Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-4 Probabilidades y Estadística, Primavera 2010

Roberto Cortez
Víctor Carmi
Darío Cepeda

Pauta Control # 2

P1. *a)* Sea X la variable aleatoria del monto de beca asignado. Ésta sólo toma los valores 60, 30, 15 y 0, correspondientes al 100 %, 50 %, 25 % y 0 % de \$60, respectivamente. Luego, X es una variable discreta, por lo cual su esperanza se calcula como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k\in R_X} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= 60\mathbb{P}(X=60)+30\mathbb{P}(X=30)+15\mathbb{P}(X=15)+0\mathbb{P}(X=0)\\ &= 60\mathbb{P}(25\le Y<50)+30\mathbb{P}(50\le Y<80)+15\mathbb{P}(80\le Y<100)\end{aligned}$$

donde Y es la variable aleatoria de ingreso per cápita de la familia, la cual sabemos que se distribuye uniformemente en el intervalo $[25,175]$. Por lo tanto:

$$\mathbb{E}(X)=60\cdot\frac{50-25}{150}+30\cdot\frac{80-50}{150}+15\cdot\frac{100-80}{150}=\frac{1}{150}(1500+900+300)=18.$$

Luego, el valor esperado de la beca asignada es de \$18.

b) Usaremos el método del jacobiano. Se tiene que $UV=XY\cdot X/Y=X^2$ y $V/U=\frac{XY}{X/Y}=Y^2$, por lo cual la función inversa de la transformación es

$$g^{-1}(u,v)=(\sqrt{uv},\sqrt{v/u})$$

(no hay problemas con la raíz, pues X e Y son variables positivas). El módulo del determinante del jacobiano de esta transformación es:

$$|\det Dg^{-1}(u,v)|=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\\ -\frac{\sqrt{v}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}}\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{4u}+\frac{1}{4u}\right|=\frac{1}{2u}.$$

Por otro lado, como X e Y son exponenciales de parámetro 1 independientes, se tiene que $f_{X,Y}(x,y)=e^{-x}e^{-y}$ para $x,y>0$. Así, aplicando la fórmula que entrega el método del jacobiano, tenemos:

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(g^{-1}(u,v))|\det Dg^{-1}(u,v)|=e^{-\sqrt{uv}}e^{-\sqrt{v/u}}\frac{1}{2u}=\frac{e^{-(1/\sqrt{u}+\sqrt{u})\sqrt{v}}}{2u}.$$

Lo anterior vale para $u,v>0$. Sin embargo, como X e Y son positivas, también lo serán $U=X/Y$ y $V=XY$, por lo tanto la densidad conjunta de U y V valdrá 0 al evaluarla en $u<0$ ó $v<0$.

P2. *a)* 1) De la figura, es directo ver que el área de A es 3. Calculemos la densidad marginal de X en un $x\in[-1,1]$:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}\mathbb{1}_A(x,y)dy=\frac{1}{3}\int_{|x|-1}^{1}dy=\frac{2-|x|}{3},$$

donde los límites de integración se obtienen al examinar la figura. Para $x\notin[-1,1]$ es claro que la densidad es 0. Luego, $f_X(x)=\frac{2-|x|}{3}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Similarmente para la densidad de Y en un $y\in[-1,1]$:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}\mathbb{1}_A(x,y)dx=\frac{1}{3}\int_{-\min(1,1+y)}^{\min(1,1+y)}dx=\frac{2\min(1,1+y)}{3}.$$

Como antes, la densidad es 0 para $y\notin[-1,1]$, luego $f_Y(y)=\frac{2\min(1,1+y)}{3}\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$.

