuestión puede ser expresada explícitamente como:

$$S : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

Por lo tanto :

$$\begin{aligned} \text{Area de } S &= \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} d(x, y) \\ &= \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right)^2} d(x, y) = \iint_T \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{3r}{\sqrt{9 - r^2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-3\sqrt{9 - r^2}\Big|_0^{\sqrt{8}}\right] d\theta = 12\pi. \end{aligned}$$

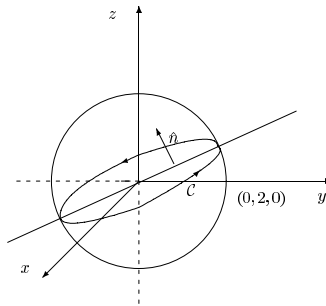
■

9. Sea C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $z = \sqrt{3}y$, recorrida de tal modo que observando el plano xy desde el eje z positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj. **Utilizando el Teorema de Stokes**, calcule:

$$\int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz.$$

(**Indicación:** El área de la región encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab).

Solución :



Podemos tomar como S a la parte del plano $z = \sqrt{3}y$ acotada por C , orientada con la normal \hat{n} dirigida hacia arriba.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = \sqrt{3}y \end{cases} \implies x^2 + y^2 + 3y^2 = 4 \implies x^2 + 4y^2 = 4$$

$$\implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad (= \text{Proyección de } C \text{ sobre el plano } xy).$$

$$S : \vec{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{3}y), \quad (x, y) \in R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1 \right\}.$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, -\sqrt{3}, 1) \quad \text{que nos dá la orientación requerida.}$$

El Teorema de Stokes nos dice entonces que :

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

Pero :

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = (-2, -2, -2).$$

Por lo tanto :

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \iint_R (\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) d(x, y) \\ &= \iint_R (-2, -2, -2) \cdot (0, -\sqrt{3}, 1) d(x, y) = \iint_R (2\sqrt{3} - 2) d(x, y) \\ &= (2\sqrt{3} - 2) \cdot \iint_R 1 d(x, y) = 2(\sqrt{3} - 1) \cdot \operatorname{Area}(R) = 4\pi(\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

■

10. Aplicando el método de separación de variables, resolver el problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = 25 \cdot u_t, & 0 < x < 3, \quad t > 0 \dots\dots (1) \\ u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0, & t \geq 0 \dots\dots\dots (2) \\ u(x, 0) = 4 + 7 \cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right), & 0 \leq x \leq 3 \dots (3) \end{cases}$$

Detallar cada paso del procedimiento

Solución :

Suponemos que $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Reemplazando en (1) se obtiene :
 $X''(x) \cdot T(t) = 25X(x) \cdot T'(t)$, de donde dividiendo por $X(x) \cdot T(t)$ se concluye que :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{25 \cdot T'(t)}{T(t)} \quad \text{siempre que} \quad X(x) \cdot T(t) \neq 0.$$

Por lo tanto :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{25 \cdot T'(t)}{T(t)} = k, \quad \text{siendo } k \text{ una constante.}$$

De donde : $X''(x) - kX(x) = 0$ y $T'(t) - \frac{k}{25}T(t) = 0$.

De (2) tenemos que : $u_x(0, t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, de donde $X'(0) = 0$.

También : $u_x(3, t) = X'(3) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, de donde $X'(3) = 0$.

A continuación debemos resolver:

$$(4) \cdots \begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 \\ X'(0) = X'(3) = 0 \end{cases}$$

$k > 0 \implies$ la única solución de (4) es $X(x) = 0$.

$k = 0 \implies$ la solución general de $X''(x) - kX(x) = 0$ es $X(x) = A_0 + A_1x$. Pero :
 $X'(0) = X'(3) = 0 \implies A_1 = 0$.

Luego, $X(x) = A_0$ (constante $\neq 0$) es solución de (4).

$k < 0 \implies$ la solución general de $X''(x) - kX(x) = 0$ es:

$$\begin{aligned} X(x) &= A\cos(\sqrt{-k}x) + B\sen(\sqrt{-k}x) \\ X'(x) &= -A\sqrt{-k}\sen(\sqrt{-k}x) + B\sqrt{-k}\cos(\sqrt{-k}x) \end{aligned}$$

$$X'(0) = 0 \implies B = 0$$

$X'(3) = 0 \implies -A\sqrt{-k}\sen(3\sqrt{-k}) = 0 \implies \sen(3\sqrt{-k}) = 0 \implies \sqrt{-k} = \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}$. Así, se han obtenido las siguientes soluciones no-triviales (no-nulas) de (4) :

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ahora, consideramos la ecuación diferencial $T'(t) - \frac{k}{25}T(t) = 0$ para los valores $k = -\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) que acaban de obtenerse. Es decir se consideran :

$$T'(t) + \left(\frac{n\pi}{15}\right)^2 T(t) = 0$$

cuya solución general es :

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{15}\right)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, las funciones :

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = A_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{15}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right), \quad \text{esto es,}$$

$$u_n(x, t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{n\pi}{15}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

son soluciones de (1) y (2), siendo α_n una constante arbitraria.

Al observar la condición (3), postulamos como solución a :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_5(x, t).$$

(3) $\implies u(x,0) = \alpha_0 + \alpha_5 \cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right) = 4 + 7\cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right), \quad \forall x \in [0,3],$ de donde :

$$\alpha_0 = 4, \quad \alpha_5 = 7.$$

Por lo tanto, la solución buscada es :

$$u(x,t) = 4 + 7e^{-\frac{\pi^2}{9}t} \cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right).$$

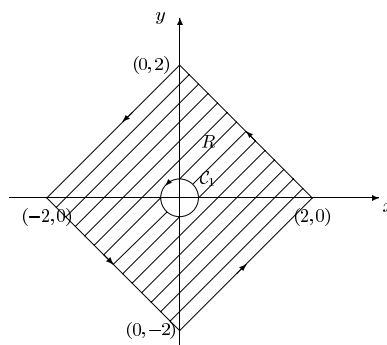
■

11. Utilizando el Teorema de Green, calcular:

$$\int_{\mathcal{C}} \left[\frac{x - yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} \right] dx + \left[\frac{y + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} \right] dy$$

donde \mathcal{C} es la frontera del cuadrado de vértices $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, y $(0,-2)$, recorrida en sentido antihorario.

Solución :



$$P(x,y) = \frac{x - yx^2 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{y + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Sea C_1 la circunferencia : $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ pequeño, recorrida en sentido antihorario. C_1 puede ser parametrizada por:

$$C_1 : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Si R es la región interior a C y exterior a C_1 , entonces Green nos dice que:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_C (Pdx + Qdy) - \oint_{C_1} (Pdx + Qdy)$$

De donde : $\oint_C (Pdx + Qdy) = 2 \cdot \text{Area}(R) + \oint_{C_1} (Pdx + Qdy)$

Pero:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} (Pdx + Qdy) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a \cos t - a^3 \sin t}{a^2}, \frac{a \sin t + a^3 \cos t}{a^2} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 dt = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = 2 \cdot (8 - \pi a^2) + 2\pi a^2 = 16.$$

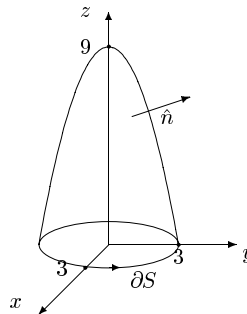
■

12. Utilizando el Teorema de Stokes, calcular:

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

donde $\vec{F}(x, y, z) = (xz, y^2 + 2x, x)$, S es la parte del paraboloido $z = 9 - x^2 - y^2$ que queda por encima del plano xy , y \hat{n} está dirigida hacia arriba.

Solución :



El Teorema de Stokes nos dice que:

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x},$$

donde ∂S es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 3 parametrizada por:

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} (0, 9 \sin^2 t + 6 \cos t, 3 \cos t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (27 \sin^2 t \cos t + 18 \cos^2 t) \, dt = 9 \sin^3 t + 18 \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 18\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = 18\pi.$$

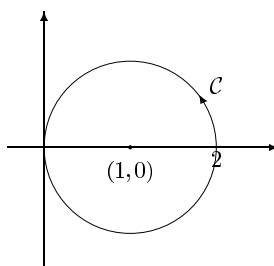
■

13. Calcular la integral :

$$\int_C \frac{3}{z-1} \, dz$$

donde C es la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1, recorrida en sentido antihorario.

Solución :



$$\mathcal{C} : z(t) = (1 + \cos t) + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$x(t) = 1 + \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{z-1} = \frac{3}{(x+iy)-1} = \frac{3}{(x-1)+iy} = \frac{3((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \\ &= \frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2} + i \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y). \end{aligned}$$

Luego se tiene por definición que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{3}{z-1} dz &= \int_0^{2\pi} [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + \\ &+ i \int_0^{2\pi} [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [3 \cos t (-\sin t) - (-3 \sin t) \cos t] dt + i \int_0^{2\pi} [3 \cos t (\cos t) + (-3 \sin t) (-\sin t)] dt \\ &= i \int_0^{2\pi} 3 dt = 6\pi i. \end{aligned}$$

(Otra forma más inmediata de calcular la integral es aplicando la Fórmula de la integral de Cauchy).

■

14. Calcular la integral definida:

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2} dx$$

donde α designa un número real positivo.

Solución:

Sea $f(z) = \frac{1}{(z^4+1)(z^2+\alpha^2)^2}$. f es analítica en todo \mathbb{C} excepto en 6 polos, ninguno de los cuales está en la recta real.

f tiene en el semiplano superior los polos simples :

$$z_1 = \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad z_2 = \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

y el polo doble: $z_3 = i\alpha$.

