

Tarea
Mayo de 2005

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Aitor Aldunate, Jorge Lemus.

Pregunta 1 Sea μ una medida regular sobre \mathbb{R}^d y f una función medible acotada sobre compactos tal que para cierto $p \in [1, \infty]$,

$$\sup \left\{ \left| \int f \phi d\mu \right| : \phi \in C_0(\mathbb{R}^d), \|\phi\|_p \leq 1 \right\} = A < \infty,$$

(donde la norma se refiere al espacio $L^p(\mu)$).

- i) Pruebe que se tiene $A = \sup \left\{ \left| \int f \phi d\mu \right| : \phi \in L^p(\mu), \|\phi\|_p \leq 1 \right\}$.
- ii) Concluya que $f \in L^q(\mu)$, donde q es el conjugado de p , y que $\|f\|_q = A$.

Pregunta 2

Sea (X, τ) espacio medible y μ y ν dos medidas con signo finitas definidas en τ .

- i) Muestre que ν y μ son singulares entre sí ssi $|\nu|$ y $|\mu|$ lo son.
- ii) Muestre que si ν y μ son singulares entre sí, entonces

$$\|\nu - \mu\| = \|\nu\| + \|\mu\|$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma de variación total.

- iii) Suponga que X es infinito no numerable y que para todo $x \in X$ se tiene $\{x\} \in \tau$. Deduzca que el espacio vectorial de medidas con signo finitas sobre (X, τ) , dotado de la norma de variación total *no* es separable.

Pregunta 3

Sean (X, τ, μ) espacio de medida y (f_n) una sucesión de funciones medibles t.q. $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ y $f_n \rightarrow f$ μ -c.t.p.

- a) Muestre que $f \in L^p$.
- b) Suponga que $1 < p < \infty$. Pruebe que dados $g \in L^q(\mu)$ (con q el conjugado de p) y $\varepsilon > 0$, existen (i) $\delta > 0$ t.q. $\int_A |g|^q d\mu < \varepsilon$ para todo $A \in \tau$ t.q. $\mu(A) < \delta$; (ii) $B \in \tau$ t.q. $\mu(B) < \infty$ y $\int_{B^c} |g|^q d\mu < \varepsilon$; (iii) $C \subseteq B$ medible t.q. $\mu(B \setminus C) < \delta$ y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en C . Deduzca que para todo $g \in L^q$ se tiene

$$\int f_n g d\mu \rightarrow \int f g d\mu,$$

es decir $f_n \rightarrow f$ débilmente.

- c) Muestre que la conclusión anterior no es válida en el caso $p = 1$ (Ind.: busque un contraejemplo en \mathbb{R} con la medida de Lebesgue).

Pregunta 4 *Desigualdad de Minkowsky para integrales*

Sean (X, τ, μ) y (Y, \mathcal{F}, ν) dos espacios de medida σ -finitos y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función $\tau \otimes \mathcal{F}$ medible.

a) Pruebe que si $f \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\left[\int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

Ind: Sea q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Estudie la aplicación

$$g \mapsto T(g) = \int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] g(x) d\mu(x)$$

para funciones $g \in L^q$.

b) Suponga que $1 \leq p \leq \infty$, que $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ ν -c.t.p en y y que la función $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ pertenece a $L^1(\nu)$. Pruebe que entonces $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ μ -c.t.p en x , que la función $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ pertenece a $L^p(\mu)$, y que

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y)$$

c) La desigualdad triangular usual de la norma L^p es conocida también como desigualdad de Minkowsky. Justifique por qué.

Pregunta 5 Sean (X_i, τ_i) , $i = 1, 2$. espacios medibles y ν_i, μ_i medidas σ -finitas sobre (τ_i) .