2) Se tiene que f_X es simétrica con respecto al origen, por lo cual se tendrá que $\mathbb{E}(X) = 0$. Además, usando una propiedad de la covarianza, y la indicación, tenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} xyf_{X,Y}(x,y) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} xy\frac{1}{3}\mathbb{1}_A(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\int_{|x|-1}^{1} xydydx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x\left(\frac{1}{2} - \frac{(|x|-1)^2}{2}\right)dx.
\end{aligned}$$

El integrando es una función impar, la cual se está integrando entre -1 y 1, por lo cual se obtiene cero. Es decir, $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

3) A pesar de que $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, es fácil ver que X e Y no son independientes. Esto se intuye al notar que si $Y \geq 0$, entonces X puede tomar valores en todo el intervalo $[-1,1]$, mientras que si $Y < 0$, entonces X tiene un rango menor de posibles valores. Una forma más concreta de ver que no son independientes es notar que el producto de las densidades no es igual a la densidad conjunta. En efecto: para $x = 1$ e $y = -1/2$, se tiene que $f_{X,Y}(x,y) = 0$, mientras que $f_X(x)f_Y(y) = (1/3)\cdot(1/3) = 1/9 > 0$.

b) Podemos suponer que las cartas de cada mazo están numeradas de 1 a n. Para cada $i = 1,\ldots,n$, sea E_i el evento en que la carta i es escogida por A y B. Si X denota la cantidad de cartas que fueron escogidas por ambas personas, es directo que

$$X = \mathbb{1}_{E_1} + \cdots + \mathbb{1}_{E_n},$$

y entonces, por linealidad de la esperanza, se tiene que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_1}) + \cdots + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_n}) = \mathbb{P}(E_1) + \cdots + \mathbb{P}(E_n),$$

donde $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_i}) = \mathbb{P}(E_i)$ porque $\mathbb{1}_{E_i}$ es una variable de Bernoulli. Además, E_i ocurre cuando la persona A extrae la carta i (lo cual tiene probabilidad k_A/n) y la persona B también (probabilidad k_B/n), es decir, $\mathbb{P}(E_i) = k_Ak_B/n^2$ para todo i. Obtenemos entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k_Ak_B}{n^2} + \cdots + \frac{k_Ak_B}{n^2} = \frac{k_Ak_B}{n}.$$

P3. *a*) Calculemos:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{2b}e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}dx = \frac{e^{\mu t}}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}e^{-\frac{|y|}{b}}dy,$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo el cambio de variable $y = x - \mu$. Separando la integral en los rangos en que y es negativa y positiva, obtenemos:

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{2b}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(t+\frac{1}{b})y}dy + \int_{0}^{\infty} e^{(t-\frac{1}{b})y}dy\right) = \frac{e^{\mu t}}{2b}\left(\left.\frac{e^{(t+\frac{1}{b})y}}{t+\frac{1}{b}}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(t-\frac{1}{b})y}}{t-\frac{1}{b}}\right|_{0}^{\infty}\right).$$

Por lo tanto, la primera integral converge cuando $t > -1/b$, y la segunda converge cuando $t < 1/b$. Es decir, $M_X(t)$ está bien definida cuando $|t| < 1/b$. Para un tal t, se tiene entonces:

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{2b}\left(\frac{1}{t+\frac{1}{b}} - \frac{1}{t-\frac{1}{b}}\right) = \frac{e^{\mu t}}{1-b^2t^2}.$$

b) Derivando la f.g.m. y evaluando en 0:

$$M_X'(t) = \left(\frac{e^{\mu t}}{1-b^2t^2}\right)' = \frac{\mu e^{\mu t}(1-b^2t^2)+2b^2te^{\mu t}}{(1-b^2t^2)^2} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = M_X'(0) = \frac{\mu\cdot 1 - 0}{1} = \mu.$$

Derivamos nuevamente:

$$\begin{aligned} M_X''(t) &= \left(\frac{\mu e^{\mu t}(1-b^2t^2)+2b^2te^{\mu t}}{(1-b^2t^2)^2}\right)' \\ &= \frac{1}{(1-b^2t^2)^4}[(\mu^2e^{\mu t}(1-bt^2)-2b^2te^{\mu t}+2b^2e^{\mu t}+2bt\mu e^{\mu t})(1-b^2t^2)^2 \\ &\quad + 4(1-b^2t^2)b^2t(\mu e^{\mu t}(1-b^2t^2)+2b^2te^{\mu t})]. \end{aligned}$$