Además, como f es el cociente de dos polinomios donde el grado del denominador excede al grado del numerador en 8 unidades, entonces :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(\operatorname{Re}^{i\theta}) \operatorname{Re}^{i\theta} d\theta = 0.$$

Entonces el **Teorema 5.21** nos dice que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_3} f(z) \right)$$

$$\text{Ahora : } f(z) = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z + z_1)(z + z_2) \cdot (z^2 + \alpha^2)^2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{(z - z_2)(z + z_1)(z + z_2)(z^2 + \alpha^2)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(z_1 - z_2)(2z_1)(z_1 + z_2)(z_1^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{2z_1(z_1^2 - z_2^2) \cdot (z_1^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)(2i)(i + \alpha^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4i(1+i)(i + \alpha^2)^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) = \frac{1}{(z_2 - z_1)(z_2 + z_1)(2z_2)(z_2^2 + \alpha^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(z_2^2 - z_1^2)(2z_2)(z_2^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{(-2i)(\sqrt{2})(-1+i)(-i + \alpha^2)^2} = \frac{-\sqrt{2}}{4i(-1+i)(-i + \alpha^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto : } \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) &= \frac{\sqrt{2}}{4i(1+i)(i + \alpha^2)^2} + \frac{-\sqrt{2}}{4i(-1+i)(-i + \alpha^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(i-1)(-i + \alpha^2)^2 - \sqrt{2}(i+1)(i + \alpha^2)^2}{4i(i+1)(i-1)(i + \alpha^2)^2(-i + \alpha^2)^2} = \frac{\sqrt{2}(\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1)}{4i(\alpha^4 + 1)^2} \end{aligned}$$

Como $z_3 = i\alpha$ es polo doble entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_3} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{d}{dz} \left[(z - z_3)^2 f(z) \right] = \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z^4 + 1)(z + i\alpha)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i\alpha} \frac{-4z^3(z + i\alpha)^2 - 2(z^4 + 1)(z + i\alpha)}{\left((z^4 + 1)(z + i\alpha)^2 \right)^2} = \frac{-4i\alpha(5\alpha^4 + 1)}{(4\alpha^2(\alpha^4 + 1))^2} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} f(z) &= \frac{\sqrt{2}(\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1)}{4i(\alpha^4 + 1)^2} + \frac{-i\alpha(5\alpha^4 + 1)}{4\alpha^4(\alpha^4 + 1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^4\sqrt{2}(\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1) + \alpha(5\alpha^4 + 1)}{4i\alpha^4(\alpha^4 + 1)^2} = \frac{5\alpha^4 + 1 + \alpha^3\sqrt{2}(\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1)}{4i\alpha^3(\alpha^4 + 1)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4 + 1)(x^2 + \alpha^2)} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res} f(z) = \pi \frac{5\alpha^4 + 1 + \alpha^3\sqrt{2}(\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1)}{2\alpha^3(\alpha^4 + 1)^2}$$

■

15. Calcular :

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx$$

Solución : Para calcularla consideraremos la $\int_{\mathcal{C}} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1} dz$ donde \mathcal{C} es la curva que consiste de la porción del eje real desde $-R$ a R y la semicircunferencia superior Γ que tiene a $[-R, R]$ como diámetro, con $R > 1$.

El único polo de $\frac{\ln(z+i)}{(z^2+1)}$ dentro de \mathcal{C} es el polo simple $z = i$, y su residuo es:

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{\ln(z+i)}{(z+i)} = \frac{\ln(2i)}{2i}$$

Luego, por el **Teorema del Residuo** tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{\ln(z+i)}{(z^2+1)} dz &= 2\pi i \left(\frac{\ln(2i)}{2i} \right) = \pi \ln(2i) = \\ &= \pi \left(\ln |2i| + i\frac{\pi}{2} \right) = \pi \ln 2 + \frac{i\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Este resultado se puede escribir como:

$$\int_{-R}^R \frac{\ln(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{(z^2+1)} dz = \pi \ln 2 + \frac{i\pi^2}{2}$$

6

$$\int_{-R}^0 \frac{\ln(x+i)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\ln(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln 2 + \frac{i\pi^2}{2}$$

Reemplazando x por $-x$ en la primera integral, esto se puede escribir:

$$\int_0^R \frac{\ln(i-x)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\ln(i+x)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln 2 + \frac{i\pi^2}{2}$$

Pero, $\ln(i-x) + \ln(i+x) = \ln(i^2 - x^2) = \ln(x^2 + 1) + i\pi$.

Por lo tanto,

$$\int_0^R \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx + i \int_0^R \frac{\pi}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln 2 + \frac{i\pi^2}{2} \dots (*)$$

Ahora, observemos que:

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{\ln(\operatorname{Re}^{i\theta} + i) i \operatorname{Re}^{i\theta}}{R^2 e^{i2\theta} + 1} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{|\ln(\operatorname{Re}^{i\theta} + i)| R}{R^2 - 1} d\theta.$$

Pero, para todo $\theta \in [0, \pi]$:

$$\left| \ln(\operatorname{Re}^{i\theta} + i) \right|^2 = |\ln(R \cos \theta + i(R \operatorname{sen} \theta + 1))|^2 =$$

$$= \left| \ln \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + (R \operatorname{sen} \theta + 1)^2} + i \arg(\operatorname{Re}^{i\theta} + i) \right|^2 \leq \left(\frac{1}{2} \ln(R^2 + 1 + 2R \operatorname{sen} \theta) \right)^2 + \pi^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \left(\ln((R+1)^2) \right)^2 + \pi^2 = (\ln(R+1))^2 + \pi^2$$

Por lo tanto :

$$\left| \ln(\operatorname{Re}^{i\theta} + i) \right| \leq \sqrt{(\ln(R+1))^2 + \pi^2} \leq \ln(R+1) + \pi$$

De donde :

$$\frac{|\ln(\operatorname{Re}^{i\theta} + i)| R}{R^2 - 1} \leq \frac{R \ln(R + 1)}{R^2 - 1} + \frac{\pi R}{R^2 - 1}, \quad \forall \theta \in [0, \pi]$$

Luego :

$$\int_0^\pi \frac{|\ln(\operatorname{Re}^{i\theta} + i)| R}{R^2 - 1} d\theta \leq \pi \left(\frac{R \ln(R + 1)}{R^2 - 1} + \frac{\pi R}{R^2 - 1} \right)$$

y esta última expresión (la del lado derecho) claramente tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$.

Por lo tanto :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{\ln(z + i)}{z^2 + 1} dz = 0$$

Entonces, si aplicamos $\lim_{R \rightarrow \infty}$ en (*), obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx + i \int_0^\infty \frac{\pi}{x^2 + 1} dx = \pi \ln 2 + i \frac{\pi^2}{2}$$

De donde :

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \pi \ln 2.$$

■

16. Aplicando el método de separación de variables, resolver el problema :

$$\begin{cases} u_{tt} = 16 \cdot u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad \dots\dots(1) \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \quad \dots\dots\dots(2) \\ u(x, 0) = 7 + 4 \cos(6x), & 0 \leq x \leq \pi \quad \dots\dots(3) \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \quad \dots\dots\dots(4) \end{cases}$$

Detallar cada paso del procedimiento

Solución :

Suponemos que $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Reemplazando en (1) se obtiene :
 $X(x) \cdot T''(t) = 16X''(x) \cdot T(t)$, de donde dividiendo por $16X(x) \cdot T(t)$ se concluye que :

$$\frac{T''(t)}{16T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{siempre que} \quad X(x) \cdot T(t) \neq 0.$$

Por lo tanto :

$$\frac{T''(t)}{16T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k, \quad \text{siendo } k \text{ una constante.}$$

De donde : $X''(x) - kX(x) = 0$ y $T''(t) - 16kT(t) = 0$.

De (2) tenemos que : $u_x(0, t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, de donde $X'(0) = 0$.

También : $u_x(\pi, t) = X'(\pi) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, de donde $X'(\pi) = 0$.

Pasamos entonces a resolver:

$$(5) \cdots \begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$k > 0 \implies$ la única solución de (5) es $X(x) = 0$.

$k = 0 \implies$ la solución general de $X''(x) - kX(x) = 0$ es $X(x) = A_0 + A_1x$. Pero :
 $X'(0) = X'(\pi) = 0 \implies A_1 = 0$.

Luego, $X(x) = A_0$ (constante $\neq 0$) es solución no-trivial de (5).

$k < 0 \implies$ la solución general de $X''(x) - kX(x) = 0$ es:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(\sqrt{-k}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{-k}x) \\ X'(x) &= -A\sqrt{-k} \operatorname{sen}(\sqrt{-k}x) + B\sqrt{-k} \cos(\sqrt{-k}x) \end{aligned}$$

$X'(0) = 0 \implies B = 0$

$X'(\pi) = 0 \implies -A\sqrt{-k} \operatorname{sen}(\sqrt{-k}\pi) = 0 \implies \operatorname{sen}(\sqrt{-k}\pi) = 0 \implies \sqrt{-k} = n, \quad n \in \mathbb{N}$. Así, se han obtenido las siguientes soluciones no-triviales (no-nulas) de (5) :

$$X_n(x) = A_n \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ahora, consideramos la ecuación diferencial $T''(t) - 16kT(t) = 0$ para los valores $k = -n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) que acaban de obtenerse. Es decir se consideran :

$$T''(t) + 16n^2T(t) = 0$$

cuya solución general es :

$$n = 0 \implies T_0(t) = C_0 + D_0 t$$

$$n \geq 1 \implies T_n(t) = C_n \cos(4nt) + D_n \sin(4nt).$$

Por lo tanto, las funciones :

$$u_0(x, t) = (C_0 + D_0 t) \cdot A_0 = \alpha_0 + \beta_0 t$$

$$u_n(x, t) = (C_n \cos(4nt) + D_n \sin(4nt)) \cdot A_n \cos(nx) = (\alpha_n \cos(4nt) + \beta_n \sin(4nt)) \cdot \cos(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

son soluciones de (1) y (2), siendo α_n y β_n constantes arbitrarias.

