Auxiliar 9 - Teoremas límite y convergencias

Cátedra: Probabilidades
Profesor: Alejandro Maass S.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Gonzalo Contador

15 de noviembre, 2010

1. Sea X una v.a. con media 0 y varianza finita σ^2. Demostrar que:

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}\left[X \geq a\right] \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

2. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de v.a.'s independientes que convergen en probabilidad a X. Demostrar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $X = c$, casi seguramente.

3. Sea $A_n(\epsilon) = \{|X_n - X| > \epsilon\}$ y $B_m(\epsilon) = \bigcup_{n \geq m} A_n(\epsilon)$. Demostrar que:

   a) $X_n \xrightarrow{c.s.} X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \mathbb{P}(B_m(\epsilon)) \to 0$,

   b) $X_n \xrightarrow{c.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, pero el converso es falso.

4. Suponer que ocurren catástrofes a tiempos $T_1, T_2, \ldots$, con:

$$T_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

   donde $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son v.a.'s i.i.d. positivas. Se define el número de catástrofes que han ocurrido al tiempo t como:

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}.$$

   Probar que si $\mathbb{E}(X_1) < \infty$ y $t \to \infty$, entonces:

   a) $N(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$,

   b) $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)}$.

5. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.'s independientes absolutamente continuas con densidad uniforme en el intervalo $[0,1]$. Dado $[a,b] \subseteq [0,1]$, probar que:

$$Y^{(N)} := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1_{[a,b]}(X_n) \xrightarrow{c.s.} (b-a),$$

   cuando $N \to \infty$. Luego, suponer que $a = 0,\ b = \frac{1}{2}$ y encontrar un valor $N \in \mathbb{N}$ de modo que: $\mathbb{P}\left(\left|Y^{(N)} - \frac{1}{2}\right| \leq 0{,}05\right) \geq 0{,}95$.