

Control 1 Análisis II

Mayo 1997

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Joaquín Fontbona
Auxiliar: Fernando Schwartz

Pregunta 1. Sean $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $T : \Omega \rightarrow \Omega$ una función biyectiva bi-medible tal que $T\mu = \mu$, es decir $\forall A \in \mathcal{B}, \mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

(1) Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes.

(a) $\forall f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} f \circ T^n g \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu \int_{\Omega} g \, d\mu$$

(b) $\forall A, B \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{S}$, donde \mathcal{S} es una semi-álgebra que genera \mathcal{B} ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Indicación: Para (c) \Rightarrow (b), puede mostrar que

$$\mathcal{B}_B = \{A \in \mathcal{B} \mid \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)\}$$

es clase monótona, donde $B \in \mathcal{S}$.

(2) Suponga que $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, \mathcal{B} es la sigma álgebra producto y μ sobre cada cilindro $C = [i_{k_0}, \dots, i_{k_l}]_t$ se calcula como $\mu(C) = \pi_0^{l+1 - \sum_{j=0}^l i_{k_j}} \cdot \pi_1^{\sum_{j=0}^l i_{k_j}}$, donde $\pi_0, \pi_1 \in (0, 1)$, $\pi_0 + \pi_1 = 1$. Use la parte (1) para probar que en este caso si $B \in \mathcal{B}$ satisface $T^{-1}(B) = B$ entonces $\mu(B) = 0$ o bien $\mu(B) = 1$.

Problema 2. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Probar que si $f \in L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \left| \int_{\Omega} f \cdot g \, d\mu \right| \mid \|g\|_q \leq 1 \right\},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Además si μ satisface la propiedad siguiente:

$$\forall A \in \mathcal{B}, (\mu(A) > 0 \Rightarrow \exists B \subseteq A, B \in \mathcal{B}, 0 < \mu(B) < \infty);$$

entonces la propiedad es cierta para $p = \infty$.

Problema 3.

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas que convergen puntualmente a $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Probar que si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu,$$

entonces f_n converge a f en $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Indicación: descomponer $f_n - f = g_n^+ - g_n^-$.

Tiempo: 3 horas