Al observar las condiciones (3) y (4), postulamos como solución a :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_6(x, t).$$

$$(3) \implies u(x, 0) = \alpha_0 + \alpha_6 \cos(6x) = 7 + 4 \cos(6x), \quad \forall x \in [0, \pi], \text{ de donde :}$$

$$\alpha_0 = 7, \quad \alpha_6 = 4.$$

$$(4) \implies u_t(x, 0) = \beta_0 + 24\beta_6 \cos(6x) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi], \text{ de donde :}$$

$$\beta_0 = \beta_6 = 0.$$

Por lo tanto, la solución buscada es :

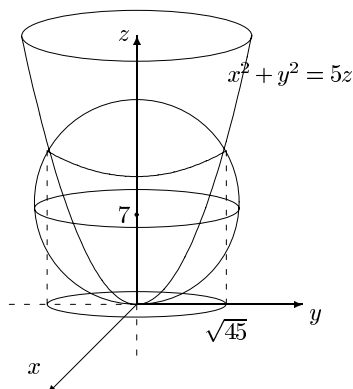
$$u(x, t) = 7 + 4 \cos(24t) \cdot \cos(6x).$$

■

17. a) Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14z$ que está dentro del paraboloides $x^2 + y^2 = 5z$.
- b) Calcular el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = az^2$ situada por encima del plano $z = 0$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = by$, siendo a y b constantes reales positivas.

Solución :

a) .



$$x^2 + y^2 + z^2 = 14z \iff x^2 + y^2 + (z - 7)^2 = 49$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14z \\ x^2 + y^2 = 5z \end{cases} \implies 5z + z^2 = 14z$$

$$\implies z^2 - 9z = 0 \implies z \cdot (z - 9) \implies z = 0 \quad \vee \quad z = 9.$$

$$z = 9 \implies x^2 + y^2 = 45.$$

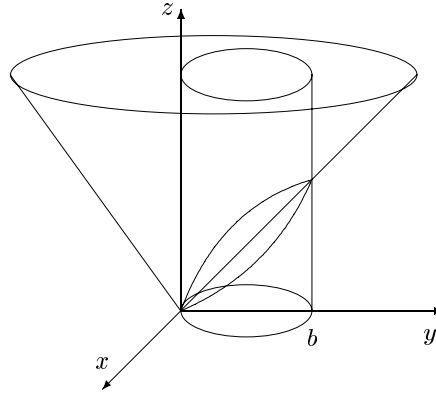
Luego, la superficie en cuestión puede ser expresada explícitamente como:

$$S : z = 7 + \sqrt{49 - x^2 - y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 45\}.$$

Por lo tanto :

$$\begin{aligned} \text{Area de } S &= \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} d(x, y) \\ &= \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}}\right)^2} d(x, y) = \iint_T \frac{7}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}} d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{45}} \frac{7r}{\sqrt{49 - r^2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-7\sqrt{49 - r^2}\Big|_0^{\sqrt{45}}\right] d\theta = 70\pi. \end{aligned}$$

b) .



$$x^2 + y^2 = by \iff x^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$$

La proyección de la superficie S en cuestión sobre el plano xy es la región plana limitada por $x^2 + y^2 = by$. Ahora, si x e y se escriben en coordenadas polares como $x = v \cos u$, $y = v \sen u$, entonces $x^2 + y^2 = by$ se escribe como :

$$v = b \sen u, \quad 0 \leq u \leq \pi.$$

La superficie S puede entonces parametrizarse como :

$$S : \vec{r}(u, v) = \left(v \cos u, v \sen u, \frac{v}{\sqrt{a}} \right),$$

$$(u, v) \in T = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq b \sen u\}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{v}{\sqrt{a}} \cos u, \frac{v}{\sqrt{a}} \sen u, -v \right)$$

Se tiene que : $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = v \sqrt{\frac{1}{a} + 1}$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto : Area}(S) &= \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| d(u, v) = \iint_T v \sqrt{\frac{1}{a} + 1} d(u, v) \\ &= \sqrt{\frac{1}{a} + 1} \int_0^\pi \int_0^{b \sen u} v dv du = \sqrt{\frac{1}{a} + 1} \int_0^\pi \frac{b^2 \sen^2 u}{2} du \\ &= \frac{b^2}{2} \sqrt{\frac{1}{a} + 1} \left[\frac{u}{2} - \frac{\sen 2u}{4} \Big|_0^\pi \right] = \frac{b^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{1}{a} + 1} \end{aligned}$$

■

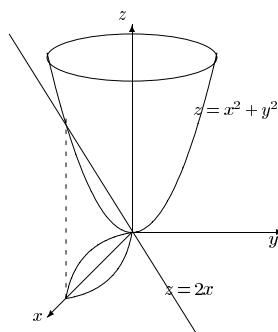
18. Sean $\vec{F}(x, y, z) = (y(x^2 + y^2)^{3/2}, -x(x^2 + y^2)^{3/2}, z + 1)$, y S la frontera de la región sólida acotada por arriba por el plano $z = 2x$ y por abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. **Calcular:**

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

donde \hat{n} es la orientación de S dirigida hacia afuera, **mediante las siguientes dos formas:**

- a) **Utilizando la Definición.**
 b) **Utilizando el Teorema de la Divergencia.**

Solución :



a) $z = 2x \cap z = x^2 + y^2 \implies 2x = x^2 + y^2$

$$\implies r = 2 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por definición :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_2 \, dS, \quad \text{donde,}$$

$S_1 : \vec{r}_1(x, y) = (x, y, 2x)$, $(x, y) \in T$, siendo T la región del plano xy acotada por la curva $r = 2 \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y} = (-2, 0, 1)$, que nos dá la orientación requerida.

$$\text{Luego : } \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_1 \, dS = \iint_T \vec{F}(\vec{r}_1(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y} \right) d(x, y) =$$

$$\iint_T \vec{F}(x, y, 2x) \cdot (-2, 0, 1) \, d(x, y) = \iint_T (y(x^2 + y^2)^{3/2}, -x(x^2 + y^2)^{3/2}, 2x + 1) \cdot (-2, 0, 1) \, d(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_T (-2y(x^2 + y^2)^{3/2} + 2x + 1) d(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (-2r^4 \sin\theta + 2r \cos\theta + 1) r dr d\theta \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

Por otro lado :

$$S_2 : \vec{r}_2(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad (x, y) \in T.$$

$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y} = (-2x, -2y, 1), \text{ que nos dá la orientación opuesta a la requerida.}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por lo tanto : } \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_2 dS &= - \iint_T \vec{F}(\vec{r}_2(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y} \right) d(x, y) \\
&= - \iint_T (y(x^2 + y^2)^{3/2}, -x(x^2 + y^2)^{3/2}, x^2 + y^2 + 1) \cdot (-2x, -2y, 1) d(x, y) \\
&= - \iint_T (x^2 + y^2 + 1) d(x, y) = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (r^2 + 1)r dr d\theta = -\frac{5\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = 3\pi + \left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b) } \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 3xy\sqrt{x^2 + y^2} - 3xy\sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 1.$$

Si D es la región sólida entre los gráficos de $z = r^2$ y $z = 2r \cos\theta$ sobre la región en el plano xy acotada por $r = 2 \cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces por el **Teorema de la divergencia** tenemos que :

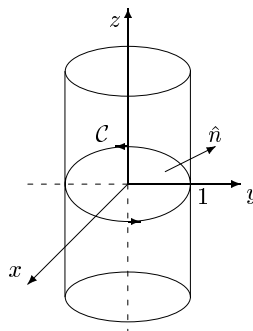
$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) d(x, y, z) = \iiint_D 1 d(x, y, z) \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_{r^2}^{2r\cos\theta} r dz dr d\theta = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

■

19. Sea C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$ recorrida de tal modo que mirada desde arriba el sentido es el antihorario. **Utilizando el Teorema de Stokes**, calcule:

$$\int_C (-y^3) dx + x^3 dy + (-z^3) dz$$

Solución :



Podemos tomar como S a la parte del plano $x + y + z = 1$ acotada por C , orientada con la normal \hat{n} dirigida hacia arriba.

$S : \vec{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, $(x, y) \in R$, donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (1, 1, 1)$, que nos dá la orientación requerida.

El Teorema de Stokes nos dice que :

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

Pero :

$$\text{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

Por lo tanto :

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \iint_R (\text{rot} \vec{F}(\vec{r}(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) d(x, y) \\ &= \iint_R (0, 0, 3(x^2 + y^2)) \cdot (1, 1, 1) d(x, y) = \iint_R 3(x^2 + y^2) d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^3 \, dr d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

■

20. Calcular $\int_C (2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy$, donde C es el segmento de recta que va desde $(-1, 2)$ hasta $(2, 3)$, **sin parametrizar la curva C .**

Solución :

$\vec{F}(x, y) = (2xy^2 + 1, 2x^2y) = (P, Q)$ es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^2 es simplemente conexo y además :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 4xy = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto, \vec{F} es conservativo en \mathbb{R}^2 , es decir existe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Para encontrar un potencial f de \vec{F} procedemos como sigue:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 + 1 \cdots (i) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y \cdots (ii) \end{cases}$$

Integrando ambos lados de (i) con respecto a x , obtenemos : $f(x, y) = x^2y^2 + x + g(y)$.

Tomando derivadas parciales con respecto a y , y comparando con (ii) obtenemos :

$$2x^2y + g'(y) = 2x^2y, \text{ de donde } g'(y) = 0, \text{ es decir, } g(y) = c.$$

$$\text{Por lo tanto : } f(x, y) = x^2y^2 + x + c.$$

Finalmente :

$$\int_C (2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy = f(2, 3) - f(-1, 2) = 38 - 3 = 35$$

■

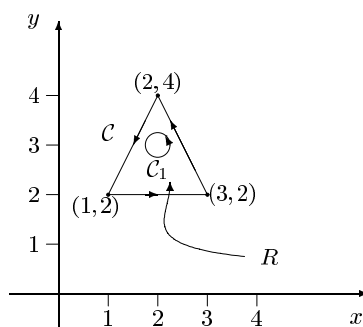
21. Calcular:

$$\int_C \left[\frac{3-y}{(x-2)^2 + (y-3)^2} - \frac{3+y}{(x+2)^2 + (y+3)^2} \right] dx$$

$$+ \left[\frac{x-2}{(x-2)^2 + (y-3)^2} + \frac{x+2}{(x+2)^2 + (y+3)^2} \right] dy,$$

donde C es el triángulo de vértices $(1, 2)$, $(3, 2)$ y $(2, 4)$, recorrido en sentido antihorario.