Evaluando en 0 para obtener el segundo momento de X, se obtiene:

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 = M_X''(0)-\mu^2 = 1\cdot[(\mu^2-0+2b^2+0)\cdot 1+0]-\mu^2 = \mu^2+2b^2-\mu^2 = 2b^2.$$

c) Sea $Y = |X|$. Calculemos su distribución acumulada en $y \geq 0$:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{2b}e^{\frac{-|x|}{b}}dx = 2\int_0^y \frac{1}{2b}e^{-\frac{x}{b}}dx,$$

donde la última igualdad se obtiene por la simetría del integrando. Derivando con respecto a y, y aplicando el teorema fundamental del Cálculo, se llega a que $f_Y(y) = (1/b)e^{-\frac{y}{b}}$. Sabiendo que $f_Y(y) = 0$ para $y < 0$ (pues Y es no-negativa), obtenemos:

$$f_Y(y) = \frac{1}{b}e^{-\frac{y}{b}}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y).$$

Es decir, $Y = |X|$ tiene distribución exponencial de parámetro $1/b$.

d) Calculemos las densidades de $U = \lambda_1 Y_1$ y $V = -\lambda_2 Y_2$:

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(\lambda_1 Y_1 \leq u) = \mathbb{P}(Y_1 \leq u/\lambda_1) = 1 - e^{-\frac{u}{\lambda_1}\lambda_1} = 1 - e^{-u},$$

lo cual vale para $u \leq 0$. Derivando, se obtiene que $f_U(u) = e^{-u}\mathbb{1}_{[0,\infty)}$. Similarmente para V:

$$F_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(-\lambda_2 Y_2 \leq v) = \mathbb{P}(Y_2 \geq -v/\lambda_2) = e^{-\frac{-v}{\lambda_2}\lambda_2} = e^v,$$

válido para $v \geq 0$. Derivando, se llega a $f_V(v) = e^v\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(v)$. Sea $Z = \lambda_1Y_1 - \lambda_2Y_2 = U+V$. Como U y V son independientes (pues Y_1 y Y_2 lo son), se tiene que la densidad de su suma es la convolución de sus densidades, es decir:

$$f_Z(z) = (f_U * f_V)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_U(z-w)f_V(w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-w)}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(z-w)e^w\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(w)dw$$

Se tiene que la primera indicatriz vale 1 si y sólo si $w \leq z$. Luego, el producto de las indicatrices valdrá 1 sólo cuando $w \leq \min(0,z)$. Con esto, se obtiene:

$$f_Z(z) = e^{-z}\int_{-\infty}^{\min(0,z)} e^{2w}dw = e^{-z}\left.\frac{1}{2}e^{2w}\right|_{-\infty}^{\min(0,z)} = \frac{1}{2}e^{-z+2\min(0,z)}.$$

Además:

$$-z + 2\min(0,z) = \begin{cases} -z & \text{si } z \geq 0 \\ z & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $-z+2\min(0,z) = -|z|$. Con esto se obtiene que $f_Z(z) = (1/2)e^{-|z|}$ para todo $z \in \mathbb{R}$, concluyendo que $Z = \lambda_1Y_1 - \lambda_2Y_2$ es una variable de Laplace con parámetros $\mu = 0$ y $b = 1$.

Observación: también es posible probar lo pedido demostrando que la f.g.m. de $Z = \lambda_1Y_1 - \lambda_2Y_2$ corresponde a $1/(1-t^2)$, y recordando que la f.g.m. caracteriza la distribución, por lo cual Z debe ser una variable de Laplace con parámetros $\mu = 0$ y $b = 1$.