Auxiliar 6: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
28 de septiembre de 2010

P1. (i) Supongamos que $a_n \geq 0$ y que la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ tiene radio de convergencia 1.

Pruebe que
$$\lim_{x\nearrow 1} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n$$

(ii) Pruebe que si (X,τ,μ) es un espacio de medida finita y f es τ-medible entonces son equivalentes:

(a) f es integrable.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} k\mu\{x : k \leq |f| < k+1\} < \infty$.

P2. Sea $(X,\mathcal{B},\mu)$ espacio de medida finita. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f \in L^p \ \forall 1 \leq p \leq \infty$. Se probará que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ (pudiendo ser este valor infinito). Para ello:

(i) Pruebe el resultado si $\|f\|_\infty = 0$.

(ii) En caso contrario, pruebe directamente que $\limsup_p \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

(iii) Pruebe que $\forall \alpha < \|f\|_\infty, \liminf_p \|f\|_p \geq \alpha$. Concluya.

P3. Consideremos (X,τ,μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. Diremos que $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_n\}$ es una partición finita si $\mathcal{A}$ es una partición de X, y los conjuntos $A_i, i = 1,\ldots,n$ son medibles y de medida positiva. Para una partición finita $\mathcal{A}$ considere

$$T_{\mathcal{A}}f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} f(x)d\mu(x) \right) 1_{A_i}$$

(i) Pruebe que si $f \in L^p, 1 \leq p < \infty$ entonces $T_{\mathcal{A}}f \in L^p$, que $T_{\mathcal{A}}$ es lineal y que en L^p tiene norma menor o igual a 1.

Dadas dos particiones finitas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, se dice que $\mathcal{B}$ es más fina que $\mathcal{A}$ si todo elemento de $\mathcal{B}$ está contenido en uno de $\mathcal{A}$ y los elementos de $\mathcal{A}$ son uniones de elementos de $\mathcal{B}$. Esta relación de orden se denotará $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

(ii) Pruebe que para $f \in L^p$ se tiene el siguiente resultado: dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{A}$ partición finita tal que
$$\forall \mathcal{B} \text{ partición finita}, \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \implies \|T_{\mathcal{B}}f - f\|_p \leq \epsilon$$

P4. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua a la derecha, y notemos μ_F la medida de Lebesgue-Stieltjes que induce. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1$. Se quiere probar la fórmula de integración por partes siguiente:

$$\int f(x)1_{[0,1]}(x)d\mu_F = F(1)f(1) - F(0^-)f(0) - \int_0^1 F(x)f'(x)dx$$

Para ello:

(i) Defina $x_i^n = \dfrac{i}{2^n}$ para $i = 0, \ldots, 2^n$. Pruebe que la función

$$f_n(x) := f(0)1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{2^n-1} f(x_i^n)1_{(x_i^n, x_{i+1}^n]}(x)$$

converge puntualmente a f en $[0,1]$. Deduzca que $\displaystyle\int f_n 1_{[0,1]} d\mu_F \to \int f 1_{[0,1]} d\mu_F$ cuando $n \to \infty$

(ii) Pruebe que $\displaystyle\int f_n 1_{[0,1]} d\mu_F = F(1) f\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) - F(0^-) f(0) - \sum_{i=1}^{2^n-1} F(x_i^n)(f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n))$

(iii) Concluya el resultado (Hint: Recuerde que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + o(|x-y|)$).