

Intégration et analyse hilbertienne
Épreuve hors classement
durée 2 heures

Documents autorisés : cours photocopié et notes personnelles.

Les quatre exercices sont indépendants. Il est toujours possible de répondre à une des questions d'un exercice en admettant le résultat des questions antérieures.

On peut avoir la note maximum sans résoudre l'exercice 4.

Exercice 1. On pose $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$. On le munit de la σ -algèbre des boréliens et de la mesure d'équiprobabilité P .

a) Soit T l'application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$T(\omega) = \inf\{k; \omega_k = 0 \text{ et } \omega_{k+1} = 1\}.$$

s'il existe un tel k et par $T(\omega) = +\infty$ sinon. Montrer que T est mesurable.

b) Soit A_n l'ensemble des ω tels que $T(\omega) = n$. Calculer $P(A_1)$ et $P(A_2)$.

c) Démontrer que l'on a $P(A_n) = \frac{n}{2^{n+1}}$. (On pourra écrire A_n comme réunion de n ensembles du type C_s .)

d) Démontrer que $\{\omega \mid T(\omega) = +\infty\}$ est un ensemble dénombrable et déterminer la mesure image T_*P .

Exercice 2. On se donne une fonction f sommable sur \mathbb{R} et on pose

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x+y}{1+(x-y)^2} f(y) dy \quad (*)$$

a) Montrer que l'on a

$$\frac{|x+y|}{1+(x-y)^2} \leq 1 + 2|x|$$

quels que soient x et y .

b) Démontrer que la fonction g est définie et continue en tout point $x \in \mathbb{R}$.

c) Démontrer que la fonction h définie par $h(x) = g(x)/(1+2|x|)$ est sommable sur \mathbb{R} . Démontrer que l'application qui à (la classe de) f fait correspondre (la classe de) h est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

d) Démontrer que la fonction g est dérivable en tout point de \mathbb{R} .

e) On suppose maintenant que f est de carré sommable sur \mathbb{R} . Montrer que la formule (*) définit encore $g(x)$ en tout point x et qu'il existe une constante C telle que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)| \leq C(1 + |x|).$$

Exercice 3. On note λ la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d . Soit φ une fonction continue et positive de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . On pose $A_t = \{x \mid \varphi(x) \leq t\}$ et $a(t) = \lambda(A_t)$.

a) Constater que, pour $u > 0$, on a $e^{-u} = \int_u^{+\infty} e^{-t} dt$.

$$\text{En d\'eduire que l'on a } \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varphi(x)} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} a(t) dt.$$

b) On suppose de plus que φ est homogène de degré $\alpha > 0$, c'est-à-dire que

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi(tx) = t^\alpha \varphi(x)$$

Montrer qu'on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varphi(x)} dx = \Gamma\left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) a(1),$$

où les constantes $\Gamma(s)$ (fonction d'Euler) sont définie pour $s > 0$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

c) Soit E l'ellipsoïde de \mathbb{R}^d formé des points x vérifiant

$$\sum_{j=1}^d a_j^2 x_j^2 \leq 1$$

où les $a_j > 0$ sont des constantes données. Déterminer le volume $\lambda(E)$. (On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.)

Exercice 4. Soit F [respectivement G] l'espace des fonctions f [resp. g] continues sur \mathbb{R} , nulles en dehors d'un intervalle borné, et qui vérifient

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(1+x^2) dx = 0 \quad \text{resp.} \quad \int_{\mathbb{R}} g(x)(1+x^2)^{-1} dx = 0.$$

Montrer que F est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. L'espace G est-il dense dans $L^2(\mathbb{R})$?