Auxiliar Extra: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
19 de noviembre de 2010

P2. En este problema $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$.

a) Suponga que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de variables aleatorias integrables $\mathcal{F}$-medibles y uniformemente acotadas por una variable aleatoria Y integrable

$$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-c.t.p. en } \omega.$$

Suponga que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge c.t.p. a la variable aleatoria X (y por lo tanto también converge en $L^1(\mathcal{F}, \mathbb{P})$). Pruebe que

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$$

en $L^1(\mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Solución: Primero, notamos que la hipótesis de cota uniforme se usa para aplicar el Teorema de Convergencia Dominada sobre $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y así concluir que la convergencia puntual c.t.p. implica la convergencia en $L^1(\mathcal{F})$ de los X_n a X.

Calculamos $|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})|$ usando la linealidad de la esperanza condicional:

$$|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})| = |\mathbb{E}(X_n - X|\mathcal{G})|$$

Dado que sabemos que $X_n \to X$ en $L^1(\mathcal{F})$, nos gustaría tener una cota que relacione $\|\mathbb{E}(X_n - X|\mathcal{G})\|_1$ con $\|X_n - X\|_1$. Para ello veamos que dada una variable aleatoria $Z \in L^1(\mathcal{F})$, se tiene que $|\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|Z||\mathcal{G})$. En efecto, sea $G \in \mathcal{G}$, se satisface

$$\int_G Z d\mathbb{P} \leq \int_G |Z| d\mathbb{P} \implies \int_G \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}) d\mathbb{P} \leq \int_G \mathbb{E}(|Z||\mathcal{G}) d\mathbb{P}$$

Como esto se tiene para todo $G \in \mathcal{G}$ y ambos lados de la igualdad son finitos (pues $Z \in L^1(\mathcal{F}) \subseteq L^1(\mathcal{G})$), se concluye que $\mathbb{E}(Z|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(|Z||\mathcal{G})$ $\mathbb{P}$-c.t.p., y análogamente para $-Z$ se concluye $-\mathbb{E}(Z|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(|Z||\mathcal{G})$ $\mathbb{P}$-c.t.p., y por lo tanto

$$-\mathbb{E}(|Z||\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(|Z||\mathcal{G})$$

que equivale a la afirmación que se quería probar.

Usando esta cota para $Z = X_n - X$ se obtiene que

$$|\mathbb{E}(X_n - X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X_n - X||\mathcal{G})$$

y usando que $\Omega \in \mathcal{G}$ se puede integrar cada término de la desigualdad sobre el espacio completo y usar monotonía de la integral:

$$\int_\Omega |\mathbb{E}(X_n - X|\mathcal{G})| d\mathbb{P} \leq \int_\Omega \mathbb{E}(|X_n - X||\mathcal{G}) d\mathbb{P}$$

Pero por definición de esperanza condicional, el lado derecho es igual a $\int_\Omega |X_n - X| d\mathbb{P} = \|X_n - X\|_1$, y el lado izquierdo es igual a $\|\mathbb{E}(X_n - X|\mathcal{G})\|_1$, luego la cota obtenida es

$$\|\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\|_1 \leq \|X_n - X\|_1$$

y tomando el límite $n \to \infty$, dado que $X_n \to X$ en $L^1(\mathcal{F})$ se concluye que $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ en $L^1(\mathcal{G})$.