AUXILIAR EXTRA: TEORÍA DE LA MEDIDA

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN

AUXILIARES: MAURO ESCOBAR - FELIPE SUBIABRE

19 DE NOVIEMBRE DE 2010

P1. Construcción del proceso de Poisson

Considere para cada $t > 0$ la siguiente medida de probabilidad μ_t concentrada en $\mathbb{N}$ dada por

$$\mu_t(\{k\}) = \rho(t, k) = e^{-t} \frac{t^k}{k!}$$

Para $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p$ definimos la medida de probabilidad en $\mathbb{R}^p$, concentrada en el conjunto numerable $\mathbb{N}_{<}^p = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p : n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p\}$, dada por

$$\mu_{t_1, \dots, t_p}(\{(n_1, n_2, \dots, n_p)\}) = \prod_{j=1}^p \rho(t_j - t_{j-1}, n_j - n_{j-1})$$

donde se considera $n_0 = t_0 = 0$.

- a) Demuestre que existe una única medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^{(0, \infty)}, \mathcal{B}^{(0, \infty)})$, que denotaremos por $\mathbb{P}$, que tiene por marginales a las medidas $(\mu_{t_1, \dots, t_p} : p \geq 1, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p)$, esto es, si X_t denota las funciones coordenadas y $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p$ entonces

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = n_1, \dots, X_{t_p} = n_p) = \mu_{t_1, \dots, t_p}(\{(n_1, n_2, \dots, n_p)\})$$

- b) Pruebe que si $0 < u < s < t$ entonces $X_t - X_s$ es independiente de X_u y que sus distribuciones correspondientes son μ_{t-s} y μ_u . Para esto último le puede ser útil notar que

$$\mathbb{P}(X_u = l, X_t - X_s = m) = \sum_{j \geq l} \mathbb{P}(X_u = l, X_s = j, X_t - X_s = m)$$

P2. Propiedades de la Esperanza condicional

En este problema $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$.

- a) Suponga que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección de variables aleatorias integrables $\mathcal{F}$ -medibles y uniformemente acotadas por una variable aleatoria Y integrable

$$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-c.t.p. en } \omega.$$

Suponga que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge c.t.p. a la variable aleatoria X (y por lo tanto también converge en $L^1(\mathcal{F}, \mathbb{P})$). Pruebe que

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$$

en $L^1(\mathcal{G}, \mathbb{P})$.

- b) Sea X una variable aleatoria, y $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Pruebe que Z es $\sigma(X)$ -medible si y sólo si existe una función medible $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Z = f(X)$$

Concluya que si Y es una variable aleatoria integrable entonces existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que

$$\mathbb{E}(Y | X) = f(X)$$

- c) Considerando $L^2(\mathcal{F})$ como espacio de Hilbert, pruebe que el operador lineal

$$\begin{aligned} T : L^2(\mathcal{F}) &\rightarrow L^2(\mathcal{G}) \\ X &\mapsto \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \end{aligned}$$

es el proyector ortogonal de $L^2(\mathcal{F})$ sobre el subespacio $L^2(\mathcal{G})$.