a) suponga que $\nu_i \ll \mu_i$. Probar que $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ y que

$$\frac{\partial(\nu_1 \otimes \nu_2)}{\partial(\mu_1 \otimes \mu_2)} = \frac{\partial \nu_1}{\partial \mu_1} \frac{\partial \nu_2}{\partial \mu_2} \quad \mu_1 \otimes \mu_2 \text{ c.t.p}$$

b) Probar que $\nu_1 \amalg \mu_1$ o $\nu_2 \amalg \mu_2$ implica $\nu_1 \otimes \nu_2 \amalg \mu_1 \otimes \mu_2$

c) Sea $\nu_1 \otimes \nu_2 = (\nu_1 \otimes \nu_2)_a + (\nu_1 \otimes \nu_2)_s$ la descomposición de Lebesgue de $\nu_1 \otimes \nu_2$ c/r a $\mu_1 \otimes \mu_2$. Probar que $(\nu_1 \otimes \nu_2)_a = (\nu_1)_a \otimes (\nu_2)_a$ y $(\nu_1 \otimes \nu_2)_s = (\nu_1)_s \otimes (\nu_2)_s$, donde $\nu_i = (\nu_i)_a + (\nu_i)_s$ es la descomposición de ν_i c/r a μ_i .

Pregunta 6 *Función Maximal de Hardy-Littlewood y derivada de Lebesgue*

En esta pregunta se denotará indistintamente por λ o por dx la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Medibilidad será siempre c/r a las tribus de Lebesgue.

1) Sea \mathcal{C} una familia de bolas abiertas en \mathbb{R}^n y $U = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$. Sea $c < \lambda(U)$. Se probará que existe bolas disjuntas B_1, \dots, B_k tales que $\sum_{i=1}^k \lambda(B_i) > 3^{-n}c$.

a) Muestre que existe un compacto $K \subseteq U$ y una cantidad finita de bolas $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{C}$ tales que $\lambda(K) > c$ y $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m A_j$.

b) Defina B_1 como la bola A_j con mayor radio, y recursivamente, B_{i+1} como la bola de mayor radio entre las A_j que son disjuntas de B_1, \dots, B_i , y así hasta que ya no se pueda continuar el proceso. Muestre que si para cierto $j \in \{1, \dots, m\}$ se tiene A_j no es ninguna B_i , entonces existe $i(j)$ tal que $A_j \cap B_{i(j)} \neq \emptyset$ y $A_j \subseteq B_{i(j)}^*$ donde $B_{i(j)}^*$ es la bola concéntrica a $B_{i(j)}$ de radio tres veces mayor. Concluya la desigualdad buscada.

- 2) Una función medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *localmente integrable* si $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Para f localmente integrable, $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ definimos

$$A_r f(x) := \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

donde $B(x, r)$ es la bola de centro x y radio r .

- a) Pruebe que para cada $r > 0$, $A_r f$ es medible en x (Ind.: muestre que $A_r f(x) = \sigma r^n \int_{\mathbb{R}^n} g_r(x, y) f(y) dy$ para cierta constante $\sigma > 0$ y cierta función medible $g_r : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$.)
- b) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la esfera $S(x, r)$ de centro x y radio r tiene medida nula, y que para todo x la función $A_r f(x)$ es continua como función de r .

Deduzca que la *función maximal de Hardy-Littlewood* Hf , definida por

$$Hf(x) := \sup_{r>0} A_r |f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy,$$

es medible en x .

- d) Pruebe el **Teorema maximal**: Existe $C > 0$ tal que para todo $\alpha > 0$ y toda f integrable,

$$\lambda(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(x)| dx.$$

Para ello, se sugiere definir $E_\alpha := \{x : Hf(x) > \alpha\}$. Muestre que para cada $x \in E_\alpha$ existe $r_x > 0$ tal que $\frac{1}{\alpha} \int_{B(x, r_x)} f(y) dy > \lambda(B(x, r_x))$ y considere la familia de bolas $\{B(x, r_x)\}_{x \in E_\alpha}$ y $c < \lambda(E_\alpha)$ cualquiera.

- 3) Se probará el **Teorema de derivación de Lebesgue** para todo f localmente integrable, $\lim_{r \rightarrow 0} A_r f(x) = f(x)$ dx - c.t.p.
- a) Pruebe el resultado primero para g continua integrable.
- b) Considere f integrable y una función g como antes a distancia ε de f en norma p (porque existe?). Defina $D_\alpha = \{x : \limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| > \alpha\}$ y $F_\alpha = \{x : |f(x) - g(x)| > \alpha\}$. De una mayoración para $\lambda(F_{\frac{\alpha}{2}})$ y pruebe que

$$\lambda(D_\alpha) \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha} + \frac{2C\varepsilon}{\alpha}.$$

- c) Concluya el resultado para f integrable y luego para f localmente integrable.