Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-4 Probabilidades y Estadística, Primavera 2010

Roberto Cortez
Víctor Carmi
Darío Cepeda

Pauta Control # 3

P1. *a*) 1) El estimador del método de los momentos se obtiene igualando el primer momento real de la variable con el primer momento muestral:

$$\frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(X_1) = \bar{X},$$

obteniendo entonces $\hat{\lambda}_M = 1/\bar{X}$. El estimador de máxima verosimilitud se obtiene encontrando el λ que maximiza la verosimilitud de la muestra:

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}.$$

Lo anterior vale para $x_i \geq 0$. Derivando con respecto a λ e igualando a 0, obtenemos:

$$0 = n\lambda^{n-1} e^{-\lambda \sum x_i} - \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} \sum x_i.$$

Despejando λ, se llega a $\lambda = n/\sum x_i$, es decir, $\hat{\lambda}_{MV} = 1/\bar{X}$.

2) Ambos estimadores son iguales a $1/\bar{X}$. Por la ley fuerte de los grandes números, sabemos que $\bar{X}$ converge casi seguramente a la esperanza de la variable, $1/\lambda$ en nuestro caso, cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente. O equivalentemente, $1/\bar{X}$ converge casi seguramente a λ, que es lo que queríamos probar.

b) Los X_i siguen una $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con ambos parámetros desconocidos. Planteamos las hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \mu = 7 \\ H_1 : &\quad \mu < 7. \end{aligned}$$

Trabajamos con el estadístico

$$T = \frac{\bar{X} - 7}{s/\sqrt{n}},$$

el cual, bajo H_0, se distribuye como una t-student con $n - 1 = 24$ grados de libertad. Sabiendo que $\sum X_i = 172{,}508$ y $s = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2 = 1/5$, obtenemos que el valor que toma el estadístico T es:

$$\frac{\frac{172{,}508}{25} - 7}{\frac{1/5}{\sqrt{25}}} = \frac{\frac{172{,}508}{25} - 7}{1/25} = 172{,}508 - 25 \cdot 7 = 172{,}508 - 175 = -2{,}492.$$

El p-valor del test corresponde a la probabilidad, bajo H_0, de obtener un valor al menos tan extremo como el de la muestra. Usando la simetría de la distribución t-student y mirando una tabla, obtenemos:

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}(T \leq -2{,}492 | H_0) = \mathbb{P}(t_{24} \leq -2{,}492) = \mathbb{P}(t_{24} \geq 2{,}492) = 0{,}01$$

Es decir, el p-valor es de $1\,\%$. Para $\alpha = 5\,\%$, esto significa que debemos rechazar H_0, con lo cual se concluye que la máquina efectivamente está produciendo piezas con grosor inferior a 7 cm.

P2. *a*) Los datos corresponden a una m.a.s. proveniente de una variable Bernoulli con parámetro p desconocido, para el cual queremos encontrar un intervalo de confianza. Trabajamos con el estadístico

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}/\sqrt{n}},$$

donde $\hat{p}$ es la proporción observada de caras. Sabemos que Z sigue una distribución aproximadamente normal estándar, con lo cual imponemos:

$$90\,\% = \mathbb{P}(Z \in [-c, c]) \approx \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \in [-c, c]) = 1 - 2\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > c),$$

es decir, $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > c) = 5\,\%$. Mirando una tabla, obtenemos que $c = 1{,}65$ (también sirve $c = 1{,}64$). De acuerdo a los datos, $\hat{p} = 13/25$, con lo cual el intervalo queda:

$$\begin{gathered}
-c \leq Z \leq c \\
-c \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}/\sqrt{n}} \leq c \\
\hat{p} - c\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \hat{p} + c\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \\
\frac{13}{25} - 1{,}65\frac{\sqrt{\frac{13}{25}\frac{12}{25}}}{\sqrt{25}} \leq p \leq \frac{13}{25} + 1{,}65\frac{\sqrt{\frac{13}{25}\frac{12}{25}}}{\sqrt{25}} \\
\frac{13}{25} - \frac{1{,}65 \cdot \sqrt{156}}{125} \leq p \leq \frac{13}{25} + \frac{1{,}65 \cdot \sqrt{156}}{125}
\end{gathered}$$

b) Trabajamos con el estadístico

$$W = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2},$$

el cual sabemos que se distribuye como una $\chi^2_{n-1} = \chi^2_5$. Imponemos entonces:

$$90\,\% = \mathbb{P}(c \leq W \leq d) = 1 - \mathbb{P}(W < c) - \mathbb{P}(W > d).$$