Solución :



Se debe calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$, donde $\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$ y

$$\vec{G}(x,y) = \left(\frac{3-y}{(x-2)^2 + (y-3)^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + (y-3)^2} \right) = (G_1, G_2)$$

$$\vec{H}(x,y) = \left(-\frac{3+y}{(x+2)^2 + (y+3)^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2 + (y+3)^2} \right) = (H_1, H_2)$$

Se cumple que :

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) = \frac{(y-3)^2 - (x-2)^2}{((x-2)^2 + (y-3)^2)^2}, \quad \forall (x,y) \neq (2,3)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial H_1}{\partial y}(x,y) = \frac{(y+3)^2 - (x+2)^2}{((x+2)^2 + (y+3)^2)^2}, \quad \forall (x,y) \neq (-2,-3)$$

Por lo tanto, $\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$, $\forall (x,y) \neq (2,3), (-2,-3)$

Sea $C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = a^2$, $a > 0$ suficientemente pequeño de tal modo que C_1 está contenida en la región interior a C .

Del Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas se tiene que si R es la región interior a C y exterior a C_1 , entonces:

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} - \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Por lo tanto : $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{C_1} \vec{G} \cdot d\vec{x} + \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{x}$

$$C_1 : \begin{cases} x = 2 + a \cos t \\ y = 3 + a \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\oint_{C_1} \vec{G} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \sin t}{a^2}, \frac{a \cos t}{a^2} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Por otro lado, por el Teorema de Green para regiones simplemente conexas se tiene que si R_1 es el círculo encerrado por C_1 , entonces :

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{x} = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) d(x, y) = 0$$

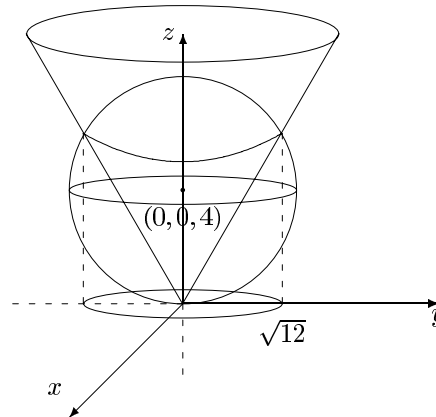
Por lo tanto :

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 2\pi + 0 = 2\pi.$$

■

22. Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$ que está dentro del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$.

Solución :



$$x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16 \cap z^2 = 3(x^2 + y^2) \implies$$

$$\frac{z^2}{3} + (z - 4)^2 = 16 \implies z \left(\frac{4}{3}z - 8 \right) = 0$$

$$\implies z = 0 \vee z = 6 \implies (x, y, z) = (0, 0, 0) \vee x^2 + y^2 = 12, z = 6.$$

Por lo tanto, la superficie en cuestión corresponde a:

$$z = 4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 12\}.$$

$$\text{Por lo tanto : Area} = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} d(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\right)^2} d(x,y) \\
&= \iint_T \frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}} d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{12}} \frac{4r}{\sqrt{16-r^2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-4\sqrt{16-r^2}\Big|_0^{\sqrt{12}}\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 8 d\theta = (2\pi) \cdot 8 = 16\pi
\end{aligned}$$

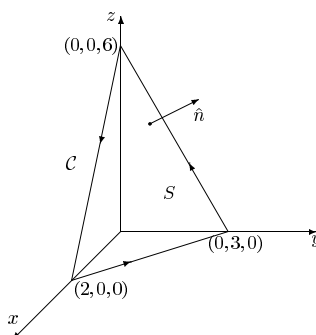
■

23. Utilizando el Teorema de Stokes, calcular :

$$\int_C (x+y)dx + (2x-z)dy + (y+z)dz, \quad \text{donde}$$

C es el borde del triángulo con vértices $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ y $(0,0,6)$, recorrido de tal modo que mirado desde el origen el sentido es el de las agujas del reloj.

Solución :



$$\vec{F}(x,y,z) = (x+y, 2x-z, y+z)$$

$$\text{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & 2x-z & y+z \end{vmatrix} = (2, 0, 1)$$

Sea S la parte del plano $3x+2y+z=6$ acotada por C , orientada con la normal \hat{n} dirigida hacia arriba. S puede ser parametrizada como :

$S : \vec{r}(x, y) = (x, y, 6 - 3x - 2y)$, donde

$$(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x\}.$$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (3, 2, 1)$ que nos dá la orientación requerida.

El Teorema de Stokes nos dice que:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \iint_R (\text{rot} \vec{F}(\vec{r}(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) d(x, y) \\ &= \iint_R (2, 0, 1) \cdot (3, 2, 1) d(x, y) = \iint_R 7 d(x, y) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 7 \, dy dx = 21. \end{aligned}$$

■

24. a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de coseno de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

y trazar la gráfica de esta serie.

- b) Usar la serie obtenida en a) para probar que :

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$$

Justificar la validez de esta igualdad.

Solución :

- a) Por definición, el desarrollo en serie de Fourier de coseno de f es la serie :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{donde}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos kx \, dx$$

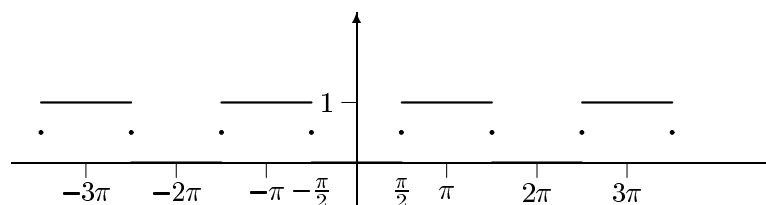
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} dx = 1$$

$$k \geq 1 : a_k = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k} \text{sen } kx \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = -\frac{2}{k\pi} \text{sen } \frac{k\pi}{2}$$

Por lo tanto, la serie pedida es :

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \right]$$

La gráfica de esta serie es :



b) En $x = 0$ vemos que la serie anterior converge a 0, es decir :

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right],$$

de donde :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

La validez de la igualdad anterior está garantizada con el hecho que f y f' son ambas continuas por tramos en $[0, \pi]$.

■

25. Aplicando el método de separación de variables, resolver el problema :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 2, & t > 0 \dots\dots\dots(1) \\ u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0, & t \geq 0 \dots\dots\dots(2) \\ u(x, 0) = 8 \cos((3\pi/4)x) - 6 \cos((9\pi/4)x), & 0 \leq x \leq 2 \dots(3) \end{cases}$$

Detallar cada paso del procedimiento

Solución :

Suponemos que $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Reemplazando en (1) se obtiene :
 $X(x) \cdot T'(t) = X''(x) \cdot T(t)$, de donde dividiendo por $X(x) \cdot T(t)$ se concluye que :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{siempre que} \quad X(x) \cdot T(t) \neq 0.$$

Por lo tanto :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k, \quad \text{siendo } k \text{ una constante.}$$

De donde : $X''(x) - kX(x) = 0$ y $T'(t) - kT(t) = 0$.

De (2) tenemos que : $u_x(0,t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, de donde $X'(0) = 0$.

También : $u(2,t) = X(2) \cdot T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, de donde $X(2) = 0$.

A continuación debemos resolver:

$$(4) \dots \begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 \\ X'(0) = X(2) = 0 \end{cases}$$

$k > 0 \implies$ la única solución de (4) es $X(x) = 0$.

$k = 0 \implies$ la solución general de $X''(x) - kX(x) = 0$ es $X(x) = A_0 + A_1x$. Pero :
 $X'(0) = X(2) = 0 \implies A_1 = A_0 = 0 \implies X(x) = 0$.

$k < 0 \implies$ la solución general de $X''(x) - kX(x) = 0$ es :

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(\sqrt{-k}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{-k}x) \\ X'(x) &= -A\sqrt{-k} \operatorname{sen}(\sqrt{-k}x) + B\sqrt{-k} \cos(\sqrt{-k}x) \end{aligned}$$

$X'(0) = 0 \implies B = 0$

$X(2) = 0 \implies A \cos(2\sqrt{-k}) = 0 \implies \cos(2\sqrt{-k}) = 0 \implies \sqrt{-k} = \frac{(2n-1)\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Así, se han obtenido las siguientes soluciones no-triviales (no-nulas) de (4) :

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora, consideramos la ecuación diferencial $T'(t) - kT(t) = 0$ para los valores $k = -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{16}$ ($n \in \mathbb{N}$), que acaban de obtenerse. Es decir se consideran :

$$T'(t) - \lambda_n T(t) = 0, \quad \text{donde } \lambda_n = -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{16}$$

cuya solución general es :

$$T_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, las funciones :

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = A_n C_n e^{\lambda_n t} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}x\right), \quad \text{esto es,}$$

$$u_n(x, t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

son soluciones de (1) y (2), siendo α_n una constante arbitraria.

Al observar la condición (3), postulamos como solución a :

$$u(x, t) = u_2(x, t) + u_5(x, t).$$

$$(3) \Rightarrow u(x, 0) = \alpha_2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) + \alpha_5 \cos\left(\frac{9\pi}{4}x\right) = 8 \cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - 6 \cos\left(\frac{9\pi}{4}x\right),$$

$\forall x \in [0, 2]$, de donde :

$$\alpha_2 = 8, \quad \alpha_5 = -6.$$

Por lo tanto, la solución buscada es :

$$u(x, t) = 8 e^{-\frac{9\pi^2}{16}t} \cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - 6 e^{-\frac{81\pi^2}{16}t} \cos\left(\frac{9\pi}{4}x\right).$$

■

26. a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de seno de la función $f(x) = \cos(x)$, $0 < x < \pi$, y trazar la gráfica de esta serie.
b) Usar la serie obtenida en a) para probar que :

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \dots$$

Justificar la validez de esta igualdad.

