AUXILIAR 11: TEORÍA DE LA MEDIDA

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN

AUXILIARES: MAURO ESCOBAR - FELIPE SUBIABRE

2 DE NOVIEMBRE DE 2010

P1. Sean X espacio métrico localmente compacto, μ medida y $\psi \in L^1(\mu)$. Mostrar que

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}_0(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int f\psi \, d\mu \end{aligned}$$

define una medida de Radon tal que $\|L\| = \int |\psi| \, d\mu$.

P2. Sean X compacto y $L \in \mathcal{C}_0(X)^*$. Considere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0(X)$, tal que

$$\forall n \quad \|f_n\| \leq M \quad \text{y} \quad f_n \longrightarrow f \in \mathcal{C}_0(X) \text{ puntualmente.}$$

Muestre que $L(f_n) \longrightarrow L(f)$.

P3. Sean X espacio métrico compacto y $T : X \longrightarrow X$ continua y sobreyectiva. Para $x \in X$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se define

$$S_f^N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i(x)).$$

Consideremos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X)$ denso numerable. En adelante consideremos $x \in X$ fijo.

- (i) Pruebe que existe n_j subsucesión tal que $\lim_{n_j \rightarrow \infty} S_f^{n_j}(x)$ existe para toda $f \in \mathcal{F}$.
- (ii) Si llamamos al límite anterior $L(f)$, pruebe que L satisface

$$|L(f) - L(g)| \leq \|f - g\|.$$

Deduzca que L puede ser extendida como una función continua sobre $\mathcal{C}(X)$. Demuestre finalmente que $L(f \circ T) = L(f)$.

(iii) Pruebe que existe una única medida finita μ , regular y definida sobre $\mathcal{B}(X)$ tal que

$$L(f) = \int_X f \, d\mu.$$

Concluya que $\mu = \mu \circ T^{-1}$.

P4. [Borel-Cantelli] Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de eventos.

- (i) Pruebe que si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, entonces $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
- (ii) Pruebe que si los eventos A_n son independientes y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, entonces $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

P5. Sean $\{X_{kj} : 1 \leq j \leq J(k), 1 \leq k \leq N\}$ variables aleatorias independientes, y sea $f_k : \mathbb{R}^{J(k)} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Borel-medible para $1 \leq k \leq N$. Pruebe que las variables aleatorias $Y_k = f_k(X_{k1}, \dots, X_{kJ(k)})$, para $1 \leq k \leq N$, son independientes.