Adicionalmente, imponemos simetría de las probabilidades, es decir, $5\,\% = \mathbb{P}(W < c) = 1 - \mathbb{P}(W \geq c)$ y $5\,\% = \mathbb{P}(W > d)$. Mirando una tabla, obtenemos $c = 1{,}145$ y $d = 11{,}07$. El intervalo queda:

$$\begin{gathered}
c \leq W \leq d \\
c \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq d \\
\frac{(n-1)s^2}{d} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{c} \\
\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{d} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{c} \\
\frac{0{,}14275}{11{,}07} \leq \sigma^2 \leq \frac{0{,}14275}{1{,}145}.
\end{gathered}$$

P3. *a*) Sea X la variable que denota el tiempo de espera de la micro.

1) X es una variable no-negativa. Aplicando la desigualdad de Markov:

$$\mathbb{P}(X \geq 15) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

2) Se tiene que:

$$X \geq 15 \Leftrightarrow X - 5 \geq 10 \Leftrightarrow |X - 5| \geq 10,$$

donde la última equivalencia se debe a que $X - 5$ no puede ser menor que -5, pues X es no-negativa, lo que en particular implica que $X - 5$ no puede ser menor que -10. Aplicando la desigualdad de Chebyshev, tenemos entonces:

$$\mathbb{P}(X \geq 15) = \mathbb{P}(|X - 5| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{10^2} = \frac{9}{100}.$$

3) Denotemos $X_1, \dots, X_n$ los tiempos de espera (en minutos) de los 36 días. Queremos calcular la probabilidad de que la suma de estos tiempos no cubra los 168 minutos de discografía, es decir, $\mathbb{P}(\sum X_i \leq 168)$. Si $\mu = 5$ y $\sigma^2 = 9$ son la esperanza y varianza de la variable, tenemos:

$$\mathbb{P}(\sum X_i \leq 168) = \mathbb{P}\left(\frac{\frac{\sum X_i}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\frac{168}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \approx \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \leq \frac{\frac{168}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right),$$

donde la última aproximación se debe al teorema del límite central. La cantidad a la derecha de la desigualdad anterior corresponde a:

$$\frac{\frac{168}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\frac{168}{36} - 5}{3/\sqrt{36}} = 2\frac{168 - 180}{36} = -\frac{24}{36} = -\frac{2}{3}.$$

Tenemos entonces:

$$\mathbb{P}(\sum X_i \leq 168) \approx \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq -2/3) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 0{,}666) = 0{,}2514,$$

donde la última igualdad se obtiene desde una tabla (también sirve 0,2546). Es decir, la probabilidad de no alcanzar a terminar la discografía es de 25,14 %.

b) La región de rechazo del test más potente se obtiene con el lema de Neyman-Pearson. La verosimilitud de la muestra es:

$$L(y;\theta) = \theta y^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

Luego, para $y \in (0,1)$, la región de rechazo buscada viene dada por la expresión:

$$\eta \geq \frac{L(y;\theta_0)}{L(y;\theta_1)} = \frac{\theta_0 y^{\theta_0-1}}{\theta_1 y^{\theta_1-1}} = \frac{1}{\theta_1 y^{\theta_1-1}}.$$

Despejando y, se obtiene $R = \{y : y \geq c\}$, donde $c = (\theta_1\eta)^{-1/(\theta-1)}$ es una constante. Ésta se determina imponiendo que el error tipo I valga α, es decir:

$$\alpha = \mathbb{P}(Y \in R|H_0) = \mathbb{P}(Y \geq c|H_0) = \int_c^1 \theta_0 y^{\theta_0-1} dy = \int_c^1 dy = 1 - c.$$

Luego, la región de rechazo del test más potente a nivel α es $R = \{y : y \geq 1 - \alpha\}$.