Solución :

- a) Por definición, el desarrollo en serie de Fourier de seno de f es la serie :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx, \quad \text{donde } b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+kx) - \operatorname{sen}(x-kx)] \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(1+k)x \, dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(k-1)x \, dx \right] \end{aligned}$$

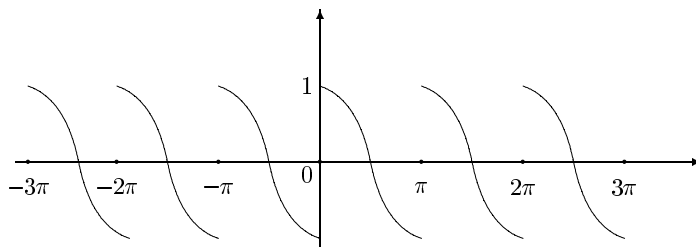
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(1+k)x}{(1+k)} \Big|_0^\pi - \frac{\cos(k-1)x}{(k-1)} \Big|_0^\pi \right] = \frac{2k}{\pi} \left[\frac{1+(-1)^k}{k^2-1} \right], \quad \text{para } k \geq 2.$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin x dx = 0$$

Por lo tanto, la serie pedida es :

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin(2nx)$$

La gráfica de esta serie es:



- b) En $x = \frac{\pi}{4}$ vemos que la serie anterior converge a $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (notar que f y $f' \in PC[0, \pi]$), es decir que :

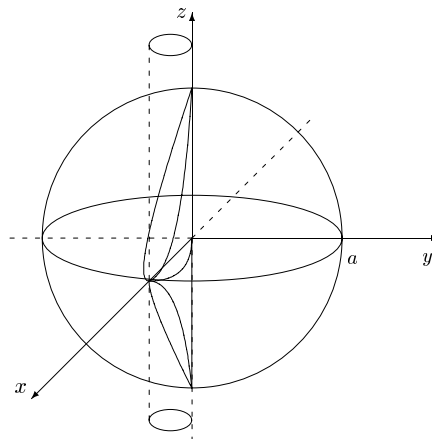
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{de donde :}$$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{3}{6^2-1} + \frac{5}{10^2-1} - \frac{7}{14^2-1} + \dots$$

■

27. Calcular el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ que queda dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, siendo a una constante real positiva.

Solución :



$$x^2 + y^2 = ax \iff \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

Parametrizamos la parte del cilindro que queda dentro de la esfera como :

$$S : \vec{r}(u, v) = \left(\frac{a}{2} \cos u + \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \sin u, v\right), \quad \text{con}$$

$$(u, v) \in T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, -a \sin\left(\frac{u}{2}\right) \leq v \leq a \sin\left(\frac{u}{2}\right)\}$$

$$z^2 = a^2 - (x^2 + y^2) = a^2 - ax = a^2 - a\left(\frac{a}{2} \cos u + \frac{a}{2}\right) = a^2 \left(\frac{1 - \cos u}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{a}{2} \cos u, \frac{a}{2} \sin u, 0\right)$$

Se tiene que : $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \frac{a}{2}$

Por lo tanto : $\text{Area}(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| d(u, v) = \iint_T \frac{a}{2} d(u, v)$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-a \sin(\frac{u}{2})}^{a \sin(\frac{u}{2})} \frac{a}{2} dv du = 4a^2$$

■

Capítulo 7

Ejercicios Propuestos

- Calcular la $\int_C (2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy$, donde :
 - C es el segmento de recta desde $(2, 4)$ hasta $(3, 9)$.
 - C es el arco de la parábola $y = x^2$ desde $(2, 4)$ hasta $(3, 9)$.
- Calcular la $\int_C ydx + zdy + xdz$, donde C está compuesto de :
 - Los segmentos de recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(0, -5, 0)$, y desde $(0, -5, 0)$ hasta $(0, 1, 1)$.
 - Los segmentos de recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 0)$, y desde $(1, 0, 0)$ hasta $(0, 1, 1)$.
- Calcular la $\int_C y^2dx + xdy$, donde :
 - C es el segmento de recta desde $(-5, -3)$ hasta $(0, 2)$.
 - C es el arco de la parábola $x = 4 - y^2$ desde $(-5, -3)$ hasta $(0, 2)$.
- Calcular la $\int_C ydx + xydy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ recorrida en sentido antihorario.
- Calcular las siguientes integrales de línea :
 - $\int_C (x + y)dx + xydy + z^2dz$, donde C es el segmento de recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 2, 1)$.
 - $\int_C (x^2 - y^3)dx + (x^2 + y^2)dy$, donde C es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, recorrida en sentido antihorario.
 - $\int_C (x^2 + y)dx + (x^2 + y^2)dy$, desde $(2, 0)$ hasta $(-2, 0)$, a lo largo de la semielipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, $y \geq 0$.
 - $\int_C (4x + y + 3z)dx + (x + 3y + 2z)dy + (3x + 2y + 5z)dz$, a lo largo de los segmentos de recta desde $(1, 4, 2)$ a $(4, 2, 3)$, y desde $(4, 2, 3)$ a $(1, 1, 2)$.
 - $\int_C (x^2 + y^2)dx + (y^2 - x^2)dy$, a lo largo del segmento de recta desde $(0, 0)$ a $(\sqrt{3}, 1)$, y entonces a $(0, 2)$ con $x = \sqrt{4 - y^2}$.
 - $\int_C (x^2 + y^2)dx + (y^2 - x^2)dy$, a lo largo de la frontera del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, en sentido antihorario.

6. Calcular la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y, y^2 + x)$ desde $(0, 1)$ a $(1, 2)$ a lo largo de :
- El segmento de recta que une esos puntos.
 - El camino formado por los segmentos de recta de $(0, 1)$ a $(1, 1)$ y de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.
 - La parábola $y = x^2 + 1$.
7. Si $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz, 2y + 3xz, 1 - 4xyz^2)$, calcular la $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ a lo largo de los siguientes caminos C :
- $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.
 - El camino formado por los segmentos de recta de $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$, de $(0, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$, y de $(0, 1, 1)$ a $(1, 1, 1)$.
 - El segmento de recta que une esos puntos.
8. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $z = y \tan(\alpha)$, en donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. El camino es recorrido de modo que, observando el plano xy desde el eje z positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj.
9. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ax$, siendo $z \geq 0$ y " a " una constante positiva. El camino es recorrido de modo que, observado el plano xy desde el eje z positivo el sentido sea el de las agujas del reloj.
10. Evaluar $\int_C (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, si C es el cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.
11. En cada caso, calcular la integral de línea del campo vectorial \vec{F} a lo largo del camino que se indica.
- $\vec{F}(x, y) = (2a - y, x)$, a lo largo del camino descrito por $\vec{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in [0, 2\pi]$, siendo " a " una constante.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, a lo largo del camino descrito por $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, xz - y)$, desde $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 4)$ a lo largo de un segmento rectilíneo.
 - $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y, x - y^2)$, a lo largo de $y = x^{3/2}$ desde $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, a lo largo del camino formado por los segmentos de recta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, de $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$, y de $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (2x - y, 2z, y - z)$, desde $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ a lo largo de:
 - El segmento de recta que une esos puntos.
 - A lo largo de la curva $\vec{r}(t) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t \right)$, $0 \leq t \leq 1$.
12. En cada caso, calcular el valor de la integral de línea dada :

- a) $\int_C ydx + xydy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj.
- b) $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, donde C es el contorno del cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$, recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.
- c) $\int_C ydx + zdy + xdz$, donde :
- 1) C es la curva de intersección de las dos superficies $x + y = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. La curva es recorrida de tal modo que mirando desde el origen el sentido es el de las agujas del reloj.
 - 2) C es la intersección de las dos superficies $z = xy$ y $x^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido, que vista desde encima del plano xy , es el contrario al de las agujas del reloj.
13. Un campo de fuerzas \vec{F} en el espacio de tres dimensiones viene dado por la fórmula $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, x(y + 1))$. Calcular el trabajo realizado por \vec{F} al mover una partícula recorriendo una vez el contorno del triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$ en este orden.
14. En cada caso, pruebe que la integral de línea es independiente del camino, y luego calcule la integral.
- a) $\int_{(0,1)}^{(1,0)} xe^{(x^2+y^2)} dx + ye^{(x^2+y^2)} dy$
 - b) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} (2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy$.
 - c) $\int_{(1,-1,1)}^{(2,0,1)} 3x^2y^2zdx + 2x^3yzdy + x^3y^2dz$.
 - d) $\int_{(1,-1,2)}^{(1,1,-1)} (2x + 2yz)dx + (2y + 2xz)dy + 2xydz$.
 - e) $\int_{(1,-1)}^{(2,1)} \frac{4xdx + 4ydy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, a lo largo de cualquier curva que no pase por $(0, 0)$.
15. Calcule : $\int_C \frac{xdx + ydy + zdz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, donde C es el segmento de recta que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ **sin parametrizar la curva C .**
16. Calcular: $\int_C (\sen y - y \sen x + x)dx + (\cos x + x \cos y + y)dy$, donde C es la porción de la recta $y = 2x$ desde $(0, 0)$ hasta $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, **sin parametrizar la curva C .**
17. En cada caso, use el Teorema de Green para calcular $\int_C \vec{F} \cdot dx$, donde C está orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj.
- a) $\vec{F}(x, y) = (y^3 + y, 3y^2x)$; C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 100$.
 - b) $\vec{F}(x, y) = (y^4, x^3)$; C es el contorno del cuadrado de vértices $(-2, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, -2)$ y $(2, 2)$.

