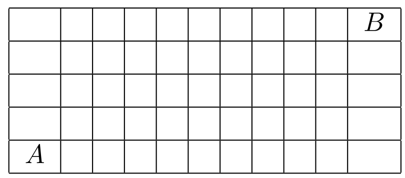
Probabilidades y Estadística MA3403

Profesor de Cátedra : Roberto Cortez M.
Profesor Auxiliar : Víctor Carmi L.
Darío Cepeda G.

Viernes 24 de Septiembre del 2010

Clase Auxiliar 6

1. Considere un tablero de M por N, hay que desplazarse desde el casillero A hasta el casillero B. ¿De cuántas formas se puede hacer esto con desplazamientos hacia arriba y hacia la derecha de un casillero a la vez?



Solución:
Se tienen que realizar $M-1$ movimientos hacia arriba, y $N-1$ movimientos hacia la derecha, lo que da un total de $M+N-2$ movimientos, lo que se desea es encontrar el número de formas en que se pueden realizar estos movimientos, y eso es el número de formas en que de entre los $M+N-2$ totales podemos escoger cuales son los $M-1$ hacia arriba:

$$\binom{M+N-2}{M-1}$$

2. *a*) Probar que si A es un evento, el cual es independiente de sí mismo, entonces $\mathbb{P}(A)=0$ ó $\mathbb{P}(A)=1$.

   b) Probar que si A y B son independientes, entonces A^c y B^c también lo son.

Solución:

a)

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap A)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A)^2$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A)^2$$

Resolviendo la ecuación en $\mathbb{P}(A)$, obtenemos $\mathbb{P}(A)=0$ ó $\mathbb{P}(A)=1$

b)
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c\cap B^c) &= \mathbb{P}((A\cup B)^c)\\
&= 1-\mathbb{P}(A\cup B)\\
&= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)\\
&= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\
&= 1-\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))-\mathbb{P}(B)\\
&= (1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B))\\
&= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}$$

3. Un acusado se presenta a un jurado de 12 personas por el cargo de estafa al fisco. La probabilidad de que él haya hecho la estafa es α. Para ser declarado culpable, por lo menos 8 de los 12 jurados deben votar culpable, y en caso contrario el acusado es declarado inocente. Si cada uno de los jurados actua de forma independiente, y cada uno toma la decisión correcta con probabilidad θ, ¿cuál es la probabilidad de que el jurado termine tomando una decisión justa?

Solución:

Denotemos los eventos:
C: Culpable.
I: Inocente.
J_C: El jurado dice culpable.
J_I: El jurado dice inocente.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Justa) &= \mathbb{P}(Justa|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(Justa|I)\mathbb{P}(I)\\
&= \mathbb{P}(J_C|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(J_I|I)\mathbb{P}(I)\\
&= \mathbb{P}(J_C|C)\alpha + \mathbb{P}(J_I|I)(1-\alpha)\\
&= \sum_{i=8}^{12}\binom{12}{i}\theta^i(1-\theta)^{12-i}\alpha + \sum_{i=5}^{12}\binom{12}{i}\theta^i(1-\theta)^{12-i}(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

4. Si $K \to U(0,5)$. Calcular la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4Kx + K + 2 = 0$:

   a) Sean reales.

   b) Sean iguales.

   Solución:

   Calculemos el determinante:
   $b^2 - 4ac = 16K^2 - 16(K+2) = 16K^2 - 16K - 32$
   Las raíces en K son -1 y 2.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Reales) = \mathbb{P}(16K^2 - 16K - 32 \geq 0) = \mathbb{P}(K \leq -1 \cup K \geq 2) = \mathbb{P}(K \geq 2) = \frac{3}{5}$$

   La probabilidad de que sean iguales es 0 porque es la probabilidad de que una variable aleatoria continua toma valores discretos.

5. Considere las letras de la plabra $MISSISSIPI$. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras tal que no queden dos I juntas?

6. Sean $X \sim exp(\lambda)$ e $Y \sim exp(\gamma)$ independientes. Encuentre la distribución de probabilidad de $Z = min\{X,Y\}$
   Solución:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \geq t) &= \mathbb{P}(X \geq t \cap Y \geq t)\\
&= \mathbb{P}(X \geq t)\mathbb{P}(Y \geq t)\\
&= e^{-\lambda t}e^{-\gamma t}\\
&= e^{-(\lambda+\gamma)t}
\end{aligned}
$$

   Usamos en la tercera igualdad:

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda t}$$

   Luego

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = 1 - e^{-(\lambda+\gamma)t}$$

$$\Rightarrow f_Z(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}(Z \leq t) = (\lambda+\gamma)e^{-(\lambda+\gamma)t}$$

   Por lo tanto $Z \sim exp(\lambda+\gamma)$

7. Los antecedentes de un curso son que el 50 % de los alumnos asistió a todas las clases, el 30 % solo asistió a las clases de combinatoria, y el 20 % a ninguna. Suponga que la asistencia implica saber la materia con certeza y la inasistencia es saber nada. La prueba consiste de 5 preguntas de combinatoria y 5 preguntas de probabilidades condicionales, cada una con 5 alternativas. Si un alumno no sabe alguna pregunta, elige su respuesta al azar.

   a) Un alumno contesta correctamente una pregunta de combinatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sabido toda la materia?

   b) Un alumno contesta correctamente las 10 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que merezca el 7?

8. X v.a, considere $a \in \mathbb{R}$ y la matriz :

$$A = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{n}(X-i)+a & aX \\ 1 & X \end{pmatrix}$$

Encuentre la probabilidad de que A sea invertible en los casos :

- $X \sim geometrica(p)$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$