

MEDIDA

TAREA 3 1A PARTE

11 DE JUNIO DE 2006

Sea f una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier de f , denotada por \hat{f} , es la función en \mathbb{R}^n dada por:

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle k, x \rangle} f(x) dx$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto punto usual en \mathbb{R}^n . Notar que si llamamos e_k a la función definida por $e_k(x) = \exp(2\pi i \langle k, x \rangle)$ entonces $\hat{f}(k) = (f * e_k)(0)$.

1. El operador traslación τ_h se define por $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$, y el operador de escalamiento δ_λ se define por $(\delta_\lambda f)(x) = f(x/\lambda)$. Entonces se satisface que la aplicación $f \mapsto \hat{f}$ es lineal en f , y además

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(k) &= e^{-2\pi i \langle k, h \rangle} \hat{f}(k), \quad h \in \mathbb{R}^n, \\ \widehat{\delta_\lambda f}(k) &= \lambda^n \hat{f}(\lambda k). \quad \lambda > 0.\end{aligned}$$

2. Pruebe el Teorema de Riemann-Lebesgue: "Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, y $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ ". Aquí el espacio

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \lim_{\|k\| \rightarrow \infty} h(k) = 0 \right\}$$

3. Dadas $f, g \in L^1$ pruebe que

$$\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k) \hat{g}(k)$$

4. Para $\lambda > 0$, se denota por g_λ la función Gaussiana sobre \mathbb{R}^n dada por

$$g_\lambda(x) = \exp\left(-\pi \lambda |x|^2\right)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\widehat{g_\lambda}(k) = \lambda^{-n/2} \exp\left[-\pi |k|^2 / \lambda\right].$$

5. En esta parte se probará el Teorema de Plancherel que permite extender la Transformada de Fourier desde L^1 hasta L^2 .

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces \hat{f} está en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la igualdad:

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

La aplicación $f \rightarrow \hat{f}$ tiene una extensión única a una aplicación lineal continua de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que además es una isometría, es decir, la fórmula (5) se mantiene para esta extensión.

- (i) Demuestre que, justificando además la existencia de las integrales:

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(k) \right|^2 \exp[-\varepsilon \pi |k|^2] dk = \varepsilon^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-\frac{\pi(x-y)^2}{\varepsilon} \right] f(y) dy$$

- (ii) Muestre, directamente o usando regularización por funciones \mathcal{C}^∞ , que la última integral tiene como límite a $f(x)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y luego que el lado izquierdo de (1) tiende a $\|f\|_{L^2}$.

- (iii) Concluya que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

- (iv) Muestre que esto se satisface para f cualquiera en $L^2(\mathbb{R}^n)$ usando la densidad de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Recuerde que $L^2(\mathbb{R}^n)$ es completo.
- (v) Finalmente muestre que la extensión así definida es lineal y continua.