- c) $\vec{F}(x, y) = (y \operatorname{sen} x, -\cos x)$; \mathcal{C} está compuesta de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 9$ para $y \geq 0$, y la recta $y = 0$ para $-3 \leq x \leq 3$.
- d) $\vec{F}(x, y) = (xy, \frac{1}{2}x^2 + xy)$; \mathcal{C} está compuesta del intervalo $[-1, 1]$ en el eje x y la mitad superior de la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.
18. En cada caso, use el Teorema de Green para calcular la integral de línea. Suponga que \mathcal{C} está orientada en sentido antihorario.
- a) $\int_{\mathcal{C}} (e^x \operatorname{sen} y - xy^2)dx + (e^x \cos y + x^2y)dy$; \mathcal{C} es la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.
- b) $\int_{\mathcal{C}} \left(3x^2y^2 - 3xy + \frac{y^4}{4} \right) dx + \left(xy^3 + \frac{x^3}{3} \right) dy$; \mathcal{C} es la frontera del triángulo con vértices $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$
19. Use un corolario del Teorema de Green para encontrar el área de la región acotada por las curvas :
- a) $y = x^2$, $x + y = 2$, $x + 3y = 0$, $x \geq 0$.
- b) $x = 1$, $x + y = 3$, $4x + y = 9$, $x + y = 0$.
- c) $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$, y la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (\operatorname{sen}(\pi t), t(1 - t))$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.
20. Evalúe $\int_{\mathcal{C}} \frac{ydx - (x - 1)dy}{(x - 1)^2 + y^2}$, donde \mathcal{C} es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ recorrida en sentido antihorario.
21. Evalúe la integral $\int_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + (x - 2)dy}{(x - 2)^2 + y^2}$, donde \mathcal{C} es recorrida en sentido antihorario y corresponde a :
- a) El contorno del cuadrado de vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.
- b) La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.
- c) La elipse $(x - 2)^2 + 4y^2 = 1$.
22. Evalúe : $\int_{\mathcal{C}} \left[\frac{-y}{(x + 1)^2 + y^2} - \frac{18y}{4(x - 1)^2 + 9y^2} \right] dx + \left[\frac{x + 1}{(x + 1)^2 + y^2} + \frac{18(x - 1)}{4(x - 1)^2 + 9y^2} \right] dy$
donde \mathcal{C} es el triángulo de vértices $(0, 2)$, $(0, -3)$ y $(-3, 5)$ recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.
23. Calcular :

$$\int_{\mathcal{C}} \left[\frac{3 - y}{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} - \frac{3 + y}{(x + 2)^2 + (y + 3)^2} \right] dx + \left[\frac{x - 2}{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} + \frac{x + 2}{(x + 2)^2 + (y + 3)^2} \right] dy$$

donde \mathcal{C} es la curva cerrada seccionalmente suave cuyas secciones están definidas por :
 $y = 2x$, $1 \leq x \leq 2$; $y = -2x + 8$, $2 \leq x \leq 3$; $y = 2 - \sqrt{1 - (x - 2)^2}$, $1 \leq x \leq 3$.

24. En cada caso, calcular la integral de línea con respecto a la longitud de arco.
- $\int_{\mathcal{C}} (x + y) ds$, siendo \mathcal{C} el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, y $(0, 1)$, recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.
 - $\int_{\mathcal{C}} y^2 ds$, en donde \mathcal{C} tiene la ecuación vectorial: $\vec{\alpha}(t) = (a(t - \text{sen } t), a(1 - \text{cos } t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - $\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) ds$, donde \mathcal{C} tiene la ecuación vectorial: $\vec{\beta}(t) = (a(\text{cos } t + t \text{sen } t), a(\text{sen } t - t \text{cos } t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

25. Un alambre uniforme tiene la forma de la porción de curva de intersección de las dos superficies $x^2 + y^2 = z^2$ e $y^2 = x$, que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, \sqrt{2})$. Hallar la coordenada \bar{z} del centroide.

26. Un alambre tiene la forma de una circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Determinar su masa y su momento de inercia respecto a un diámetro si la densidad en (x, y) es $|x| + |y|$.

27. Calcular:

$$\int_{\mathcal{C}} \left[\frac{1-y}{x^2 + (1-y)^2} - \frac{yx^2 + y^3 - x}{x^2 + y^2} \right] dx + \left[\frac{x}{x^2 + (1-y)^2} + \frac{y + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} \right] dy$$

donde \mathcal{C} es la frontera del cuadrado de vértices $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(-3, 0)$ y $(0, -3)$, recorrida en sentido antihorario.

28. Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14z$ que está dentro del paraboloides $x^2 + y^2 = 5z$ (Resp.: 70π).

29. Calcular el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = az^2$ situada por encima del plano $z = 0$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = by$, siendo a y b constantes reales positivas.

$$\left(\text{Resp. : } \frac{\pi b^2}{4} \sqrt{1 + \frac{1}{a}} \right)$$

30. Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$ que está dentro del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ (Resp.: 16π)

31. En cada caso, hallar el área de la superficie descrita:

- La porción de la superficie $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ situada sobre el triángulo $\{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$.
- La porción del plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ en el primer octante ($a > 0, b < 0, c > 0$).
- La parte del paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ que queda por encima del plano $z = 5$.
- La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ interior al paraboloides $z = x^2 + y^2$.

32. Calcular el área de las siguientes superficies:

- $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < R_1 \leq z \leq R_2$.

- b) $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
- c) $x + y - 2z = 0$, $0 \leq x + y \leq 4$, $2 \leq x - y \leq 6$.
- d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $|z| \leq \rho$ ($0 < \rho < a$).
- e) $ax + by + z = d$, $x^2 + y^2 \leq \rho^2$.
- f) $x^2 + y^2 = 2x$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.
- g) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.
- h) $x^2 + y^2 = 9$, $2x \leq z \leq 3x + 7$.
- i) La parte del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$.
- j) La parte del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ que queda dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- k) El toro de ecuación vectorial: $\vec{r}(u, v) = (a + b \cos u) \sin v \hat{i} + (a + b \cos u) \cos v \hat{j} + b \sin u \hat{k}$, donde $0 < b < a$ y $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
- l) La porción de la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

33. En cada caso, calcular $\iint_S f(x, y, z) dS$

- a) $f(x, y, z) = x$; S es la parte del plano $2x + 3y + z = 6$ en el primer octante.
- b) $f(x, y, z) = z^2$; S es la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1$ y $z = 3$.
- c) $f(x, y, z) = 2x^2 + 1$; S es la parte del plano $z = 3x - 2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
- d) $f(x, y, z) = z^2$; S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el primer octante.
- e) $f(x, y, z) = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$; S es la parte del paraboloides $z = x^2 + y^2$ debajo del plano $y = z$.
- f) $f(x, y, z) = xy$; S es la parte del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra arriba del plano xy .
- g) $f(x, y, z) = y$; S es la parte de la hoja parabólica $z = 4 - y^2$ para la cual $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 2$.
- h) $f(x, y, z) = x^2 z$; S es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ entre los planos $y = -1$ e $y = 2$ y encima del plano xy .
- i) $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$; S es el hemisferio $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$.
- j) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; S está compuesto de la parte del paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$ encima del plano xy , y la parte del plano xy que se encuentra dentro de $x^2 + y^2 = 1$.
- k) $f(x, y, z) = x + 1$; S es el tetraedro con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
- l) $f(x, y, z) = x + y + z$; S es la porción del plano $x + y = 1$ en el primer octante para la cual $0 \leq z \leq 1$.
- m) $f(x, y, z) = x + y$; S es el cubo con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 1)$.
- n) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$.

- \hat{n}) $f(x, y, z) = y^2$; S es el cilindro $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$, y su techo y fondo.
- o) $f(x, y, z) = x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1$; S es la porción de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.
34. Calcular: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$, donde:
- $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, 1)$; S es la superficie que acota a la región definida por: $-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ y \hat{n} es la normal hacia afuera.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 3\}$ y \hat{n} tiene componente z negativa.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$; S es la porción de plano limitada por un triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ y \hat{n} tiene componente z no negativa.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, 8)$; S es la parte del paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ encima del plano xy y \hat{n} es dirigida hacia arriba.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z^4)$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y \hat{n} es dirigida hacia afuera de la esfera.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$; $S = \{(x, y, z) : x + y - 2z = 0, 0 \leq x + y \leq 4, 2 \leq x - y \leq 6\}$ \hat{n} tiene componente x positiva.
35. Sean $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + ye^z, y^2 + ze^x, z^2 + xe^y)$, y S la frontera de la región sólida que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y entre los planos $z = 0$ y $z = x + 2$. Utilizando el Teorema de la divergencia, calcular: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$, donde \hat{n} es la orientación de S dirigida hacia afuera.
36. En cada caso, use el Teorema de la Divergencia para calcular: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$, donde \hat{n} es la normal de S dirigida hacia afuera.
- $\vec{F}(x, y, z) = (3x, 4y, 5z)$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$; S es la frontera de la región sólida D acotada por el plano xy y el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$; S es la frontera de la región sólida en el primer octante que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x - \cos x, y - y \sin x, 2z)$; S es el tetraedro con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (y(x^2 + y^2)^{3/2}, -x(x^2 + y^2)^{3/2}, z + 1)$; S es la frontera de la región sólida acotada arriba por el plano $z = 2x$ y abajo por el paraboloides $z = x^2 + y^2$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$; S es la frontera de la región sólida $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
37. Use el Teorema de la Divergencia para calcular: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ donde S es la superficie que acota a D y \hat{n} es la orientación hacia afuera de S .
- $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2, xy, z)$; $D = \{(x, y, z) : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

- b) $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 3y, z)$; $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$.
- c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$; $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq x + 1\}$
- d) $\vec{F}(x, y, z) = (2yz, 2xz, 2xy)$; $D = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.
38. Use el Teorema de la Divergencia para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (2x, xy, xz)$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada con la normal hacia afuera.
39. Verifique el Teorema de Stokes para \vec{F} y S dados:
- a) $\vec{F}(x, y, z) = (2z, 3x, 4y)$; $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z = 9 - x^2 - y^2\}$
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (4x^2 + y, 2y, x - 3z^2)$; $S = \{(x, y, z) : 3x + y + 3z = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$
- c) $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 3z, -2y)$; $S = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3, y \geq 0\}$.
- d) $\vec{F}(x, y, z) = (4x^3, 2y^2, 0)$; $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$
- e) $\vec{F}(x, y, z) = (2y, 3x, z)$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, 1 \leq z \leq x + 4\}$
- f) $\vec{F}(x, y, z) = (y + x, x + z, z^2)$; $S = \{(x, y, z) : z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$.
40. En cada caso, transformar la integral de superficie $\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$ en una integral de línea utilizando el teorema de Stokes, y calcular entonces la integral de línea.
- a) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$ donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y \hat{n} es la normal unitaria con componente z no negativa.
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, donde S es la parte de paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, y \hat{n} es la normal unitaria con componente z no negativa.
- c) $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$ donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$, no situadas en el plano xy ; \hat{n} es la normal unitaria exterior.
- d) $\vec{F}(x, y, z) = (xz, -y, x^2y)$, donde S consta de las tres caras no situadas en el plano xz del tetraedro limitado por los tres planos coordenados y el plano $3x + y + 3z = 6$. La normal \hat{n} es la normal unitaria exterior del tetraedro.
41. En cada caso, usar el Teorema de Stokes para demostrar que las integrales de línea tienen los valores que se dan. En cada caso, explicar el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.
- a) $\int_C ydx + zdy + xdz = \pi a^2 \sqrt{3}$, siendo C la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $x + y + z = 0$.
- b) $\int_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$, siendo C la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$.
- c) $\int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = 2\pi a(a + b)$, donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1, a > 0, b > 0$.

