Control 1: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
2 de octubre de 2010

P1.

a) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que existe un álgebra numerable $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ y $\exists (A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Pruebe que para todo $1 \leq p < \infty$, $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ es separable.
Indicación: Recuerde que si μ es finita entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\exists B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A \Delta B) \leq \varepsilon$.

b) En el espacio de medida $([0, \infty), \mathcal{B}, \mathrm{dx})$ con dx la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}_+$ considere la función

$$f_p(x) = e^{-x^p \sin^2(x)}$$

(i) Demuestre que $\exists \bar{p} \in \mathbb{R}$ tal que $f_{\bar{p}} \in L^1([0, \infty))$

(ii) Determine el rango de $p \in \mathbb{R}$ tal que $f_p \in L^1([0, \infty))$

(iii) Calcule $\lim\limits_{p\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty f_p(x)\mathrm{dx}$

P2. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, $1 \leq p < \infty$ y $m \in L^\infty(X)$. Se define $M : L^p(X) \to L^p(X)$ como

$$M(f)(x) = m(x)f(x)$$

a) Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathrm{Im}(M)$ es denso en $L^p(X)$

(ii) $m(x) \neq 0$ c.t.p.

(iii) M es inyectivo.

Definimos el conjunto de valores propios de M como

$$\mathrm{eig}(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} : M - \lambda I \text{ no es inyectivo}\}$$

y el espectro de M como

$$\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} : M - \lambda I \text{ no es biyectivo}\}$$

b) Pruebe que $\lambda \in \mathrm{eig}(M)$ si y sólo si $\{x \in X : m(x) = \lambda\}$ tiene medida positiva.

c) Pruebe que $\lambda \in \sigma(M)$ si y sólo si $\{x \in X : |m(x) - \lambda| < \varepsilon\}$ tiene medida positiva para todo $\varepsilon > 0$.

P3. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Un conjunto $E \subseteq X$ se dice localmente medible si $\forall A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < \infty$ se tiene que $E \cap A \in \mathcal{F}$. Sea $\tilde{\mathcal{F}}$ el conjunto de todos los subconjuntos localmente medibles de X (observe que $\mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$). μ se llama *saturada* si $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$. Demuestre que:

a) Si μ es σ-finita, entonces es saturada.

b) $\tilde{\mathcal{F}}$ es σ-algebra.

c) Defina $\tilde{\mu}$ sobre $\tilde{\mathcal{F}}$ por

$$\tilde{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E) & \text{si } E \in \mathcal{F} \\ \infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces $\tilde{\mu}$ es una medida saturada sobre $\tilde{\mathcal{F}}$, llamada la saturación de μ.

d) Si μ es completa, $\tilde{\mu}$ también lo es.

e) Suponga que μ satisface que $\forall E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) = \infty$ y $\forall c > 0, \exists A \in \mathcal{F}, A \subseteq E$ tal que $c < \mu(A) < \infty$. Para $E \in \tilde{\mathcal{F}}$ se define

$$\underline{\mu}(E) = \sup \{\mu(A) : A \in \mathcal{F} \text{ y } A \subseteq E\}$$

Entonces $\underline{\mu}$ es una medida saturada que extiende μ.

f) Sean X_1, X_2 conjuntos no numerables disjuntos, $X = X_1 \cup X_2$ y $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de subconjuntos de X tales que el conjunto o su complemento son de cardinal a lo más numerable. Sea μ_0 la medida cuentapuntos en $\mathcal{P}(X_1)$, y defina μ sobre $\mathcal{F}$ por $\mu(E) = \mu_0(E \cap X_1)$. Entonces μ es una medida sobre $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(X)$ y $\tilde{\mu} \neq \underline{\mu}$.

Tiempo: 4 horas.