

TEORÍA DE LA MEDIDA – EXAMEN

JAIME SAN MARTÍN, ANDRÉS FIELBAUM, CRISTÓBAL GUZMÁN
12 DE DICIEMBRE 2009

P1. Sea (X, \mathcal{B}, μ) espacio de medida. Diremos que la medida es *Semifinita* si $\forall A \in \mathcal{B}, \mu(A) = \infty \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}, B \subseteq A$ tq $0 < \mu(B) < \infty$.

(a) Pruebe que toda medida σ -finita es semifinita, pero que la recíproca no es cierta.

(b) Pruebe que $\forall A \in \mathcal{B}$ de medida infinita, y $\forall r > 0, \exists B \in \mathcal{B}, B \subseteq A$ tal que $r < \mu(B) < \infty$.

Indicación: considere el supremo de los valores que μ toma sobre los subconjuntos de A de medida finita y si este supremo es finito pruebe que se alcanza y llegue a una contradicción.

(c) Considere ahora que la medida μ es cualquiera. Defina $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ por

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}, B \subseteq A, \mu(B) < \infty\}$$

Pruebe que λ es una medida semifinita y que, si μ es semifinita, entonces $\lambda = \mu$.

P2. Considere X el espacio de las medidas finitas sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Para μ, ν en X , se define su convolución como $\mu * \nu(E) = \mu \otimes \nu(E_2)$, donde $E_2 = \{(x, y) : x + y \in E\}$.

(a) Pruebe que si μ, ν pertenecen a X entonces $\mu * \nu$ pertenece a X . Pruebe además que $\lambda = \mu * \nu$ es la única medida con signo finita tal que

$$\int f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) d\mu(x) d\nu(y) \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

(b) Pruebe que la convolución sobre X es conmutativa (también es asociativa y distribuye frente a la suma pero no lo pruebe). ¿Posee la convolución un elemento neutro?

(c) Si E es un boreliano de \mathbb{R} pruebe que

$$\mu * \nu(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu(E - t) d\nu(t).$$

Concluya que si μ es continua (i.e. todo singleton es μ -despreciable), entonces $\mu * \nu$ es continua. Pruebe además que si ν y μ son discretas (i.e., se concentran en conjuntos numerables), entonces $\mu * \nu$ también. En particular, encuentre una fórmula explícita para $\mu * \nu$ cuando ambas medidas se concentran en \mathbb{Z} .

(d) Sea m la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Pruebe que si $\mu \ll m$, entonces para toda λ en X , $\mu * \lambda \ll m$. Para el caso en que $\nu \ll m$ pruebe además la fórmula

$$\frac{d(\mu * \nu)}{dm} = \frac{d\mu}{dm} * \frac{d\nu}{dm}.$$

P3. Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función en $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, dx)$. Supondremos que f satisface la condición de Dini en x es decir existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|} dz < \infty.$$

Esto representa una cierta continuidad de f en x . Bajo estas condiciones pruebe que

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^A \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt d\lambda = f(x).$$

Para ello necesitará probar primero el siguiente lema

Lema 1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, dx)$ entonces

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(Ax) dx = 0.$$

Demostración. Pruebelo primero para $f \in \mathcal{C}_0^\infty$. Para ello demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(Ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{\cos(Ax)}{A} dx$$

□

Pruebe ahora que

$$J(A) := \frac{1}{\pi} \int_0^A \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+z) \frac{\operatorname{sen}(Az)}{z} dz,$$

y usando la famosa identidad $\forall A > 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(Az)}{z} dz := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{\operatorname{sen}(Az)}{z} dz = 1,$$

deduzca que

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \operatorname{sen}(Az) dz + \frac{1}{\pi} \int_{|z| \geq N} \frac{f(x+z)}{z} \operatorname{sen}(Az) dz - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z| \geq N} \frac{\operatorname{sen}(Az)}{z} dz.$$

Pruebe además que

$$\int_{|z| \geq N} \frac{\operatorname{sen}(Az)}{z} dz = \int_{|u| \geq AN} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} du.$$

Concluya el resultado

TIEMPO 4 hrs.