

MA48C: Teoría de la Medida e Integración: Control 1.

Profesor cátedra: Jaime San Martín.

2000.

1 Sean f_n, f funciones medibles en (X, τ, μ) espacio de medida finita. Diremos que (f_n) converge a f en medida si $(f_n \xrightarrow{m} f)$

$$\forall \varepsilon \quad \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(30 %) (i) Pruebe que si $f_n \xrightarrow{m} f$ y $f_n \xrightarrow{m} g$ entonces $f = g$ c.t.p.

(30 %) (ii) Pruebe que si $f_n \xrightarrow{L^1} f$ entonces $f_n \xrightarrow{m} f$ y que si $f_n \rightarrow f$ c.t.p. entonces $f_n \xrightarrow{m} f$.

(30 %) (iii) Sea $d(f, g) = \int (|f - g| \wedge 1) d\mu$ con $a \wedge 1 = \min\{a, 1\}$.

Pruebe que $f_n \xrightarrow{m} f$ si y sólo si $d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Además pruebe que d verifica la desigualdad triangular.

(10 %) (iv) De un ejemplo donde $f_n \xrightarrow{m} f$ pero $f_n \not\rightarrow f$ c.t.p..

2 Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Probaremos que si $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$ entonces $A - A = \{z = x - y \mid x \in A, y \in A\}$ es una vecindad del origen, es decir $\exists \delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subseteq A - A$.

20 % (i) Pruebe que basta probar este resultado en el caso en que A es compacto.

80 % (ii) Suponga que A es compacto pruebe el resultado, para ello le puede ser útil considerar los siguientes pasos:

- (a) Si $\omega_n = \{x \mid \exists y \in A \text{ tq } |x - y| < \frac{1}{n}\}$ es un abierto que contiene a A y $\cap \omega_n = A$. Deduzca que $\mu(\omega_n) \searrow \mu(A)$, y que $\forall n \geq n_0 \quad \mu(\omega_n) \leq \frac{3}{2}\mu(A)$.

- (b) Si n_0 es tal que $\frac{3}{2}\mu(A) \geq \mu(\theta_{n_0})$ entonces $(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}) \subseteq A - A$.
Razone por contradicción.

3.-

- (1) Supongamos que $a_n \geq 0$ y que la serie de potencias $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia 1. Pruebe que:

$$\lim_{x \nearrow 1} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n$$

- (2) Determine el rango de p para el cual $f(x) = e^{-x^p \sin^2 x}$ es integrable en $[0, \infty)$.
- (3) Pruebe que si f es medible son equivalentes en un espacio de medida finita (X, τ, μ) .
- (a) f integrable.
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} k\mu\{x \text{ tq } k \leq |f| < k+1\} < \infty$.