42. Use el Teorema de Stokes para calcular $\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xz, y^2 + 2x, x)$; S es la parte del paraboloido $z = 9 - x^2 - y^2$ encima del plano xy ; \hat{n} es dirigida hacia arriba.
43. Sea C la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, recorrida de tal modo que mirada desde arriba, el sentido es el contrario al de las agujas del reloj. Utilizando el Teorema de Stokes, calcule: $\int_C (x^2 + z)dx + (y^2 + x)dy + (z^2 + y)dz$.
44. Utilizando el Teorema de Stokes, calcule: $\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, x^3, \cos(xz))$, S es la parte del elipsoide $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, que queda por debajo del plano xy , y \hat{n} está dirigida hacia afuera del elipsoide.
45. Sea C el borde del triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, recorrido de tal modo que mirado desde arriba el sentido es el antihorario. Utilizando el Teorema de Stokes, calcule:

$$\int_C 3ydx + 2zdy + (-x)dz$$

46. Utilizando el Teorema de Stokes, calcular $\int_C (x + y)dx + (2x - z)dy + (y + z)dz$, donde C es el borde del triángulo con vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 6)$, recorrido de tal modo que mirado desde el origen el sentido es el de las agujas del reloj. (Resp.: 21).
47. Sea C la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con el plano $x + y + z = 1$ recorrida de tal modo que mirada desde arriba el sentido es el antihorario. Utilizando el Teorema de Stokes, calcule:

$$\int_C (-y^3)dx + x^3dy + (-z^3)dz \quad \left(\text{Resp.: } \frac{3\pi}{2} \right)$$

48. Sea C la curva de intersección del plano $z = x + 4$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, recorrida de tal modo que mirada desde arriba el sentido es el antihorario. Utilizando el Teorema de Stokes, calcule:

$$\int_C 2zdx + 4xdy + 5ydz$$

(Resp.: -4π)

49. Un recipiente esférico homogéneo (= densidad constante) de radio a está cortado por una hoja de un cono circular recto cuyo vértice está en el centro de la esfera. Si el ángulo en el vértice del cono es α , siendo $0 < \alpha < \pi$, determinar (en función de a y α) el centro de gravedad de la porción del recipiente esférico que es interior al cono.
50. Una hoja de papel rectangular homogénea de densidad 1, de base $2\pi a$, y altura h se enrolla formando una superficie cilíndrica S de radio a . Calcular el momento de inercia de S alrededor de un eje que contiene un diámetro de la base circular.
51. En relación con el ejercicio anterior, calcular el momento de inercia de S alrededor de un eje situado en el plano de la base y que es tangente al borde circular de la base.

52. Un flujo de fluido tiene como vector densidad de flujo a $\vec{F}(x, y, z) = (x, -2x - y, z)$. Designemos con S al hemisferio norte : $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, y designemos con \hat{n} a la normal unitaria orientada hacia el exterior de la esfera. Calcular la masa de fluido que atraviesa S en la unidad de tiempo en la dirección de \hat{n} .
53. Resolver el ejercicio anterior si S contiene también la base plana del hemisferio. En la base inferior la normal unitaria es $-\hat{k}$.
54. En cada caso, encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función dada. Trazar la gráfica de la serie obtenida, poniendo particular atención a sus valores en cualesquiera de los puntos de discontinuidad.

a) $f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0 \\ -x + \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

c) $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

d)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

e) $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi$

f) $f(x) = |\operatorname{sen} x|, \quad -\pi < x < \pi$

g)

$$f(x) = \begin{cases} -|x - \frac{1}{2}|, & -\pi \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

h)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -\pi \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ |x|, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

i) $f(x) = (\pi - x)(\pi + x), -\pi \leq x \leq \pi$

j)

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0 \\ x - \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

k)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

55. a) Trazar la gráfica del desarrollo en serie de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

sobre los intervalos $[2\pi, 3\pi]$ y $[-2\pi, 0]$

- b) ¿Cuál es el valor de la serie de Fourier para f cuando $x = k\pi$, siendo k un entero?
¿Cuándo $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, siendo k un entero?

56. a) Trazar la gráfica del desarrollo en serie de Fourier de la función :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < -\frac{2\pi}{3} \\ x + \frac{2\pi}{3}, & -\frac{2\pi}{3} < x < 0 \\ x, & 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

- b) ¿Cuál es el valor de la serie de Fourier para esta función, cuando $x = k\pi$, siendo k un entero? ¿Cuándo $x = (4k + 1)\left(\frac{\pi}{3}\right)$, siendo k un entero?

57. a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

y trazar la gráfica de la serie obtenida.

- b) Usar esta serie para demostrar que $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

58. a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

y trazar la gráfica de la serie obtenida.

- b) Usar esta serie para demostrar que : $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

59. a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos \alpha x$, $-\pi < x < \pi$, para cualquier número real α .

- b) Usar esta serie para demostrar que : $\cot \alpha\pi = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{k^2 - \alpha^2} \right]$ siempre que α no sea un entero. Justificar la validez de los cálculos.

60. Sean $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ y $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ respectivamente, el desarrollo en serie de Fourier de las funciones f y g en $PC[-\pi, \pi]$. Demostrar que la serie:

$$\frac{\alpha a_0 + \beta A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha a_k + \beta A_k) \cos kx + (\alpha b_k + \beta B_k) \sin kx]$$

es el desarrollo en serie de Fourier de la función $\alpha f + \beta g$ para cualquier par de números reales α y β .

61. Encontrar los desarrollos en series de Fourier de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{\pi}, \quad -\pi < x < \pi$$

Luego, usando estas series y el ejercicio anterior, encontrar el desarrollo en serie de Fourier de las siguientes funciones:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -\pi < x < 0 \\ -\frac{1}{2}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ -x + 2\pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

62. a) Encontrar las extensiones par e impar de cada una de las siguientes funciones en $PC[0, \pi]$, y trazar sus gráficas en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

- 1) $f(x) = 1$
- 2) $f(x) = x^2$
- 3) $f(x) = \pi - x$
- 4) $f(x) = e^x$

b) Trazar las gráficas de las series de Fourier de coseno y de seno para cada una de las funciones en a).

63. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de seno de la función $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, y usar este resultado para deducir que :

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \dots$$

64. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de coseno de la función $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, y trazar la gráfica de esta serie.

65. Encontrar los desarrollos en serie de Fourier de seno de las funciones :

a) $f(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$

b) $f(x) = x^2 - \pi x$, $0 < x < \pi$

66. a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de coseno de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, \quad y$$

trazar la gráfica de esta serie.

b) Usar la serie obtenida en a) para probar que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

67. Sea f continua por tramos en $]-\infty, \infty[$, y periódica de período $2p$. Muestre que :

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_b^{b+2p} f(x)dx$$

para todo par de números reales a y b .

68. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función en $PC[-2, 2]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ |x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Además, trazar la gráfica de la serie.

69. Encuentre el desarrollo en serie de Fourier de la función en $PC[1, 3]$ definida por :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 1 < x < 2 \\ x - 2, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

70. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de $\sin x$ como una función en $PC\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, y trazar la gráfica de la serie.

71. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de $\cos x$ como una función en $PC\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, y trazar la gráfica de la serie.

72. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 8 < x < 9 \\ 10 - x, & 9 < x < 10 \end{cases}$$

73. Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de la función :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 2 < x < 3 \\ 4 - x, & 3 < x < 4 \\ x - 4, & 4 < x < 5 \\ 1, & 5 < x < 6 \end{cases}$$

74. Encontrar una serie de Fourier que contenga solamente término seno y que converja por puntos a la función $x - 1$ para $1 < x < 2$.

75. Sea f una función en $PC[-\pi, \pi]$ con la serie de Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Demostrar que : $\int_{-\pi}^x f(t) dt = \frac{a_0(x + \pi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sin kx - b_k (\cos kx - \cos k\pi)}{k}$ para $-\pi < x < \pi$

76. Partiendo de la serie : $\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$, $-\pi < x < \pi$, usar el teorema de integración para demostrar que :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}, \quad \text{y que}$$

$$\frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2 x}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin kx}{k^3}$$

para $-\pi < x < \pi$. Ver ejercicios 57b) y 58b).

77. Encuentre los valores propios y las funciones propias de los siguientes problemas de Sturm-Liouville:

- $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y(L) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y(L) = 0$
- $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$

78. Encontrar un problema de Sturm-Liouville cuyas funciones propias son: $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$

79. Encontrar un problema de Sturm-Liouville cuyas funciones propias son: $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n \in \mathbb{N}$.

80. Encontrar una serie de Fourier que contenga solamente términos seno y que converja puntualmente a la función $f(x) = x$ para $0 < x < 2$.

81. Encontrar una serie de Fourier que contenga solamente términos coseno y que converja puntualmente a la función $f(x) = x$ para $0 < x < 2$.

82. Demostrar que para $0 \leq x \leq \pi$ se cumple :

$$a) \quad x \cdot (\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right).$$

$$b) \quad x \cdot (\pi - x) = \frac{8}{\pi} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^3} + \dots \right)$$

83. Usar el problema anterior para demostrar que:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

84. Desarrollar

$$f(x) \begin{cases} x, & 0 < x < 4 \\ 8 - x, & 4 < x < 8 \end{cases}$$

en una serie de:

a) senos.

b) cosenos.

