

### Control 1 Teoría de la Medida 2003

Profesor: Alejandro Maass  
Tiempo: 3 horas

**P1.**— Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Sea  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$  la  $\sigma$ -álgebra Boreliana de  $X$ . Sea  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$  una medida finita. El propósito de este problema es probar el resultado siguiente:

$$\forall B \in \mathcal{B},$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists F \subseteq X, \text{ cerrado}, \exists U \subseteq X, \text{ abierto}, \text{ tal que } F \subseteq B \subseteq U, \quad \mu(U \setminus F) \leq \epsilon. (*)$$

Para probar el resultado se sugiere:

- (a) Probar que la propiedad (\*) es cierta para todo cerrado de  $X$ .
- (b) Defina  $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B} : \text{ la propiedad } (*) \text{ es cierta } \}$ , y pruebe que es  $\sigma$ -álgebra.
- (c) Concluya.

**P2.**— Sea  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  un espacio de medida finita. Sea  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una familia creciente de particiones finitas  $\mathcal{B}$ -medibles, es decir,  $\alpha_n \subseteq \mathcal{B}$  y dado  $A \in \alpha_{n+1}$  existe  $B \in \alpha_n$  tal que  $A \subseteq B$  en cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $\mathcal{B}_\infty = \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n)$ .

- (a) Caracterice las funciones  $\sigma(\alpha_n) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$  medibles,  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Pruebe que dada una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , en  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}_\infty, \mu)$ , y dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  y una función  $\sigma(\alpha_N) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$  medible,  $f_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\left| \int_{\Omega} f_N d\mu - \int_{\Omega} f d\mu \right| < \epsilon$$

**observación:** debe probar todo resultado que no se haya demostrado en clase de cátedra.

**P3.**— Sea  $\Omega \neq \emptyset$ .

(A) Se dice que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una clase que recubre si  $\emptyset \in \mathcal{C}$  y dado  $A \subseteq \Omega$  existe  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ .

Sea  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$  tal que  $\tau(\emptyset) = 0$ . Se define  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$  por

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(E_n) : (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right\}.$$

Probar que  $\mu^*$  es medida exterior.

(B) Se dice que una medida exterior  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$  es regular si  $\forall A \subseteq \Omega, \exists E \in \mathcal{B}^*$  (medibles con  $\mu^*$ ),  $A \subseteq E, \mu^*(E) = \mu^*(A)$ .

Asuma que  $\mu^*$  es una medida exterior regular y que  $\mu^*(\Omega) < \infty$ . Probar que

$$E \in \mathcal{B}^* \text{ si y sólo si } \mu^*(\Omega) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c)$$