

MEDIDA E INTEGRACIÓN – EXAMEN

JAIME SAN MARTÍN, JULIO BACKHOF, OMAR LARRÉ
13 DE JULIO DEL 2009

P1. (4 puntos) La idea de este problema es probar el siguiente resultado. Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de probabilidad y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto uniformemente integrable (UI) en L^1 (en este problema todas las variables son a valores reales). Si $X_n \rightarrow X$ μ -c.t.p. entonces $X_n \rightarrow X$ en L^1 . Para ello estudiaremos el concepto de UI.

Definición. Un subconjunto $\mathcal{A} \subset L^1$ se dice UI si

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{Y \in \mathcal{A}} \int_{|Y| \geq a} |Y| d\mu = 0.$$

(1) (1 pt.) Pruebe que si $\mathcal{A} \subset L^1$ es UI entonces es acotado en L^1 es decir

$$C = \sup_{Y \in \mathcal{A}} \int |Y| d\mu < \infty.$$

Puede servirle considerar $a > 0$ suficientemente grande de manera que

$$\sup_{Y \in \mathcal{A}} \int_{|Y| \geq a} |Y| d\mu \leq 1,$$

y concluir que $C \leq a + 1$.

(2) (1 pt.) Pruebe que los singletons $\mathcal{A} = \{Y\} \subset L^1$ son UI. Más generalmente si $\mathcal{A} \subset L^1$ es un conjunto finito, pruebe que es UI.

(3) (1 pt.) Pruebe que los conjuntos acotados en L^2 son UI. Es decir si $\mathcal{A} \subset L^1$ satisface

$$K = \sup_{Y \in \mathcal{A}} \int |Y|^2 d\mu < \infty$$

entonces es UI.

Pruebe primero que si $a > 0$ entonces $\sup_{Y \in \mathcal{A}} \mu(|Y| \geq a) \leq \frac{K}{a^2}$. También le puede ser útil

pensar que $\int_{|Y| \geq a} |Y| d\mu = \int \mathbf{1}_{|Y| \geq a} |Y| d\mu.$

(4) (1 pt.) Si \mathcal{A} está dominado en L^1 , es decir existe $Z \in L^1$ tal que

$$\forall Y \in \mathcal{A} \quad |Y| \leq Z \quad \mu\text{-c.t.p.},$$

entonces \mathcal{A} es UI.

En lo que sigue supondremos que $\mathcal{A} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L^1$ es UI y converge μ -c.t.p a X . Definiremos $C = \sup_n \int |X_n| d\mu < \infty$.

(5) (2 pt.) Use Fatou para probar que $X \in L^1$.

(6) (2 pt.) Para cada $a > 0$ fijo, pruebe que $|X_n - X| \mathbf{1}_{|X_n| \leq a} \rightarrow 0$ en L^1 .

(7) (2 pt.) Para cada $a > 0$ fijo pruebe que

$$\sup_n \mu(|X_n| > a) \leq \frac{C}{a}$$

es decir los conjuntos $\{|X_n| > a\}$, para a grande, tienen medida uniformemente pequeña.

(8) (2 pt.) Concluya que $X_n \rightarrow X$ en L^1 . Le puede ser útil pensar en tomar $a > 0$ grande, pero fijo y usar

$$\int |X_n - X| d\mu \leq \int_{|X_n| \leq a} |X_n - X| d\mu + \int_{|X_n| > a} |X_n| d\mu + \int_{|X_n| > a} |X| d\mu.$$

P2. (2 puntos) Fijemos $a \in \mathbb{R}$ y considere la siguiente colección de medidas de probabilidad. Para $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tomemos μ_{t_1, \dots, t_n} como aquella medida de probabilidad definida en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ dada por la densidad, con respecto a la medida de Lebesgue $dx_1 \dots dx_n$,

$$q_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n p(\Delta_k, x_{k-1} + a\Delta_k, x_k), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

con

$$x_0 = t_0 = 0$$

$$\Delta_k = t_k - t_{k-1}$$

$$p(s, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2s}(y-x)^2}, \quad s > 0, x, y \in \mathbb{R}.$$

Pruebe que existe una única medida de probabilidad \mathbb{P} definida en $(\mathbb{R}^{(0, \infty)}, \mathcal{B}^{(0, \infty)})$ tal que para $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ se tiene

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1 \times \dots \times A_n} q_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

donde $X_t : \mathbb{R}^{(0, \infty)} \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección de la coordenada t , es decir $X_t(\omega) = \omega(t)$. ¿Cuál es la distribución de X_t ?

TIEMPO 3:30 hrs.