85. Representar las siguientes funciones por medio de una serie de Fourier senoidal, y trazar las gráficas de las series encontradas.

$$a) \quad f(x) = x, \quad 0 < x < \pi$$

$$b) \quad f(x) = x^3, \quad 0 < x < \pi$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

86. Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales parciales como elíptica, hiperbólica o parabólica.

$$a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 2x - 3y$$

$$b) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$c) \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$d) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$e) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

87. Encontrar la deflexión $u(x, t)$ de la cuerda vibrante (longitud $L = \pi$, extremos fijos, y $c^2 = T/\rho = 1$), correspondiente a velocidad inicial cero y deflexión inicial dada por :

a) $\text{sen } x$

b) $k \text{sen } 3x$

c) $k(\text{sen } x - \text{sen } 2x) + \text{sen } 7x$

d) $k(\pi x - x^2)$

e) $k \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^4 \right]$

f) $k(\pi^2 x - x^3)$

g) $k(\text{sen } 4x + \text{sen } 7x) + \text{sen } 10x$

(k es una constante).

88. Encontrar la deflexión $u(x, t)$ de la cuerda vibrante (longitud $L = \pi$, extremos fijos, $c^2 = 1$) si la deflexión inicial $f(x)$ y la velocidad inicial $g(x)$ son :

a) $f = 0$, $g(x) = \text{sen } 2x$

b)

$$f = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 0,01x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0,01(\pi - x) & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

c) $f(x) = 0,1 \text{sen } x$, $g(x) = \text{sen } 2x$

89. En cada caso, encontrar la solución $u(x, t)$ de la ecuación unidimensional de onda sobre el intervalo $[0, L]$ sujeto a las condiciones en la frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$ y a las condiciones iniciales dadas.

a) $u(x, 0) = \text{sen } \frac{n\pi}{L} x$, $u_t(x, 0) = 0$

b) $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \text{sen } \frac{n\pi}{L} x$

c) $u(x, 0) = x(L - x)$, $u_t(x, 0) = 0$

d) $u(x, 0) = \sum_{n=1}^N A_n \text{sen } \frac{n\pi}{L} x$, $u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^N B_n \text{sen } \frac{n\pi}{L} x$

90. Determinar la temperatura $u(x, t)$ en una varilla de plata de sección transversal constante y material homogéneo (con $L = 10$, $\rho = 10,6$, $K = 1,04$, $\sigma = 0,056$) que está perfectamente aislada en toda su superficie lateral, sus extremos se mantienen a la temperatura cero, y su temperatura inicial es $f(x)$, donde:

- a) $f(x) = \text{sen}(0,1\pi x)$
 b) $f(x) = \text{sen}(0,2\pi x)$
 c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 5 \\ 10 - x, & 5 < x < 10 \end{cases}$
 d) $f(x) = x(10 - x)$

91. Considere la ecuación unidimensional del calor con las condiciones $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$. Demostrar que el método de separación de variables proporciona la solución:

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \text{ donde :}$$

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

A continuación, encontrar la solución $u(x,t)$ si $L = \pi, c = 1$, y

- a) $f(x) = 1$
 b) $f(x) = 0,5 \cos 2x$
 c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

92. En cada caso, encontrar la solución $u(x,t)$ de la ecuación unidimensional del calor, la cual satisface las condiciones dadas.

a)

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad ; \quad u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ L - x, & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

- b) $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad ; \quad u(x,0) = k \text{sen} \frac{\pi x}{L}$, k una constante.
 c) $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad ; \quad u(x,0) = x(L - x)$
 d) $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \quad ; \quad u(x,0) = k \text{sen} \frac{\pi x}{L}$, k una constante.

93. Aplicando el método de separación de variables, resolver cada uno de los siguientes problemas.

- a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}$, $u(0,y) = 8e^{-3y}$
 b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}$, $u(0,y) = 8e^{-3y} + 4e^{-5y}$
 c) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial y} + u$, $u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

- d) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_x(0, t) = 0$, $u(2, t) = 0$, $u(x, 0) = 8 \cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - 6 \cos\left(\frac{9\pi}{4}x\right)$
- e) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 2u$, $u(x, 0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$
- f) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
- g) $\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \text{sen}^3 x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
- h) $\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & a < x < b, t > 0 \\ u(a, t) = u(b, t) = 0 \\ u(x, 0) = (x - a)(b - x) \end{cases}$
- i) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, \pi) = 0 \\ u(x, 0) = x^2(\pi - x) \end{cases}$

94. Encontrar la solución mediante separación de variables de la ecuación de onda:

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0; \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

donde :

- a) $f(x) = \text{sen}^3 x$, $g(x) = 0$
 b) $f(x) = 0$, $g(x) = x \text{sen} x$
 c) $f(x) = \text{sen}^3 x$, $g(x) = x \text{sen} x$

95. Encontrar la solución mediante separación de variables para la ecuación de onda:

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

donde :

- a) $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = 0$
 b) $f(x) = 0$, $g(x) = x^2(\pi - x)^2$

96. Encontrar la solución del problema $u_{xx} = u_t$ (ecuación del calor), $0 < x < \pi$, $t > 0$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$, con

- a) $f(x) = \text{sen}(3x)$
 b) $f(x) = \text{sen}(x) + 3 \text{sen}(2x)$
 c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

97. Encontrar soluciones $u(x, y)$ de las ecuaciones siguientes, separando variables.

a) $u_x - u_y = 0$

b) $u_x + u_y = 0$

c) $u_x - yu_y = 0$

d) $u_x + u_y = 2(x + y)u$

e) $u_{xy} - u = 0$

98. a) Solucionar la ecuación: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$

b) Encontrar la solución particular para la cual $z(x, 0) = x^2$, $z(1, y) = \cos y$

99. Resolver : $t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = x^2$

100. a) Resolver $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

b) Encontrar la solución particular para la cual $z(x, 0) = x^5 + x - 68/x$,
 $z(2, y) = 3y^4$

101. Resolver el problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = 9 \cdot u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 2 \operatorname{sen}(x) + 3 \operatorname{sen}(5x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = \operatorname{sen}(5x) + 4 \operatorname{sen}(6x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variable. Detallar cada paso del procedimiento.

102. Resolver el problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4 \cdot u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 1 + 2 \cos(3x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables. Detallar cada paso del procedimiento.

103. Utilizando el método de separación de variables, resolver los siguientes problemas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

donde:

- a) $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x - 6 \operatorname{sen} 7x$, $g(x) = 0$
 b) $f(x) = \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen} 3x$, $g(x) = 3 \operatorname{sen} 2x - 4 \operatorname{sen} 5x$
 c) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 2x$, $g(x) = \operatorname{sen} 2x + 3 \operatorname{sen} 6x$
 d) $f(x) = \pi^2 x - x^3$, $g(x) = 0$

104. Resolver:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & 0 < x < 5, t > 0 \\ y(0, t) = y(5, t) = 0, & t > 0 \\ y(x, 0) = 0 & 0 < x < 5 \\ y_t(x, 0) = 5 \operatorname{sen}(\pi x), & 0 < x < 5 \end{cases}$$

105. Resolver el problema:
$$\begin{cases} u_{xx} = 4u_t, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 1 + 7 \cos(2\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

106. Aplicando el método de separación de variables, resolver el problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = 9 \cdot u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 2 + \cos(x) + 3 \cos(5x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

107. Escriba cada una de las siguientes funciones complejas f en la forma $f = u + iv$ donde u y v son funciones reales de (x, y) . Además, determine donde f es continua.

- a) $f(z) = z^2 + 2z$
 b) $f(z) = \frac{z^2 + 6}{z^2 - 3z + 2}$
 c) $f(z) = e^{7z}$
 d) $f(z) = \tan z$
 e) $f(z) = \cos z + \operatorname{sen}(2z)$

108. Derive cada una de las siguientes funciones complejas:

- a) $w = z^3 + 5z + 1$
 b) $w = [1 + (z^2 + 1)^3]^7$
 c) $w = \frac{2z - i}{z + 2i}, z \neq -2i$
 d) $w = \frac{z^4 + z}{z^3 + 4z}, z \neq 0, 2i, -2i$
 e) $w = \operatorname{sen} z$
 f) $w = \tan z$

109. En cada caso, determinar si f es o no analítica en su dominio. Justifique adecuadamente su respuesta.

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + y(3x^2y + 3xy^2)$ (Resp.: No)

b) $f(x, y) = 3x + 5y + i(3y - 5x)$ (Resp.: Sí)

c) $f(x, y) = x^2 + iy^3$ (Resp.: No)

d) $f(z) = z + \bar{z}$ (Resp.: No)

(Recuerde que si $z = x + iy$ entonces $\bar{z} = x - iy$)

e) $f(x) = \frac{z^2 + 2}{z - 6}$ (Resp.: Si, siendo $\text{Dominio}(f) = \mathbb{C} - \{6\}$)

f) $f(z) = z|z|$ (Resp.: No)

110. Evalúe:

a) $\int_C z^2 \operatorname{sen} z dz$ sobre la elipse $C : x^2 + 2y^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario.

b) $\int_C ze^z dz$ sobre el segmento de recta C que va desde 1 hasta $2i$.

c) $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2} dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 3$, en sentido horario.

d) $\int_C \frac{\operatorname{sen} 3z}{z + \pi/2} dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 5$, en sentido antihorario.

e) $\int_C \frac{e^{2z}}{(z + 1)^4} dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 3$, en sentido horario.

111. Calcular las siguientes integrales, mediante los **residuos** :

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{(1 + x^4)^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2(x^2 + 9)} dx$

d) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$

f) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 - 2 \cos t + \operatorname{sen} t)} dt$

g) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \operatorname{sen} t} dt$, para $a > |b|$.

- h) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos t)^2} dt$, para $0 < b < a$.
- i) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3t}{1 - 2a \cos t + a^2} dt$, para $0 < a < 1$.
- j) $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{a + b \cos t} dt$, para $0 < b < a$.